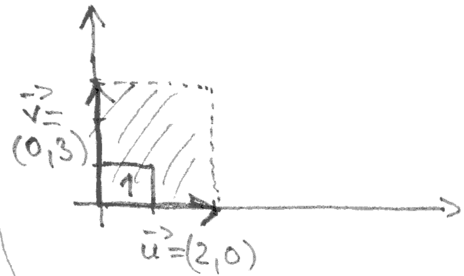
Determinant

geometrický význam

$\vec{u} = (2,0)$

$\vec{v} = (0,3)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$$



$\boxed{\text{obsah rovnoběžníku určeného vektory v řádcích (sl.)}}$

- z obr. $\Rightarrow$ $S_{\square} = \det$

- platí i ve 3D a obecně i pro det řádu n

$\boxed{|\det| = \text{objemu rovnoběžnostěnu určeného } n \text{ (LNZ) vektory}}$

ano, ale relativně vůči rovnoběžnostěnu určeného bází

(LZ $\Rightarrow$ det = 0)

$\boxed{\text{znaménko určuje orientaci báze}}$

- pozor: při změně báze se může změnit obsah

aby det vyjadřoval geom. vlastnost n vektorů v E_n,

tak by musel být nezávislý na volbě báze

~~žádáme po bázi~~

aby det = objemu, tak je nutné zbavit se (relativnosti) vůči bázi

vlivu báze

chceme to sladit se standardním objemem

tj. po bázi musíme žádat:

- jednotkové vektory
- na sebe kolmé

$\Big\}$ $\Rightarrow$ určují jednotkový útvar, jedn. čtverec, jedn. krychli, ...

