Obecná rovnice nadroviny

$\alpha : \boxed{f(X-Q)=0}$ $\quad$ V o hodn. a def. hom.

$f: V_n \to \mathbb{R}$ nenul.

$\alpha = [Q; \operatorname{Ker} f]$

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Ker} f = n-1$

---

forma $\longleftrightarrow$ nadrovina

- dáno: nenul. LF f, $Q \in \alpha$

nadrovina ? $\quad \alpha = \{ X \in \mathbb{A}_n ; f(X-Q)=0 \}$

zaměřením α je $\operatorname{Ker} f = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}]$

$X-Q \in \operatorname{Ker} f \iff X-Q = t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_{n-1} \vec{u}_{n-1}$

$t_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n-1$

$\alpha : X = Q + t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_{n-1} \vec{u}_{n-1}$

$\alpha = [Q; \underbrace{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}}_{\text{báze } \operatorname{Ker} f}]$

$a_i = f(\vec{u}_i)$

$\to f(X-Q)=0$ v konkrétní LSS: $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0$

jak najít $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}\}$: vyřešíme soustavu

1 rovnice o n nezn.

$\Downarrow$

$n-1$ parametrů $t_1, \dots, t_{n-1}$

- dána nadrovina $\alpha \subset \mathbb{A}_n$ (tj. vybereme-li lib. 1 bod $\Rightarrow$ máme Q)

$$\alpha = Q + t_1\vec{u}_1 + \dots + t_{n-1}\vec{u}_{n-1} \qquad t_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1, \dots, n-1$$

Jak najít obecnou rovnici? Tj. jak najít Lin. formu f?

$$f(X-Q) = 0$$

LF f je dána obrazy bázových vektorů

zaměření nadroviny známe: $V_{n-1} = \operatorname{Ker} f = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}]$

$$\boxed{f(\vec{u}_1) = 0\ ,\ f(\vec{u}_2) = 0\ , \dots ,\ f(\vec{u}_{n-1}) = 0}$$

v zaměření prost. $\mathbb{A}_n$ $\exists\ \vec{u}_n \in V_n$; $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}, \vec{u}_n$ je báze V_n

tj. $\vec{u}_n \notin \operatorname{Ker} f$

f nenul. $\Rightarrow$ $\boxed{f(\vec{u}_n) = \text{nenul. číslo}}$ ... forma f dána jednoznačně až na nenul. násobek

Takže:

$$f(X-Q) = 0\ , \quad \text{tj.}\quad X - Q = t_1\vec{u}_1 + \dots + t_{n-1}\vec{u}_{n-1} \quad / f$$

$$\underbrace{f(X-Q)}_{0} = t_1\underbrace{f(\vec{u}_1)}_{0} + t_2\underbrace{f(\vec{u}_2)}_{0} + \dots + t_{n-1}\underbrace{f(\vec{u}_{n-1})}_{0}$$

$$\text{tj. } f(X-Q) = 0 \quad / \cdot c\ ,\ c \neq 0$$

$$c \cdot f(X-Q) = 0$$

$\rightarrow$ v souřadnicích:

vzhledem k bázi $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}, \vec{u}_n$

$$f(\vec{x}) = ?$$

$$\vec{x} \in V_n \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_{n-1}\vec{u}_{n-1} + x_n\vec{u}_n \quad / f$$

$$f(\vec{x}) = x_1\underbrace{f(\vec{u}_1)}_{=0} + x_2\underbrace{f(\vec{u}_2)}_{=0} + \dots + x_{n-1}\underbrace{f(\vec{u}_{n-1})}_{=0} + x_n\underbrace{f(\vec{u}_n)}_{a_n \neq 0}$$

