1.1 Úvodní přednáška

affinis – lat. příbuzný

primitivní pojmy: body, vektory, f – zobr. přiřazující 2 bodům vektor

co je vektor?

Axiomy jsou 2:

nad tělesem T, často $\mathbb{R}$, char $T \neq 0$

Def. 1 $A \neq \emptyset$ $V_n \dots$ VP dim n

$f : A \times A \to V_n$

(n-rozměrný) afinní prostor – trojice (A, V_n, f);

1. $\forall X, Y, Z \in A : f(X,Y) + f(Y,Z) = f(X,Z)$
   $Y - X + Z - Y = Z - X$
2. $\exists P \in A ;\ f_P : A \to V_n$ je bijekce
   $f_P(X) := f(P,X)$ ← radiusvektor bodu X

mn. A – nositel(ka), nosič afinního prostoru

V_n – zaměření AP

body AP – prvky mn. A

afinní přímka – AP dim 1

rovina – AP dim 2

triviální AP – $(\{X\}, \{\vec{o}\}, f)$ ← dim def = 0

lib. 1prvková množina

$f(X,X) := \vec{o}$

je AP dimenze 0

Pozn. vlastnost 2 splněna $\forall P' \in A_n$

$$f_{P'}(X) = \underbrace{f(P',X)}_{\text{bij.}} \overset{(1)}{=} f(P',P) + \underbrace{f(P,X)}_{\text{bij.}}$$

bij. ⟹ bij.

Př. Afinní prostor

- $A = \mathbb{R}^n$ $V_n = \mathbb{R}^n$ (sčítání vektorů po složkách)

$X = [x_1, \dots, x_n]$
$Y = [y_1, \dots, y_n]$
$f(X,Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$

ověřme 1. a 2. z def. AP

① $f(X,Y) + f(Y,Z) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) + (z_1 - y_1, z_2 - y_2) = (\cancel{y_1} - x_1 + z_1 - \cancel{y_1}, \cancel{y_2} - x_2 + z_2 - \cancel{y_2}) = (z_1 - x_1, z_2 - x_2) = f(X,Z)$

② $f_P(X) = (x_1 - 0, x_2 - 0) = (x_1, x_2)$
$P = [0,0]$

- dimenze nemohou být různé: $A = \mathbb{R}^3$ $V = \mathbb{R}^2$ $f(X,Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$

1 ✓ 2 ne, f není prosté $[x_1, x_2, x_3] \mapsto (x_1, x_2)$

Jak se chová f?

- $f(B,B) = \vec{o}$ dle 1. $f(B,B) + f(B,B) = f(B,B)$ / + $\underbrace{-f(B,B)}_{\text{opačný vektor}}$
  $f(B,B) = \vec{o}$
- $f(B,C) = -f(C,B)$ dle 1. $f(B,C) + f(C,B) = f(B,B) = \vec{o}$

$B - B = \vec{o}$

$C - B = -(B - C)$

tj. $f(B,C) = C - B$

- $(B + \vec{u}) - D = (B - D) + \vec{u}$ ozn. $B + \vec{u} =: C \Rightarrow C - D = (B - D) + \underbrace{(C - B)}_{\vec{u}}$
  a toto platí dle 2.

$\vec{u} = C - B$ ⟹ lze def.
$\vec{u} = f(B,C)$ $C = B + \vec{u}$

atd. f se tedy chová jako –, jen je třeba dbát na definovanost objektů: nelze $B + B$

1. $f(B,B) = \vec{o}$

dle ax. 1 : $f(B,B) + f(B,B) = f(B,B) \quad / + \underbrace{(-f(B,B))}_{\text{opačný vektor}}$

$f(B,B) = \vec{o}$

2. $f(B,C) = -f(C,B)$

dle ax. 1 : $f(B,C) + f(C,B) = f(B,B) = \vec{o}$

tj. jsou ~~k sobě~~ to opačné vektory

Def. jelikož $f(C,B) = \vec{u}$ $(\exists!)$

$C - B = \vec{u}$

$C = B + \vec{u}$ definujme součet bod + vektor jako takový bod C, že $C - B = \vec{u}$

3. $f(B+\vec{u}, C) = f(B,C) + \vec{u}$

tj. $\underbrace{(B + \vec{u})}_{\text{ozn. } D} - C = (B - C) + \vec{u}$

$D = B + \vec{u}$, tj. dle def. $D - B = \vec{u}$

$D - C \overset{\text{ax.1}}{=} \underbrace{(D - B)}_{\vec{u}} + (B - C)$ ✓

4. $f(C, B+\vec{u}) = f(C,B) + -\vec{u}$

tj. $C - (B+\vec{u}) = (C - B) - \vec{u}$ plyne z 3: je to rovnost opačných vektorů k oběma stranám v 3

5. $\underbrace{(B + \vec{u})}_{\text{ozn. } D} + \vec{v} = B + (\vec{u} + \vec{v})$