- kladné orientace $\Rightarrow$ det > 0

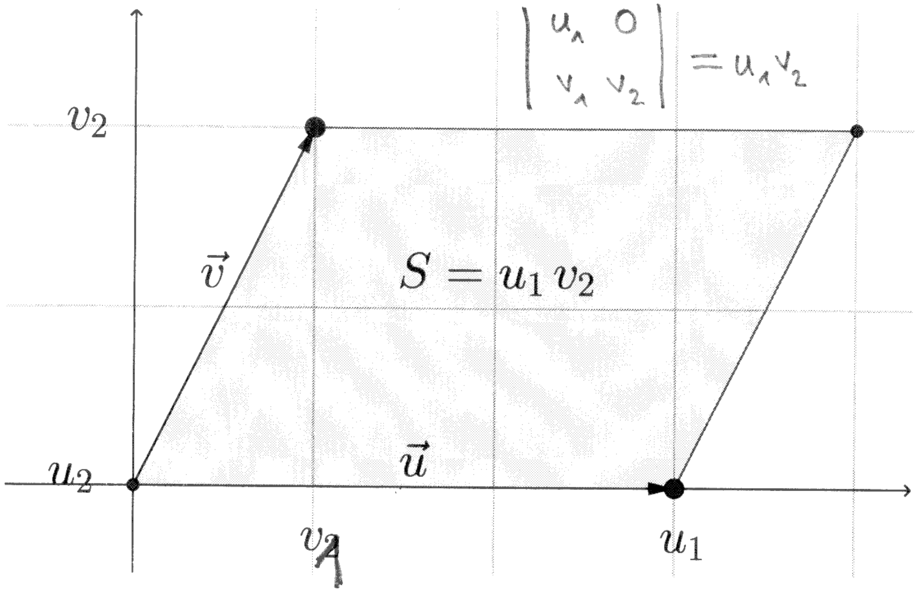
tj. kladná ortonormální báze

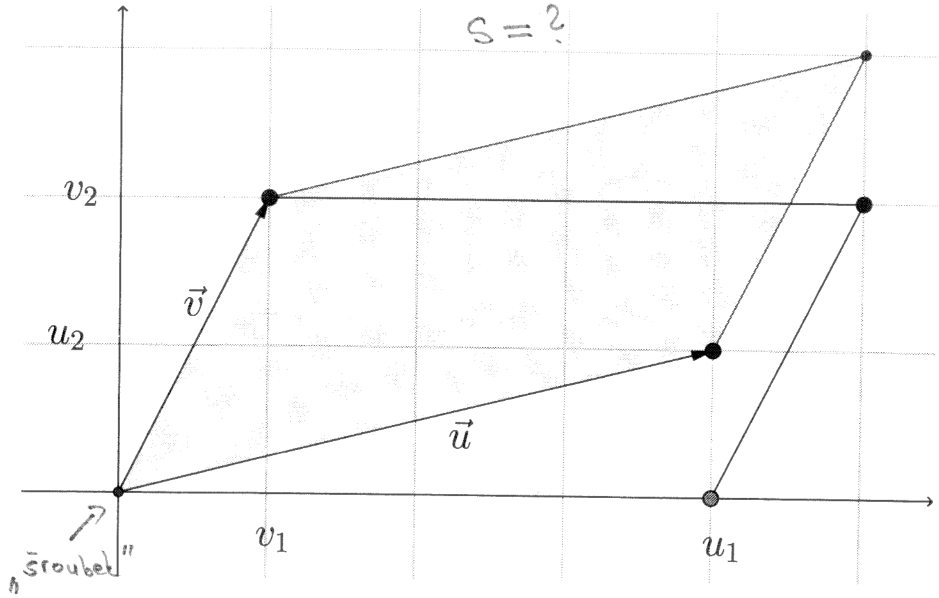
Determinanty

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

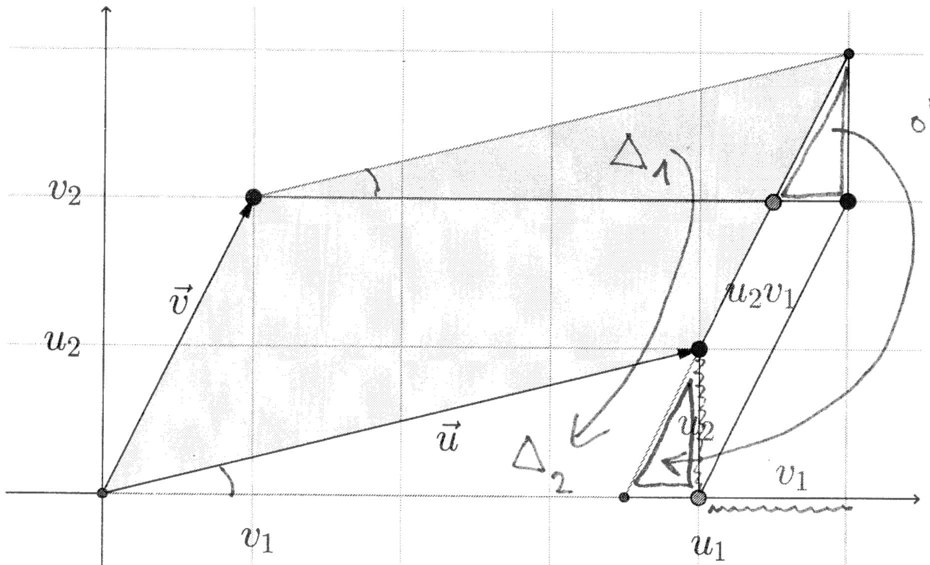
$S = ?$

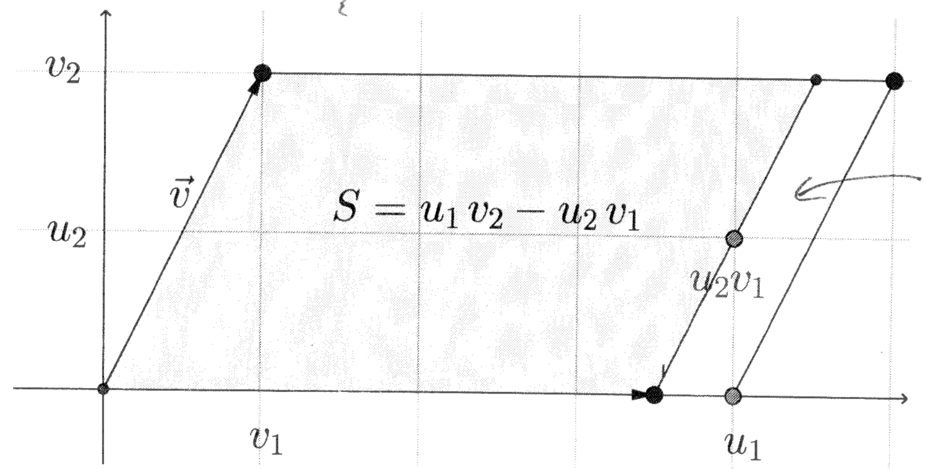
$$\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2$$





