Drobnosti k vzdálenostem podprostorů

- vzdálenost bodu A od nadroviny $\beta = [Q; \vec{u}, \vec{v}]$ v $\mathbb{E}_k$

$$\beta: \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$$

- obecná rovnice nadroviny: (vsuvka)

v LSS:
$$\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$$
$$X = [x_1, \dots, x_k]$$
$$Q = [q_1, \dots, q_k]$$

$$(n_1, \dots, n_k) \cdot (x_1 - q_1, \dots, x_k - q_k) = 0$$

$$n_1(x_1 - q_1) + \dots + n_k(x_k - q_k) = 0$$

$$n_1 x_1 + \dots + n_k x_k + \underbrace{(-n_1 q_1 - n_2 q_2 - \dots - n_k q_k)}_{n_{k+1}} = 0$$

$$\boxed{n_1 x_1 + \dots + n_k x_k + n_{k+1} = 0}$$ obec. rovnice nadroviny v $\mathbb{E}_k$

ve 3D: $\vec{n} = (a, b, c)$, $X = [x, y, z]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$ $\Rightarrow$ $\vec{n} \cdot (X - Q) = 0$

$$ax + by + cz + d = 0$$

obecná rovnice roviny ve 3D

- zpět k vzdál. bodu A od nadroviny $\beta: \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$ v $\mathbb{E}_k$

ve zvolené LSS:
$$\vec{n} = (n_1, \dots, n_k)$$
$$Q = [q_1, \dots, q_k] \qquad \beta: n_1 x_1 + \dots + n_k x_k + n_{k+1} = 0$$
$$A = [a_1, \dots, a_k]$$

$$\boxed{d(A, \beta) = \frac{|\vec{n} \cdot (A - Q)|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|n_1 a_1 + \dots + n_k a_k + n_{k+1}|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2}}}$$

ve 3D: $\beta: ax + by + cz + d = 0$

$$d(A, \beta) = \frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Transferová věta

$$\alpha = [A; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k] \qquad \beta = [B; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j]$$

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{G(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, B-A)}{G(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j)}}$$

vidíme: $d(\alpha, \beta)$ nezávisí na tom, které vektory jsou v zaměření α a které jsou v zaměření β

tj. $\gamma = [A; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j] \quad B$

$$\boxed{d(\alpha, \beta) = d(\gamma, B) = d([A; \vec{u}_1, \vec{v}_1], [B; \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_j])}$$

- Aplikace: vzdálenost 2 mimoběžek $p = [P; \vec{u}]$ $q = [Q; \vec{v}]$

$$\cancel{d(p,q} \; d(p,q) = d(\underbrace{[P; \vec{u}, \vec{v}]}_{\alpha}, Q]$$

vzdálenost bodu od roviny v $\mathbb{E}_3$:

tj. $$\boxed{d(\alpha, Q) = \frac{|\vec{n} \cdot (Q-P)|}{\|\vec{n}\|}}$$

$$\alpha = [P; \vec{u}, \vec{v}] \implies \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

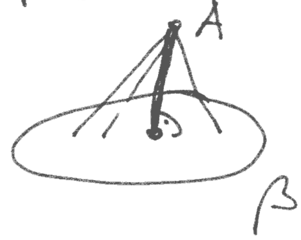
$$\alpha: \vec{n} \cdot (X - P) = 0$$

Hledejme minimum pomocí derivací, najdeme tak např. vzdálenost bodu od podpr.:

- $d(A, \beta) := \min \{ |AX| , X \in \beta \}$

např. (pro jednoduchost):

ve 3D: vzdálenost bodu od roviny:



$$\beta: \quad X = B + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 \quad , t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\min_{X \in \beta} \| X - A \| = \min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \| B + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 - A \| =$$

$B = [b_1, b_2, b_3]$

$A = [a_1, a_2, a_3]$

$\vec{v}_1 = [v_{11}, v_{12}, v_{13}]$

$\vec{v}_2 = [v_{21}, v_{22}, v_{23}]$

$$= \min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \sqrt{(b_1 - a_1 + t_1 v_{11} + t_2 v_{21})^2 + (b_2 - a_2 + t_1 v_{12} + t_2 v_{22})^2 + (b_3 - a_3 + t_1 v_{13} + t_2 v_{23})^2}$$

$y = \sqrt{x}$

⇓

na min „nemá vliv"

tj. $$\min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \sqrt{\sum ()^2} = \sqrt{\min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \sum ()^2}$$

tj.: hledáme t_1, t_2, pro něž je min nabýváno;

derivace podle t_1 $= 0$ (a t_2 beru jako konst.)

der. $\sum ()^2$ podle $t_2 = 0$ (t_1 beru jako konst.)