$F - B = F - B$

ozn. $D + \vec{v} = F$ ~~dle ax.~~ $F = B + (F - B)$

$F = B + (\underbrace{(F - D)}_{\vec{v}} + \underbrace{(D - B)}_{\vec{u}})$ dle ax. 1

... z označení a definice Bod + vektor

6. $(B - C) + (G - H) = (B - H) + (G - C)$

7. $B - C = G - H \Leftrightarrow B - G = C - H$

8. $B + \vec{u} = C + \vec{v} \Leftrightarrow B - C = \vec{v} - \vec{u}$

$B - C = \vec{v} - \vec{u} \Leftrightarrow B = C + (\vec{v} - \vec{u}) \quad / + \vec{u}$ (dle 5)

$B + \vec{u} = C + \vec{v}$

Lin. soust. souřadnic

Bod ≠ ~~n-tice~~ souřadnice
bod má souřadnice

(1)

ax. 2: $\exists P$, $X \mapsto X-P$ je bij. souř. vektoru umíme, tj. def.: souř. bodu X jsou souř. vektoru $X-P$

$$X - P = x_1 \vec{u_1} + \dots + x_n \vec{u_n}$$

zobr. L: bodu přiřadí n-tici

je dáno bodem P a vektory $u_1, \dots, u_n$

$\underbrace{P \in A_n}_{\text{počátek}}$, $\langle \vec{u_1}, \dots, \vec{u_n} \rangle$ .. báze V_n $\Rightarrow R = \langle P; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_n} \rangle$ repér

$$L(X) = (x_1, \dots, x_n)$$

x_i – souřadnice bodu X v LSS L

L – lin. soustava souřadnic určená repérem R

$$L: A_n \to \mathbb{R}^n$$

$L(P) = (0, \dots, 0)$

totiž $P - P = \vec{o}$

L dáno pevně, tak stručně: $X = [x_1, \dots, x_n]$ ne rovnost

Souřadnice vektoru, kt. je rozdílem 2 bodů:

ve zvolené LSS L: $X = [x_1, \dots, x_n]$
$Y = [y_1, \dots, y_n]$

$$Y - X = (Y-P) - (X-P) = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n - (x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) =$$
$$= (y_1 - x_1)\vec{u_1} + \dots + (y_n - x_n)\vec{u_n}$$

stručně píšeme: $Y - X = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$

takže po složkách, počítá se s tím přirozeně

Pozn.: souř. vektorů budeme říkat, že jsou v LSS L, ne v bázi B

LSS lze zavést mnoha způsoby, vztahy za chvíli

$P \dots$ bod z ax. 2 $\qquad L: \mathbb{A}_n \to \mathbb{R}^n$

$X - P \dots$ vektor $\quad \exists$ bijekce mezi body a vektory : $\boxed{X \mapsto X - P}$

$\cancel{\langle X \rangle_R \mapsto \langle X - P \rangle_B}$

$L_R(X) = \langle X - P \rangle_B$

$X - P = \vec{x} \Rightarrow X = P + \vec{x}$

$X = P + x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n$

- pozorujme: $L(P + \vec{o}) = L(P) = [0, \dots, 0]$ ~~AxAP~~
- $X = [x_1, \dots, x_n]$ je stručný zápis tohoto, je-li L dáno pevně $\to L_R(X) = (x_1, \dots, x_n)$

① je dána báze a počátek, tj. repér R

Jak vypadá zobr. L_R?

tj. lze $X = P + x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n$

a $L_R(X) = (x_1, \dots, x_n)$

$L_R(P + \vec{x}) = (x_1, \dots, x_n) = \langle \vec{x} \rangle_B$

stručně: $X = [x_1, \dots, x_n]$

L_R je hom. } jednoznačně daný P, B
je bij. } $\Rightarrow$ počítá se body či souř. ~~je to~~ stejně

② je dáno zobr. $L_R : X \mapsto (x_1, \dots, x_n)$

Kdy je to LSS?

L musí být bijekce
musíme nalézt repér, protože L jednoznačně určeno repérem

zdef. $\mathbb{A}_n$: $\exists$ bij. A, V_n

L: je bij. $A \to \mathbb{R}^n$

- P: aby L bylo LSS, musí $\exists$ bod $P \in \mathbb{A}_n$; $L(P) = (0, 0, \dots, 0)$
- B: $\underbrace{L(X) = L(P + \vec{x})}_{\text{zdef. AP}} = \langle \vec{x} \rangle_B \quad B = ?$

vezmeme kanonickou bázi $\vec{e}_i$: $L(P + \vec{u}_i) = \vec{e}_i \qquad L$ bij. $\Rightarrow \exists!$ vektor $\vec{u}_i$; $L(P + \vec{u}_i) = \vec{e}_i$

chci $L(P + \circ)$ izomorfismus

$L(P + \vec{x}) = L(P + x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n) \overset{\text{hom.}}{=} x_1 L(P + \vec{u}_1) + \dots + x_n L(P + \vec{u}_n) =$