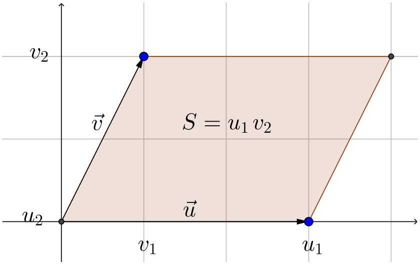
obsah bílého rovnob. $= u_2 \cdot v_1$

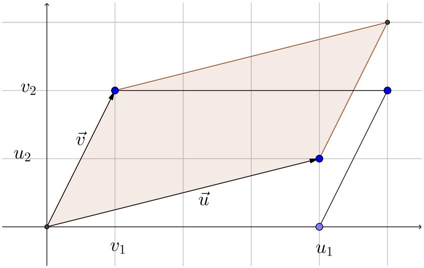


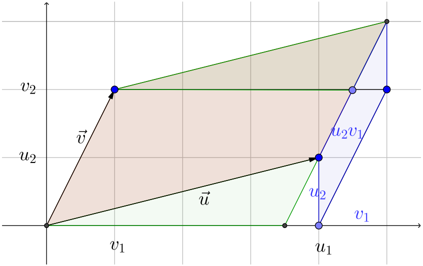


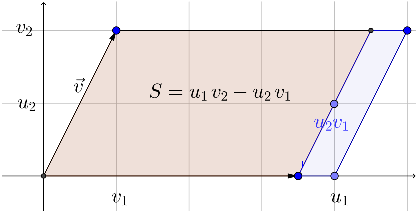
$\Delta_1 \simeq \Delta_2$, tj. Δ_1 můžeme přesunout na místo Δ_2

Determinanty









- V_n ... orientovaný VP se skal. součinem

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ... kladná ortonormální báze

vezměme n vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V_n$ (řádky v det)

$$\vec{v}_i = v_{i1}\vec{b}_1 + v_{i2}\vec{b}_2 + \dots + v_{in}\vec{b}_n$$

tj. $\langle \vec{v}_i \rangle_B = (v_{i1}, \dots, v_{in})$

def. vnější součin vektorů $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] := \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

- def. je korektní (tj. nezávislá na volbě kladné ONB)

vezmeme 2 kladné ONB: B, B'

$\langle \vec{v}_i \rangle_B = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ $\qquad \langle \vec{v}_i \rangle_{B'} = (v'_{i1}, v'_{i2}, \dots, v'_{in})$

ověřme, že $\begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & & \dots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v'_{11} & \dots & v'_{1n} \\ \dots & & \dots \\ v'_{n1} & \dots & v'_{nn} \end{vmatrix}$

$\langle \vec{v}_i \rangle_{KB} = P_{B,KB} \langle \vec{v}_i \rangle_B$ $\qquad P_{B,KB} = \left(\langle \vec{b}_1 \rangle_{KB} \middle| \langle \vec{b}_2 \rangle_{KB} \middle| \dots \middle| \langle \vec{b}_n \rangle_{KB} \right)$

$\langle \vec{v}_i \rangle_{KB} = P_{B',KB} \langle \vec{v}_i \rangle_{B'}$ $\qquad = B$

$$P_{B',KB} = B'$$

B, B' ... kladné, ONB $\Rightarrow$ $\det B = +1$

$\det B' = +1$

$$B \cdot \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & & v_{nn} \end{pmatrix} = \left(\langle \vec{v}_1 \rangle_{KB} \middle| \langle \vec{v}_2 \rangle_{KB} \middle| \dots \middle| \langle \vec{v}_n \rangle_{KB} \right)$$