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i})^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i})^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} 2 \cdot (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i}) \cdot v_{1i} = 0 \qquad : 2$$

$$\sum_{i=1}^{3} 2 \cdot (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i}) \cdot v_{2i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[(b_i-a_i)\cdot v_{1i} + t_1\cdot v_{1i}\cdot v_{1i} + t_2 v_{2i}\cdot v_{1i}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[(b_i-a_i) v_{2i} + t_1 v_{1i} v_{2i} + t_2 v_{2i}\cdot v_{2i}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}(b_i-a_i)\cdot v_{1i} + t_1\sum_{i=1}^{3} v_{1i} v_{1i} + t_2\cdot\sum_{i=1}^{3} v_{2i}\cdot v_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}(b_i-a_i) v_{2i} + t_1\sum_{i=1}^{3} v_{1i} v_{2i} + t_2\sum_{i=1}^{3} v_{2i} v_{2i} = 0$$

$$(B-A)\cdot\vec{v}_1 + t_1\cdot\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$$

$$(B-A)\vec{v}_2 + t_1\vec{v}_1\vec{v}_2 + t_2\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 = 0$$

---

hledáme t_1, t_2

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\cdot t_1 + \vec{v}_1\vec{v}_2\, t_2 = (A-B)\cdot\vec{v}_1$$
$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\, t_1 + \vec{v}_2\vec{v}_2\, t_2 = (A-B)\cdot\vec{v}_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & (A-B)\cdot\vec{v}_1 \\ \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 & (A-B)\cdot\vec{v}_2 \end{array}\right)$$

Cramer: $t_1 = \dfrac{G_1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}$

$$t_2 = \frac{G_2}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}$$

$$\boxed{d(A,\beta) = \sqrt{\frac{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2,B-A)}{G(\vec{v}_1\,\vec{v}_2)}}}$$

vidíme vznik Gramových determinantů

(pro získání známého vzorce by bylo třeba to dopočítat:)

dosadíme vypočtené hodnoty

$$d(A,\beta) = \min_{X\in\beta}\|X-A\| = \|B-A+t_1\vec{v}_1+t_2\vec{v}_2\| = \underline{\underline{\left\|B-A+\frac{G_1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\cdot\vec{v}_2\right\| = \ldots}}$$

Pro zajímavost dopočítáno:

$$d(A,\beta) = \min_{X\in\beta} \|X-A\| = \Big\| \underbrace{B - A + \frac{G_1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\cdot\vec{v}_2}\Big\|$$

uvědomme si, že vektor je kolmý na β (bod $B + \frac{G_1}{G}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G}\vec{v}_2$ má od A nejmenší vzdálenost, leží tedy na kolmici k β procházející bodem A)

vektor kolmý na β je kolmý na každý vektor zaměření β,

tj. je kolmý na: $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ i na lib. jejich lin. kombinaci $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2$

takže: (ozn.: $G = G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$)

$$\Big\| B-A + \frac{G_1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\vec{v}_2 \Big\|^2 = \Big[(B-A) + \Big(\frac{G_1}{G}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G}\vec{v}_2\Big)\Big]\cdot\Big[B-A+\frac{G_1}{G}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G}v_2\Big]$$

$$= (B-A)\cdot\Big[B-A+\frac{G_1}{G}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G}\vec{v}_2\Big] + \underbrace{\Big(\frac{G_1}{G}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G}\vec{v}_2\Big)\cdot\Big[B-A+\frac{G_1}{G}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G}\vec{v}_2\Big]}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{G}\cdot\Big((B-A)\cdot\big[(B-A)G + G_1\vec{v}_1 + G_2\vec{v}_2\big]\Big) =$$

$$= \frac{1}{G}\cdot\Big((B-A)\cdot(B-A)\cdot G + (B-A)\cdot\vec{v}_1\cdot G_1 + (B-A)\cdot\vec{v}_2\cdot G_2\Big) =$$

$$= \frac{1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\cdot\left((B-A)(B-A)\cdot\begin{vmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 \\ v_2v_1 & v_2v_2\end{vmatrix} + (B-A)\cdot\vec{v}_1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}(A-B)v_1 & v_1v_2 \\ (A-B)v_2 & v_2v_2\end{vmatrix}} + (B-A)\vec{v}_2\underbrace{\begin{vmatrix} v_1v_1 & (A-B)v_1 \\ v_1v_2 & (A-B)v_2\end{vmatrix}}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix}(B-A)v_1 & v_1v_2 \\ (B-A)v_2 & v_2v_2\end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} v_1v_2 & (B-A)v_1 \\ v_2v_2 & (B-A)v_2\end{vmatrix}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} v_1v_1 & (B-A)v_1 \\ v_1v_2 & (B-A)v_2\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\cdot\begin{vmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1(B-A) \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2(B-A) \\ (B-A)v_1 & v_2(B-A) & (B-A)(B-A)\end{vmatrix} = \frac{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2,B-A)}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)} = \|\cdot\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$d(A,\beta) = \min_{X\in\beta}\|X-A\| = \sqrt{\frac{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2,B-A)}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}}$$