$= x_1 (1, 0, 0, \dots, 0) + \dots + x_n \cdot (0, \dots, 0, 1) = (x_1, \dots, x_n)$

L izom. $\Rightarrow$ bázi $\vec{u}_i$ zobrazuje na bázi $\vec{e}_i$ a naopak, tj. $\{\vec{u}_i\}$ je ~~tak~~ báze B

$L_R(X)$ je hom.?

$$\underbrace{L(P + (\vec{x} + \vec{y}))}_{\langle \vec{x} + \vec{y} \rangle_B} = \underbrace{L(P + \vec{x})}_{\langle \vec{x} \rangle_B} + \underbrace{L(P + \vec{y})}_{\langle \vec{y} \rangle_B} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$$

$$\underbrace{L(P + c\vec{x})}_{\langle c\vec{x} \rangle_B} = \underbrace{c \cdot L(P + \vec{x})}_{c \cdot \langle \vec{x} \rangle_B} \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V_n$$

ostatně: $Y - X = (Y - P) - (X - P) = \vec{y} - \vec{x} = y_1 \vec{u}_1 + \dots + y_n \vec{u}_n - (x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n) =$

$= (y_1 - x_1) \vec{u}_1 + \dots + (y_n - x_n) \vec{u}_n$

stručně píšeme: $\underbrace{Y - X}_{\text{přesně: } \langle Y - X \rangle_B} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$

- i souřadnice vektorů: budeme říkat, že jsou vzhl. k LSS (místo vzhl. k bázi B)

~~3~~ 2

LSS L, L' $\quad R = \langle P; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle$ $\quad R' = \langle P'; \vec{u}_1', \dots, \vec{u}_n' \rangle$

$L: A_n \to \mathbb{R}^n$ $\quad L: X \mapsto [x_1, \dots, x_n]$; $X - P = x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n$

$X - P' = x_1'\vec{u}_1' + \dots + x_n'\vec{u}_n'$

platí zelené varianty

VP $\quad V_n \dots B, B'$ $\quad B = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle$

$B' = \langle \vec{u}_1', \dots, \vec{u}_n' \rangle$

$\vec{u}_1 = a_{11}\vec{u}_1' + \dots + a_{n1}\vec{u}_n'$

$\vec{u}_1^{\,*} = a_{11}\vec{u}_1' + \dots + a_{1n}\vec{u}_n'$

$\vec{u}_n = a_{1n}\vec{u}_1' + \dots + a_{nn}\vec{u}_n'$

$\vec{u}_n^{\,*} = a_{n1}\vec{u}_1' + \dots + a_{nn}\vec{u}_n'$

~~nové vektory~~ vzhl. ke ~~staré bázi~~

„staré vektory vzhledem k nové bázi"

$$\vec{v} = v_1\vec{u}_1 + \dots + v_n\vec{u}_n = v_1\cdot(a_{11}\vec{u}_1' + \dots + a_{1n}^{n1}\vec{u}_n') + \dots + v_n(a_{n1}^{1n}\vec{u}_1' + \dots + a_{nn}\vec{u}_n') =$$

$$(= v_1'\vec{u}_1' + \dots + v_n'\vec{u}_n')$$

$$= (v_1a_{11} + \dots + v_na_{n1}^{1n})\vec{u}_1' + \dots + (v_1a_{1n}^{n1} + \dots + v_na_{nn})\vec{u}_n' =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_{i1}^{1j}\right)}_{v_1'} \vec{u}_1' + \dots + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_{in}^{nj}\right)}_{v_n'} \vec{u}_n'$$

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij} \qquad (a_{ij} v_j)$$

$$(v_1', \dots, v_n') = (v_1, \dots, v_n)\cdot A \qquad \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{v} \rangle_{B'} = \langle \vec{v} \rangle_B \cdot A$$

v ~~řádcích~~ sloupcích souřadnice „starých vektorů vzhledem k nové bázi" ($\in B$, B')

$P_{BB'} = (a_{ij})$

matice přechodu od báze B k bázi B'

- $P_{BB'}$ a $P_{B'B}$ jsou k sobě inv.

