Eukleidovský prostor

je def.: afinní prostor, na jehož zaměření je def. skalární součin

---

skalární součin: S PD BLF

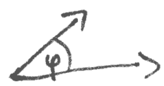
- Motivace
  - pokus
  - problém
- vyřešíme problém (zobecňování, důkaz)
- Příklady (protipř., + práce s chybou)
- Aplikace

Problémy metrické geometrie:

- vzdálenosti
- velikosti úhlů

metodou souřadnic (analytická geometrie)

Základní problémy metrické geometrie:

- vzdálenost 2 bodů  (norma vektoru)
- odchylka 2 vektorů 

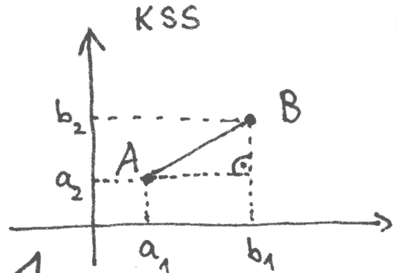
vyřešíme pomocí souřadnic

- vzdálenost 2 bodů

$A = [a_1, a_2]$

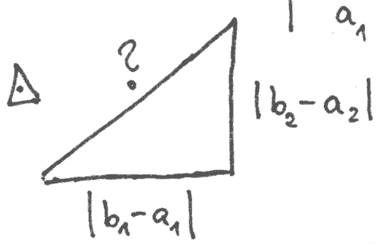
$B = [b_1, b_2]$

KSS



„normální" planimetrii máme k dispozici

chceme, aby analytická řešení byla v souladu s reálným světem



vektor AB

$\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$d(A,B) = ? = \sqrt{|b_1-a_1|^2 + |b_2-a_2|^2}$

distance

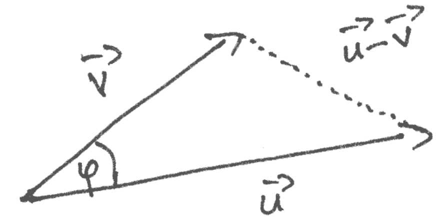
Pythagorova věta

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}}$$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

- odchylka 2 vektorů:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = ?$$

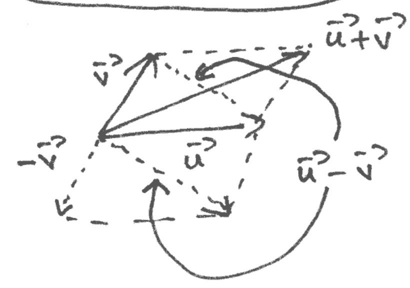


v KSS:

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$

$\triangle ABC$: známe a, b, c
hledáme γ



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

kosinová věta:

$$\underbrace{\|\vec{u}-\vec{v}\|}^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$$

$$\|(u_1 - v_1, u_2 - v_2)\|^2$$

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$$

$$\cancel{u_1^2} - 2u_1v_1 + \cancel{v_1^2} + \cancel{u_2^2} - 2u_2v_2 + \cancel{v_2^2} = \cancel{u_1^2} + \cancel{u_2^2} + \cancel{v_1^2} + \cancel{v_2^2} - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$$

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi} \qquad / : (-2)$$

$$\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$f(\vec{u}, \vec{v}) := u_1v_1 + u_2v_2$$

tento výraz je univerzální:

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})}$
- $\cos\varphi = \dfrac{f(\vec{u}, \vec{v})}{\sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})} \cdot \sqrt{f(\vec{v}, \vec{v})}}$

umožňuje zapsat řešení **obou** základních problémů metrické geometrie

- vlastnosti $f(\vec{u}, \vec{v})$
  - $f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$

    $u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2$ ✓
  - $f(\vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) = (u_1 + v_1) \cdot w_1 + (u_2 + v_2) \cdot w_2 = u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2$

    $= f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$

$f(\vec{u}, \vec{v})$ je: K, D $\Downarrow$ součin

$\Downarrow$

tj. pišme: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

naz. $\underbrace{\text{skalární}}$ součin

výsledek není vektor, ale číslo $\Downarrow$ není to operace na V

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

KSS

SŠ

VŠ:

je to vlastně bilineární forma

umíme měnit báze

K: symetrická

$\|\cdot\|$: pozitivně definitní

def.! skal. s. : SPD BLF $\Leftarrow$ abstraktní def.

$\Uparrow$ lze aplikovat

např.:

$$f \odot g := \int_a^b (f \cdot g) \ \dots \text{ je } S, PD, BL \Rightarrow \text{je to skal. součin}$$