$\vec{u}_i \in \operatorname{Ker} f$, $i = 1, \dots, n-1$ $\qquad$ $\vec{u}_n \notin \operatorname{Ker} f$

$$\boxed{f(\vec{x}) = a_n \cdot x_n} \quad a_n \neq 0$$

- obecná rovnice nadroviny $\alpha \subset A_n$

$$R = \langle P; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle \text{ ... repér v } A_n$$

$$\alpha = [Q; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}]$$

$$Q = [q_1, \dots, q_n]$$

$$V_\alpha = \operatorname{Ker} f = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}]$$

$$\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})$$

$$\dots$$

$$\vec{v}_{n-1} = (v_{n-1\,1}, v_{n-1\,2}, \dots, v_{n-1,n})$$

$$\alpha: X - Q \in V_\alpha$$

$$X = [x_1, \dots, x_n]$$

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}, X - Q \text{ ... jsou LZ}$$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x_1 - q_1 & x_2 - q_2 & \dots & x_n - q_n \\ v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & & & \\ v_{n-1\,1} & v_{n-1\,2} & \dots & v_{n-1\,n} \end{vmatrix} = 0$$

← obecná rovnice nadroviny α

rozvojem det podle prvků 1. řádku:

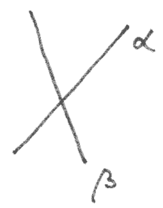
$$(x_1 - q_1) \cdot a_1 + (x_2 - q_2) a_2 + \dots + (x_n - q_n) a_n = 0$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0$$

Spojení (af.) podprostorů

$$\underbrace{\alpha, \beta}_{\text{podpr.}} \subset \mathbb{A}_n \Rightarrow \alpha \cap \beta \text{ je také podprostor v } \mathbb{A}_n$$

! $\alpha \cup \beta$ (obecně) **není** podprostor $\mathbb{A}_n$



sjednocení je „kříž"

def.: spojení 2 podpr.: nejmenší podpr., kt. α i β obsahuje

$\alpha \vee \beta$

$$\gamma \subset \mathbb{A}_n;\ \begin{matrix}\alpha \subset \gamma \\ \beta \subset \gamma\end{matrix} \Rightarrow \alpha \vee \beta \subset \gamma \qquad \begin{matrix}\alpha \subset \alpha \vee \beta \\ \beta \subset \alpha \vee \beta\end{matrix}$$

- spojení více podpr.:
  $\alpha \vee \beta$ je zase podpr. v $\mathbb{A}_n$

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \quad \text{tj. není třeba psát závorky}$$

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \dots \vee \alpha_k$$

- Jak nalezneme $\alpha \vee \beta$?

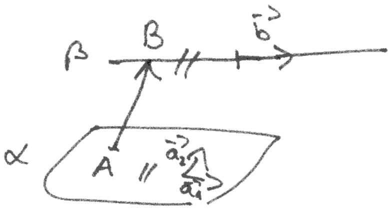
$$\alpha = [A; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]$$
$$\beta = [B; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m]$$

$$\alpha \vee \beta = [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nebo klidně } B}}{A}; \underbrace{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m, B-A}_{\text{mn. generátorů zaměření } \alpha \vee \beta}]$$

(obecně nemusí být báze)

$$\alpha: X = A + t_1\vec{a}_1 + \dots t_k\vec{a}_k$$
$$\beta: Y = B + s_1\vec{b}_1 + \dots + s_m\vec{b}_m$$
$$Y = A + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tzv. vektor příčky}}}{(B-A)} + s_1\vec{b}_1 + \dots + s_m\vec{b}_m$$

Př.



$$\alpha \vee \beta = \mathbb{A}_3 = [A; \underbrace{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}}_{\text{lze zreduk.: } \vec{a}_1, \vec{a}_2}, B-A]$$

- vlastnosti spojení:

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$$ ... nezáleží na pořadí bázových vekt.