~~$\langle \vec{v} \rangle_B' = \langle \vec{v} \rangle_B \cdot P_{BB'}$ $/\cdot P_{BB'}^{-1}$~~

~~$\langle \vec{v} \rangle_{B'} P_{BB'}^{-1} = \langle \vec{v} \rangle_B$~~

~~$= P_{B'B}$~~

$\vec{v}_{B'} = P_{BB'}\vec{v}_B$ $/P_{B'B}\cdot$

$P_{B'B}\vec{v}_{B'} = P_{B'B}P_{BB'}\vec{v}_B$

~~skutečně: $\langle \vec{v} \rangle_B = \langle \vec{v} \rangle_{B'} \cdot P_{B'B} = (\langle \vec{v} \rangle_B \cdot P_{BB'}) \cdot P_{B'B} \overset{\text{Asoc.}}{=} \langle \vec{v} \rangle_B \cdot \underbrace{(P_{BB'} \cdot P_{B'B})}_{E}$~~

$\vec{v}_B = \underbrace{P_{B'B}\cdot P_{BB'}}_{E}\cdot\vec{v}_B$

~~$\langle \vec{v} \rangle_B \cdot P_{BB'}$~~

$$\boxed{P_{BB'}\cdot P_{B'B} = E}$$

tj. jsou k sobě inverz.

- ~~$\langle \vec{v} \rangle_{B''} = \langle \vec{v} \rangle_{B'} P_{B'B''} = \langle \vec{v} \rangle_B \cdot P_{BB'} \cdot P_{B'B''}$~~

AP $\quad \langle X - P \rangle_B = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad X_R = [x_1, \dots, x_n]$

$X_{R'} = [x_1', \dots, x_n']$

$\langle (X - P') + (P' - P) \rangle_B = (x_1, \dots, x_n)$

$\langle X - P' \rangle_B = \langle P - P' \rangle_B + (x_1, \dots, x_n)$ $/\cdot P_{BB'}$

$\langle X - P' \rangle_B \cdot P_{BB'} = \langle P - P' \rangle_B \cdot P_{BB'} + (x_1, \dots, x_n)\cdot P_{BB'}$

odtud: $\langle X - P' \rangle_{B'} = \langle P - P' \rangle_{B'} + (x_1, \dots, x_n)\cdot P_{BB'}$

$(x_1', \dots, x_n') = (b_1', \dots, b_n') + (x_1, \dots, x_n)\cdot P_{BB'}$

$P_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{n1} \quad a_{nn} \end{pmatrix}$

$X_{L'} = (1, x_1', \dots, x_n')$ $\qquad X_{L'} = X_L \cdot \begin{pmatrix} 1 & b_1' & \dots & b_n' \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & - & - & - \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$X_L = (1, x_1, \dots, x_n)$

$$\boxed{X_{L'} = X_L \cdot A_{LL'}}$$

odtud opět: $X_{L'}\cdot A_{L'L} = X_L$

tj. $A_{LL'} = A_{L'L}^{-1}$, $\quad A_{LL'}\cdot A_{L'L} = E$

$A_{LL} = E$

$X_{L''} = X_{L'}\cdot A_{L'L''} = X_L \cdot \underbrace{A_{LL'}\cdot A_{L'L''}}_{A_{LL''}}$

tj. $A_{LL''} = A_{LL'}\cdot A_{L'L''}$

Transformace LSS

$$L_{\mathcal{R}}(X) = X_{\mathcal{R}} = [x_1, \dots, x_n] \qquad L_{\mathcal{R}'}(X) = X_{\mathcal{R}'} = [x_1', \dots, x_n']$$

$$\mathcal{R} = \langle P; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \rangle \qquad \mathcal{R}' = \langle P'; \vec{b}_1', \dots, \vec{b}_n' \rangle$$

dáno: $\mathcal{R}$, $X_{\mathcal{R}} = [x_1, \dots, x_n]$, $\mathcal{R}'$

hledáme: $X_{\mathcal{R}'} = ?$

$$X_{\mathcal{R}} = [x_1, \dots, x_n]$$

$$X - P = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle X - P \rangle_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad ?\ \underline{\underline{\langle X - P' \rangle_{B'}}} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}\ ?$$

? hledáme

$$\langle X - P' + P' - P \rangle_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\langle X - P' \rangle_B + \langle P' - P \rangle_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad / P_{BB'}$$

$$\underbrace{P_{BB'} \cdot \langle X - P' \rangle_B} + P_{BB'} \langle P' - P \rangle_B = P_{BB'} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\langle X - P' \rangle_{B'} = P_{BB'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{P_{BB'} \langle P - P' \rangle_B}_{= \langle P - P' \rangle_{B'}\text{, tj. } P_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} p_1' \\ \vdots \\ p_n' \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P_{BB'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + P_{\mathcal{R}'}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1' & & & & \\ \vdots & & \boxed{P_{BB'}} & & \\ p_n' & & & & \end{pmatrix}}_{\text{afinní matice přechodu}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A_{LL'} \quad A_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$$

$$P_{BC}\langle\vec{x}\rangle_B = \langle\vec{x}\rangle_C \qquad /\cdot P_{CB}$$

$$\underbrace{P_{CB}\,P_{BC}}_{E}\langle\vec{x}\rangle_B = \underbrace{P_{CB}\langle\vec{x}\rangle_C}$$