$$B' \cdot \begin{pmatrix} v'_{11} & \dots \\ \dots & v'_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots \\ & \ddots \\ \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} = B' \cdot \begin{pmatrix} v'_{11} & \cdots \\ & \ddots \\ \cdots & v'_{nn} \end{pmatrix} \quad /\det$$

$$\underbrace{\det B}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots \\ & \ddots \\ \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\det B'}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} v'_{11} & \cdots \\ & \ddots \\ \cdots & v'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} v_{11} & \cdots \\ & \ddots \\ \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v'_{11} & \cdots \\ & \ddots \\ \cdots & v'_{nn} \end{vmatrix}$$

tj. det nezávisí na volbě kladné ONB $\square$

---

vlastnosti vnějšího součinu:

plynou z vlastností determinantů

- jeden z vektorů $\vec{v}$ nahradíme $c \cdot \vec{v}$ $\Rightarrow$ c lze vytknout před vnější součin
- jeden vektor je ve tvaru $\vec{u} + \vec{v}$ $\Rightarrow$

$$[\vec{v}_1, \dots, \underbrace{\vec{u} + \vec{v}}_{\vec{v}_i}, \dots, \vec{v}_n] = [\vec{v}_1, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{v}_n] + [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{v}_n]$$

- zaměníme-li 2 vektory $\Rightarrow$ $[\dots]$ změní znaménko
- obecněji: permutujme vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ permutací $p \in S_n$:

$$[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] = \operatorname{sgn} p \cdot [\vec{v}_{p(1)}, \vec{v}_{p(2)}, \dots, \vec{v}_{p(n)}]$$

- vektory LZ $\Leftrightarrow$ $[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] = 0$

• $|\text{vnější součin}|$ = ~~obsahu~~ objemu rovnoběžnostěnu

definován v n-rozměrném prostoru pro právě $\underline{\underline{n}}$ vektorů

lze tedy: objem rovnoběžnostěnu ve 3D

obsah rovnoběžníku ve 2D

délka úsečky v 1D

• nelze: ?! obsah rovnoběžníku ve 3D ?!

• pozorujme:

$$[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n]^2 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v_{11}^2 + v_{12}^2 + \dots + v_{1n}^2 & \underbrace{v_{11}v_{21} + v_{12}v_{22} + \dots + v_{1n} \cdot v_{2n}}_{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} & \dots \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_n \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_n \\ \dots & & & \\ \vec{v}_n \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_n \cdot \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n \end{vmatrix}}_{\text{Gramova matice}} \dots \text{Gramův determinant}$$

gramián

- ve 3D $\underbrace{\text{2 vektory}}$ $\Rightarrow$ rovnoběžník

$\vec{v}_1 = (3, -1, 0)$
$\vec{v}_2 = (0, 1, -2)$

symetrická matice
det ≥ 0

$$G(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \end{vmatrix} = S_{\square}^2$$

$$\boxed{S_{\square} = \sqrt{G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}}$$

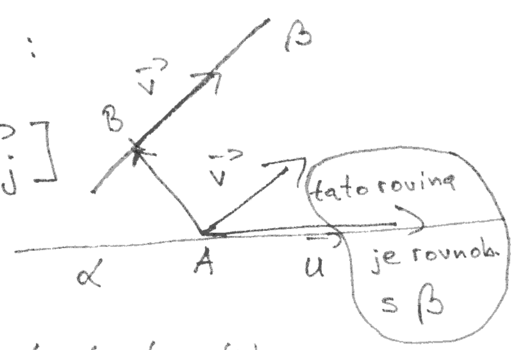
- jen na základě analogie:

> objem k-rozměrného rovnoběžnostěnu ($\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$)
> v n-rozměrném prostoru
>
> je roven:
>
> $$\sqrt{G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)}$$

- <u>aplikace:</u>

vzdálenost 2 lib. podprostorů:

$\alpha = [A; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$ $\beta = [B; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j]$



$$\boxed{d(\alpha, \beta) = \frac{\text{objem celého rovnoběžnostěnu}}{\text{obsah podstavy}}}$$

(jeho)

zajímá nás výška rovnoběžnostěnu:
je totiž rovna $d(\alpha, \beta)$
(vzdálenosti roviny od β || s rovinou)

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{G(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, B-A)}{G(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j)}}$$

! vyřadit LZ vektory!