Hledání vektoru kolmého na zadané vektory

• $\mathbb{R}^2$, zadán $\vec{u}=(u_1,u_2)$ najděme $\vec{w}=(w_1,w_2)$; $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

$[\vec{u}]^{\perp}=?$

$=[\vec{w}]$

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 = 0$$

např.: $w_1 \to -u_2$, $w_2 \to u_1$

$$\vec{w} = \underline{\underline{(-u_2, u_1)}} \perp \vec{u}$$

• v $\mathbb{R}^3$: zadány LNZ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ najděme $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$; $\vec{u}\perp\vec{w}$ a $\vec{v}\perp\vec{w}$

$[\vec{u},\vec{v}]^{\perp}=?$

$=[\vec{w}]$

tj. $\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \text{ a } \vec{v}\cdot\vec{w}=0}$

vzhl. ke kartézské soust. s.

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0$$
$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{array}\right)$$ řešme soustavu:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\cdot v_1 \\ \cdot u_1\end{array} \sim \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ v_1 u_1 & v_2 u_1 & v_3 u_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ 0 & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

2ř. − 1ř.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_3 = 0$$

např.: $w_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}$, $w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

dopočítejme w_1:

z 1. rovnice:

$$u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3 = 0$$

$$u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot (-u_1 v_3 + u_3 v_1) + u_3 \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$

$$u_1 \cdot w_1 - u_1 u_2 v_3 + \cancel{u_2 u_3 v_1} + u_1 u_3 v_2 - \cancel{u_2 u_3 v_1} = 0$$

$$u_1 \cdot (w_1 - u_2 v_3 + u_3 v_2) = 0$$

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

tj.:

$$\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3$$

až na nenulový násobek

pomůcka pro zapamatování:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

vypadá to jako rozvoj determinantu:

formálně tedy pišme: $$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \vec{w}$$

- co jsme získali? bin. operaci na $\mathbb{R}^3$: 2 vektorům $\vec{u}, \vec{v}$ přiřadí $\vec{w}$

Jak se tato operace chová vůči jiným operacím v. $\mathbb{R}^3$?

z def. vektorového prostoru známe jedinou: $\underline{\underline{\vec{a}+\vec{b}}}$

(1)

Najděme $\vec{w}$ k vektorům $\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{w} = \text{"}\begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\vec{a}+\vec{b}} \\ \multicolumn{3}{c}{\vec{c}} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}\text{"} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

vůči sčítání vektorů se chová distributivně

$\Downarrow$

naz. součin

ozn. $\times$ (• už je obsazena pro skal. součin)

(2) Je tento součin komutativní?

$$\text{"}\begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\vec{u}} \\ \multicolumn{3}{c}{\vec{v}} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}\text{"} = - \text{"}\begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\vec{v}} \\ \multicolumn{3}{c}{\vec{u}} \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}\text{"} \Rightarrow \text{není kom.}$$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ ... vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (v tomto pořadí)

Vektorový součin II

při hledání vektoru $\vec{w}$ kolmého na 2 LNZ vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v R^3 jsme dospěli k:

$$\vec{w} = \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{w_1} \vec{e}_1 - \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{w_2} \vec{e}_2 + \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{w_3} \vec{e}_3 ,$$

což jsme formálně zapsali ve tvaru $\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$, kde $(u_1, u_2, u_3) = \langle \vec{u} \rangle_B$

$(v_1, v_2, v_3) = \langle \vec{v} \rangle_B$

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ je kladná ONB

tento tvar má výhody i nevýhody:

- výhoda: pěkný, snadno zapamatovatelný tvar, zkrátka jeden determinant s přehlednou strukturou
- nevýhoda: det je pouze formálně sestaven, mísí se v něm reálná čísla a vektory, což není správné: det. je definován nad okruhem (tj. jeho prvky mají být z jediného okruhu)

Idea: zachovejme výhodu, odstraňme nevýhodu

tj. zapišme vektorový součin matematicky čistě

Jak na to? Musíme odstranit vektory $\vec{e}_i$ a „udělat z nich skaláry", ale tak, abychom nic podstatného neporušili.

tip: skalární součin ...

vezměme lib. $\vec{x} \in R^3$ $\langle \vec{x} \rangle_B = (x_1, x_2, x_3)$

tj. $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_1 = x_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{1} + x_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0} + x_3 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}_{0} = x_1$$

B je ONB, tj. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_2 = x_2$$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = x_3$$

tj. $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_2 x_3$

neboli $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in R^3$

V/ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \ \exists! \vec{w} \in V_3 ; \quad \forall \vec{x} \in V_3 : [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x}$