$$\underline{\underline{E}}\cdot\langle\vec{x}\rangle_B = \langle\vec{x}\rangle_B \qquad \boxed{P_{CB} = P_{BC}^{-1}}$$

$$\boxed{P_{BD} = P_{CD}\cdot P_{BC}}$$

$$P_{BC}\langle\vec{x}\rangle_B = \langle\vec{x}\rangle_C \quad /\cdot P_{CD}$$

$$\underbrace{P_{CD}\,P_{BC}}_{P_{BD}}\langle\vec{x}\rangle_B = \underbrace{P_{CD}\langle\vec{x}\rangle_C}_{=\langle\vec{x}\rangle_D}$$

$$V^n_D \leftarrow V^n_C \leftarrow V^n_B$$

$$\underbrace{\boxed{P_{CD}\cdot P_{BC}}}_{P_{BD}} \Leftarrow P_{BD}$$

$$\boxed{X_{L'} = A_{LL'}\,X_L} \qquad /\cdot A_{L'L}$$

$$\boxed{A_{LL'} = A_{L'L}^{-1}}$$

$$\underbrace{A_{L'L}\,X_{L'}} = A_{L'L}\cdot A_{LL'}\,X_L$$

$$X_L = \underbrace{\boxed{A_{L'L}\cdot A_{LL'}}}_{E}\cdot X_L$$

$$* \quad \boxed{A_{LL''} = A_{L'L''}\cdot A_{LL'}}$$

$$X_{L'} = A_{LL'}\,X_L \quad /\cdot A_{L'L''}$$

$$\underbrace{A_{L'L''}\,X_{L'}} = \underbrace{A_{L'L''}\cdot A_{LL'}}\,X_L$$

$$X_{L''} = A_{LL''}\,X_L$$

Lineární kombinace bodů

místo n psát k – ať se to neplete s dim.

(3) (2)

$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ píšeme, protože $S = [\frac{a_1+b_1}{2}, \dots, \frac{a_n+b_n}{2}]$

$S = P + \frac{1}{2}(A-P) + \frac{1}{2}(B-P)$ nezávisí na volbě bodu P, je geometrické

zobecníme: $P + c_1(B_1 - P) + \dots + c_n(B_n - P)$ — kdy nezávisí na volbě bodu P?

vezměme "konkurenta" – bod Q:

$Q + c_1(B_1 - Q) + \dots + c_n(B_n - Q)$, rovnost $\Leftrightarrow Q - P = c_1(B_1 - P) + \dots + c_n(B_n - P) +$

$- c_1(B_1 - Q) - \dots - c_n(B_n - Q)$

$Q - P = c_1((B_1 - P) - (B_1 - Q)) + \dots + c_n(\ )$

$= \underbrace{(c_1 + \dots + c_n)}_{1} \cdot (Q - P)$

a) $c_1 + \dots + c_n = 1 \Rightarrow Q - P = Q - P$ ✓

b) $c_1 + \dots + c_n = 0 \Rightarrow$ ~~$(Q - P = \vec{o}$ a $Q = P)$~~

analogickým srovnáním vektorů (narozdíl od a), kdy srovnávám body)

$c_1(B_1 - P) + \dots = c_1(B_1 - Q) + \dots$

a) bod $P + c_1(B_1 - P) + \dots + c_n(B_n - P)$

b) vektor $c_1(B_1 - P) + \dots + c_n(B_n - P)$

naz. Lineární kombinací bodů $B_1, \dots, B_n$ s koef. $c_1, \dots, c_n$,

tento bod/vektor ozn. symbolem $c_1 B_1 + \dots + c_n B_n$

Jaké má taková lin. komb. bodů souřadnice?

bod/vektor $c_1 B_1 + \dots + c_n B_n = [d_1, \dots, d_n]$

$d_j = c_1 b_{1j} + \dots + c_n b_{nj}$

$B = [b_{j1}, \dots, b_{jn}]$

$B - P = (b_{j1}, \dots, b_{jn})$

str. 70, V1.8.2 – snadné: V2/ $A, B, C, D \in A_n$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. nechť 1), nebo 2), nebo 3) $\Rightarrow e(aA + bB) + f(cC + dD) = eaA + ebB + fcC + fdD$

jen ověřit, že je to bod či vektor

1)	$a+b=1$,	$c+d=1$,	$e+f=1$
2)	1	1	0
3)	0	0	cokoli

V1.8.3. – zobecnění na obecný počet bodů – neděláme

V1.8.4/ $\vec{u} = c_1 B_1 + \dots + c_m B_m$ $1 \le k \le m$, $c_1 + \dots + c_m = 0$

- $c_1 B_1 + \dots + c_k B_k = \vec{u} + (-c_{k+1} B_{k+1} - \dots - c_m B_m)$ pro $c_1 + \dots + c_k = 0$

- $c_1 + \dots + c_k = d \neq 0 \Rightarrow \frac{c_1}{d} B_1 + \dots + \frac{c_k}{d} B_k = \frac{1}{d}\vec{u} + (-\frac{c_{k+1}}{d} B_{k+1} - \dots - \frac{c_m}{d} B_m)$

V1.8.4'/ pro bod R místo $\vec{u}$, $c_1 + \dots + c_m = 1$

D/ $B_1, \dots, B_m$ LNZ, jestliže:

$c_1 + \dots + c_m = 0$, $c_1 B_1 + \dots + c_m B_m = \vec{o} \Rightarrow c_i = 0$ $i = 1, \dots, m$

Nejsou-li body $B_1, \dots, B_m$ LNZ, řík., že jsou LZ.