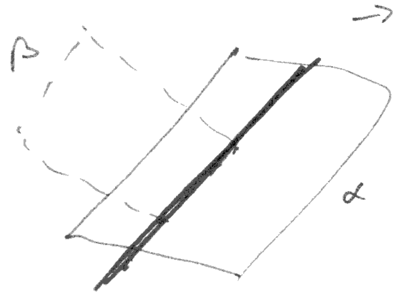
$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

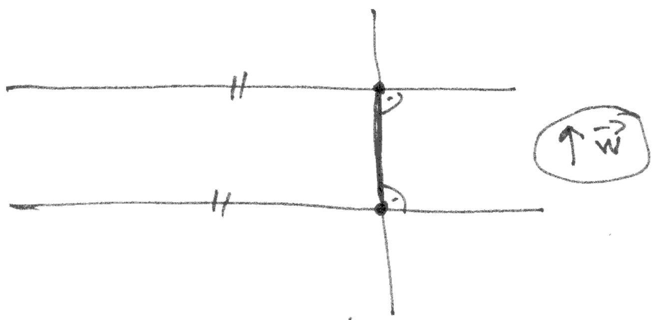
$$\underbrace{(\alpha \cap \beta)}_{\text{průsečnice 2 rovin v } A_3} \vee (\alpha \cap p) = \underline{\underline{\alpha \vee (p \cap \beta)}}$$

p ... přímka

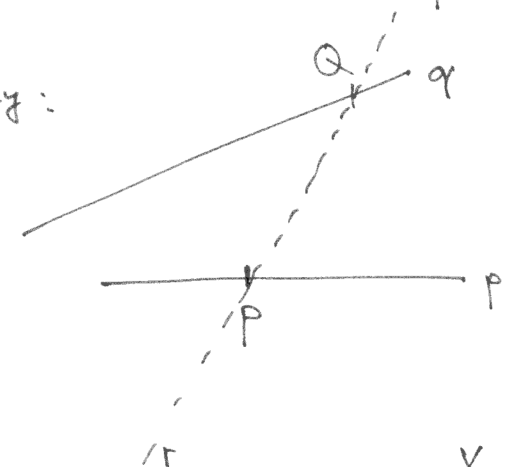
$\alpha \cap p$:
→ p ... p, α incid., $\alpha \cap \beta$, α
→ bod ... různob.
→ $\emptyset$ ... rovnob. (různé)

$(p \cap \beta) \vee \alpha$





mimoběžky:



přímka, kt. je se 2 podprostory různoběžná, se nazývá příčka těchto 2 podpr.

$$r: X = P + t(P - Q) \quad t \in \mathbb{R}$$

Hledání příčky:

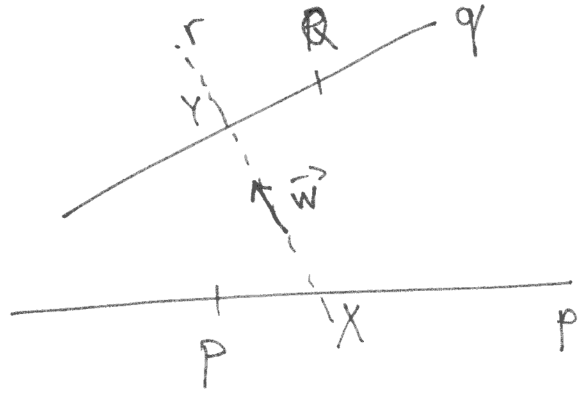
- je-li dán směr příčky: ... $\underline{\underline{[\vec{w}]}}$

$$\left.\begin{aligned} p &= [P; \vec{u}] \\ q &= [Q; \vec{v}] \end{aligned}\right\} \text{ ~~sa~~ mimoběžky}$$

příčka: $r = [M; \vec{w}]$

dán

tj. <u>hledáme M</u>



$$X = P + t\vec{u}$$

$$Y = Q + s\vec{v}$$

$$r: Z = M + \alpha \cdot \vec{w}$$

$$Y - X, \vec{w} \ \dots \text{LZ}$$

tj. $\exists c \neq 0; \quad Y - X = c \cdot \vec{w}$

$$Q + s\vec{v} - (P + t\vec{u}) = c \cdot \vec{w}$$

$$\boxed{s\vec{v} - t\vec{u} - c\vec{w} = P - Q}$$

s_0, t_0, c_0 ... řeš. soust.

$$\underline{\underline{M}} = \begin{cases} P + t_0\vec{u} \\ Q + s_0\vec{v} \end{cases}$$