V1.8.5/ $B_1, \dots, B_m$ LNZ $\Leftrightarrow$ LNZ $B_2 - B_1, \dots, B_m - B_1$ → důk.: $c_1 B_1 + \dots + c_m B_m = c_2(B_2 - B_1) + \dots + c_m(B_m - B_1)$

$c_1 = -c_2 - \dots - c_m$

V1.8.6 tj. určují podprostor dim $(m-1)$

$B_1 \dots B_m$ jsou LNZ $\Leftrightarrow$ určují podprostor dim $(m-1)$

V1.8.7–8. – o podprostorech

souřadnice LK bodů

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 \quad \begin{cases} \text{bod} & P + c_1(B_1 - P) + c_2(B_2 - P) \\ \text{vektor} & c_1(B_1 - P) + c_2(B_2 - P) \end{cases}$$

$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

LSS: $X = P + x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 \Rightarrow X = [x_1, x_2]$

$X - P = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$

$B_1 = [b_{11}\ b_{12}]$ $\quad B_1 - P = b_{11} \vec{u}_1 + b_{12} \vec{u}_2 \Rightarrow$ souř. vektoru $\langle B_1 - P \rangle_B = (b_{11}, b_{12})$

$B_2 = [b_{21}, b_{22}]$ $\quad B_2 - P = b_{21} \vec{u}_1 + b_{22} \vec{u}_2$ $\qquad \langle B_2 - P \rangle_B = (b_{21}, b_{22})$

- vektor $c_1(B_1 - P) + c_2(B_2 - P)$ má souř. vzhl. k $\mathcal{R} = \langle P; \underbrace{\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}}_{B} \rangle$:

  $$c_1(b_{11}, b_{12}) + c_2(b_{21}, b_{22}) = (c_1 b_{11} + c_2 b_{21},\ c_1 b_{12} + c_2 b_{22})$$

- bod $X = P + c_1(B_1 - P) + c_2(B_2 - P)$ má souř. vzhl. k $\mathcal{R}$:

  $$\langle X - P \rangle_B = (c_1 b_{11} + c_2 b_{21},\ c_1 b_{12} + c_2 b_{22})$$

tj.: $c_1 B_1 + c_2 B_2$ má vzhl. k reperu $\mathcal{R}$ souř.: $c_1 b_{11} + c_2 b_{21},\ c_1 b_{12} + c_2 b_{22}$ a závorky podle toho, zda je to bod či vektor

1.3 Podprostory AP

přímka: $X = A + t\vec{u}$

rovina: $X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$

$A \in {p \atop \rho}$, $\vec{w} \in V$ ~~zaměření~~ $\Rightarrow A + \vec{w} \in {p \atop \rho}$

tvořen $X - Y$; $X, Y \in {p \atop \rho}$

Def. $A_n = (A, V_n, f)$

podprostor dimenze k AP A_n — $\emptyset \neq \bar{A} \subset A$; $\exists \bar{V}_k \subset\subset V_n$; 1) $\forall X, Y \in \bar{A}: Y - X \in \bar{V}_k$

$\dim V_k = k$ 2) $\forall X \in \bar{A}, \forall \vec{u} \in \bar{V}_k: X + \vec{u} \in \bar{A}$

zaměření podprostoru $\bar{A}$ — VP $\bar{V}_k$

- bod AP je podp. dim 0, $\bar{V}_0 = \{\vec{o}\}$ $0 \le k \le n$

  (jednobodová podmnožina mn. A)

- podP je množina, lze ji doplnit na AP: $(\bar{A}, \bar{V}_k, f_{|\bar{A}\times\bar{A}})$

  $(Y - X) \in \bar{V}_k$ $\bar{f}: \bar{A} \times \bar{A} \to \bar{V}_k$ $\bar{f}$ je restrikcí f na $\bar{A}\times\bar{A}$

  co zavedeme v AP, to lze i v ApodP, např. lin. soust. souřadnic

- z def. $\Rightarrow \bar{A}_k$ jednoznačně určen jedním svým bodem B a svým zaměřením ($\forall B, \bar{V}_k \; \exists! \bar{A}_k$) ~~$\forall \bar{A}_k \; \exists! \bar{V}_k$~~ : $\bar{A}_k$ jsou všechny body $B + \vec{u}$, $\vec{u} \in \bar{V}_k$

  $\bar{A}_k \subset A_n$, $\bar{V}_k$ zaměř. $\bar{A}_k$, $B \in \bar{A}_k \Rightarrow X \in \bar{A}_k \Leftrightarrow X - B \in \bar{V}_k$

  $B \in A_n$, $\bar{V}_k \subset\subset V_n \Rightarrow \exists! \bar{A}_k \subset A_n$; $B \in \bar{A}_k \wedge \bar{V}_k$ zaměř. $\bar{A}_k$ a $\bar{A}_k = \{X; X - B \in \bar{V}_k\}$

  - určen kterýmkoli svým bodem:
    $\bar{A}_k = \{B + \vec{u}, \vec{u} \in \bar{V}_k\}$
    $B \in \bar{A}_k$ ... ano, pro $\vec{u} = \vec{o}$ $B + \vec{o} \in \bar{A}_k$
    $C \in \bar{A}_k$, tj. $\exists \vec{v} \in \bar{V}_k$; $C = B + \vec{v}$
    $\{C + \vec{u}, \vec{u} \in \bar{V}_k\} = \bar{A}_k$
    protože $B = C - \vec{v}$
    $B + \vec{u} = C \underbrace{- \vec{v} + \vec{u}}_{\in \bar{V}_k}$
    a pro pevné $\vec{v}$ probíhá celé $\bar{V}_k$

Ozn. $\bar{A}_k = [B; \bar{V}_k] = [B; \underbrace{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k}_{\text{báze } \bar{V}_k}]$ ... podP $\bar{A}_k$ prostoru A_n obsahující B a mající zaměř. $\bar{V}_k$

Def. přímka — 1 $p, q, \dots$

rovina — podP A_n dimenze 2 $\rho, \dots$

nadrovina prostoru A_n $n-1$

- spec. případ podP — celá mn. A ... dim = n, tj. A_n — množina

  A_n ale prostor ... nevadí, množinu lze na prostor jednoznačně doplnit

Parametrické vyjádření podprostoru

$\bar{A}_k$ ... podP A_n $\bar{V}_k$ ... zaměření $\bar{A}_k$

zvolme: bod $P \in \bar{A}_k$

báze $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ zaměření $\bar{V}_k$

doplníme $\bar{A}_k$ na AP: $(\bar{A}_k, \bar{V}_k, f)$

repér $R = \langle P; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$ LSS

L'_k dána repérem R'_k

přiřaďme k-tici $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ bod X: $X = P + t_1\vec{u}_1 + \dots + t_k\vec{u}_k$

bijekce $\mathbb{R}^k \to \bar{A}_k$ (je to vlastně inverzní zobr. $L_k'^{-1}$)

Def. $\bar{A}_k$ podP AP A_n

$\bar{V}_k$ zaměření $\bar{A}_k$

$P \in \bar{A}_k$, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ báze $\bar{V}_k$

zobr. $\mathbb{R}^k \to \bar{A}_k$; $(t_1, \dots, t_k) \mapsto X$; $\boxed{X = P + t_1\vec{u}_1 + \dots + t_k\vec{u}_k}$

naz. parametrické vyjádření podP $\bar{A}_k$.

- param. vyjádření je L_k^{-1}
- $\bar{A}_1$ — přímka: je-li dána bodem P a $\vec{u} \neq \vec{o} \in \bar{V}_k \Rightarrow$ param. vyjádření přímky $\bar{A}_1$: $X = P + t\vec{u}$
- $\bar{A}_2 = [P; \vec{u}, \vec{v}]$! param. vyjádření roviny: $X = P + t\vec{u} + s\vec{v}$ a lze rozepsat pomocí souřadnic

1.4. Vzájemná poloha podP AP

rovnoběžnost, $\underbrace{\text{různoběžnost}}_{\text{určit průnik}}$ a pod. odchylky a vzdálenosti až v EP – skal. součin

mějme: $A_r' = [A; V_r']$ $A_s = [B; V_s]$ ... podP af. prostoru A_n $\quad V_r = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r]$, $V_s = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s]$

- vyloučíme triv. případ $r = 0$: A_r pouze bod A a vz. poloha bodu A a A_s triv.: $A_r \subset A_s$ nebo $A_r \not\subset A_s$
  $A \in A_s$ $\quad A \notin A_s$
- nechť tedy dále $r \geq 1$, $s \geq 1$

zkoumejme vzájemnou polohu:

a) něco obsaženo v něčem:

- $A_r \subset A_s$ ... incidentní
  potom nutně $V_r \subset V_s$
- $V_r \subset V_s$
  - nemají spol. bod $\Rightarrow$ rovnoběžné různé
  - mají spol. bod $\Rightarrow$ už nutně $A_r \subset A_s$ (tj. incidentní)

  protože: $C \in A_r$, $C \in A_s$
  $A_r = \{C + \vec{u}, \vec{u} \in V_r\}$ $\quad A_s = \{C + \vec{v}, \vec{v} \in V_s\}$
  $V_r \subset V_s \Rightarrow A_r \subset A_s$

b) neobsaženo:

(tj. $A_r \not\subset A_s$ a $V_r \not\subset V_s$)

- $A_r \cap A_s \neq \emptyset$ a nejsou incidentní ... naz. různoběžné
  (rovnob. různé vyloučeno: $V_r \not\subset V_s$)
- $A_r \cap A_s = \emptyset$ a nejsou rovnoběžné ... naz. mimoběžné

---

def. Řík., že podP A_r, A_s jsou
- incidentní – $A_r \subset A_s \lor A_s \subset A_r$
- rovnoběžné – $V_r \subset V_s \lor V_s \subset V_r$
- různoběžné – $A_r \cap A_s \neq \emptyset$ a nejsou incidentní
- mimoběžné – $\underbrace{A_r, A_s \text{ nejsou ani různoběžné}}_{A_r \cap A_s = \emptyset}$, ani rovnoběžné ~~a nejsou rovnoběžné~~

Incidence

$A_r \subset A_s \iff A \in A_s \land \underbrace{V_r \subset V_s}_{}$ ... tím popsány incidentní podP

tj. incidentní podP jsou rovnoběžné

Rovnoběžnost

- neincidentní rovnoběžné podP nemají spol. bod

pokud by měly spol. bodi $C \in A_r$, $C \in A_s$ a $V_r \subset V_s$ $\Rightarrow$ $A_r = C + V_r$, $A_s = C + V_s$ $\quad V_r \subset V_s \Rightarrow A_r \subset A_s$
tj. byly by už incidentní

(tj.: rovnoběžné mající spol. bod jsou už incidentní)

Různoběžnost

Př.: průnik rovin – přímka – což je podP   ukážeme, že průnik je af. podP

úvaha: $A_r \cap A_s \neq \emptyset \iff \exists C; \begin{matrix} C \in A_r \\ C \in A_s \end{matrix}$, tj. $\begin{matrix} C = A + \vec{u}, & \vec{u} \in V_r \\ C = B + \vec{v}, & \vec{v} \in V_s \end{matrix}$ tj. $\begin{matrix} A + \vec{u} = B + \vec{v} \\ A - B = \vec{v} - \vec{u} \end{matrix}$ tj. $A-B$ je LK vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$

tj. je neprázdný

odtud plyne:

V1/ $A_r \cap A_s \neq \emptyset \iff \exists \vec{u} \in V_r$ a $\exists \vec{v} \in V_s$; $A - B = \vec{u} + \vec{v}$

V1'/ $A_r \cap A_s \neq \emptyset \iff A - B$ je LK vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$

platí obecně, nejen pro různob.

V2/ A_r, A_s různoběžné $\Rightarrow A_r \cap A_s$ je podP se zaměřením $V_r \cap V_s$

důk. ověříme podm. z def. af. podP

1) $\underbrace{\forall X, Y \in A_r \cap A_s}$: $Y - X \in V_r \cap V_s$

$\Rightarrow \begin{matrix} X, Y \in A_r \\ X, Y \in A_s \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Y - X \in V_r \\ Y - X \in V_s \end{matrix} \Rightarrow Y - X \in V_r \cap V_s$

2) $\underbrace{\forall X \in A_r \cap A_s \ \forall \vec{u} \in V_r \cap V_s}$: $X + \vec{u} \in A_r \cap A_s$

$\Rightarrow \begin{matrix} X \in A_r, \vec{u} \in V_r \\ X \in A_s, \vec{u} \in V_s \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X + \vec{u} \in A_r \text{ (ano, } A_r \text{ je totiž podP)} \\ X + \vec{u} \in A_s \quad -\text{||}- \end{matrix} \Rightarrow X + \vec{u} \in A_r \cap A_s$

V2'/ V2 lze zobecnit na průnik k podprostorů, které mají neprázdný průnik
tento průnik je ApodP se zaměřením $V_1 \cap \dots \cap V_k$

Mimoběžnost

- z charakterizace rovnob. a různob. podP $\Rightarrow$ charakterizace mimob.
- z def.: mimob. nemají spol. bod
  jedno zaměření neobsahuje druhé
- lze je klasifikovat podle toho, kolik ~~dimenzí~~ mají ~~spo~~ zaměření společných „dimenzí"

  tj. dle $\dim(V_r \cap V_s)$

  ve 3D: jen mimob. přímky (nemají společný směr, jinak by byly rovnob.)   1 dimenze musí zbýt na $A-B$ jinak by měly spol. bod

  ve 4D: mimob.: přímka a rovina
  rovina a rovina (1 spol. směr)