- def. tento vektor $\vec{w}$ naz. vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, píšeme: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$
- důkaz: zvolme ve V_3 kladnou ortonormální bázi B, vzhledem k ní: $\langle \vec{u} \rangle_B = (u_1, u_2, u_3)$

$\langle \vec{v} \rangle_B = (v_1, v_2, v_3)$

$\langle \vec{x} \rangle_B = (x_1, x_2, x_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{w_1} - x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{-w_2} + x_3 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{w_3}$$

ozn.:

Při tomto značení je $= x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = \vec{x} \cdot \vec{w}$ $\Rightarrow$ našli jsme jediné $\vec{w}$ vyhovující podmínce $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x} \ \forall x \in V_3$

souřadnice tohoto jediného $\vec{w}$ jsou $\langle \vec{w} \rangle_B = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$

našli jsme jediné souřadnice vektoru $\vec{w}$ vyhovující podm. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x} \quad \forall x \in V_3$,

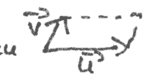
$\exists$ tedy jediný takový vektor $\vec{w}$

- výhoda: definici vektorového součinu lze snadno rozšířit do V_n na základě této věty:

V/ $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1} \in V_n \quad \exists! \, \vec{w} \in V_n; \quad \forall \vec{x} \in V_n : [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x}$

píšeme: $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \dots \times \vec{v}_{n-1}$ pozor: už to není binární operace

---

- Na SŠ se vektorový součin definuje jako vektor
  - kolmý na $\vec{u}, \vec{v}$ (LNZ)
  - jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku 
  - orientace: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ tvoří kladnou bázi
    tj. souhlasnou s bází kartézskou

ověřme, že námi def. vekt. součin tyto podmínky splňuje:

- $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ LNZ $\Rightarrow$ $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$, protože:

  z def.: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{x} \quad \forall x \in V_3$

  $$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0$$

  v det. jsou LZ řádky

  $$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0$$

- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = S_{\square}$

  zvolme ve V_3 kladnou ONB tak,
  aby: $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{u} \times \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{a}_3$
  rovina $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ byla totožná s rovinou $[\vec{u}, \vec{v}]$

důk.: $\vec{u} = u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2$, $\vec{v} = v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ zde nefiguruje, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ leží v rovině $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$

$u_3, v_3 = 0$

B je kladná ONB $\Rightarrow$ $[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

$$\langle \vec{u} \times \vec{v} \rangle_B = \left(\begin{vmatrix} u_2 & 0 \\ v_2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ v_1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

tj. $\vec{u} \times \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{a}_3$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{a}_3\| = |[\vec{u}, \vec{v}]| \cdot \underbrace{\|\vec{a}_3\|}_{1 \text{ (ONB)}} = |[\vec{u}, \vec{v}]| = S_{\square}$$

- $\vec u, \vec v, \vec u \times \vec v$ tvoří $\underbrace{\text{kladnou bázi}}_{\text{tj. bázi souhlasnou s kartézskou bází}}$: (pro $\vec u, \vec v$ LNZ)

matice přechodu od báze $\{\vec u, \vec v, \vec u \times \vec v\}$ k bázi kartézské: $\left(\vec u \,\vdots\, \vec v \,\vdots\, \vec u \times \vec v \right)$

její determinant $= [\vec u, \vec v, \vec u \times \vec v]$ $\cancel{= (\vec u \times \vec v)\cdot \vec x}$

$= (\vec u \times \vec v) \cdot (\vec u \times \vec v) =$ (za $\vec x$ dosazeno $\vec u \times \vec v$)

$= \|\vec u \times \vec v\|^2 > 0$

det matice přechodu od báze $\{\vec u, \vec v, \vec u \times \vec v\}$ k bázi kartézské je > 0,

tyto báze jsou tedy souhlasné

Vlastnosti vektorového součinu:

(plynou přímo z vlastností determinantu)

$\forall \vec u, \vec v, \vec u', \vec v' \in V_3$: $\qquad \forall \vec x \in V_3$:

- $\vec u \times \vec v = -(\vec v \times \vec u)$ $\qquad [\vec u, \vec v, \vec x] = \begin{vmatrix} \vec u \\ \vec v \\ \vec x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec v \\ \vec u \\ \vec x \end{vmatrix} = [\vec v, \vec u, \vec x]$

- $(c\vec u) \times \vec v = \vec u \times (c\vec v) = c \cdot (\vec u \times \vec v)$ $\qquad \begin{vmatrix} c\cdot\vec u \\ \vec v \\ \vec x \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} \vec u \\ \vec v \\ \vec x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec u \\ c\cdot\vec v \\ \vec x \end{vmatrix}$

- $\vec u \times \vec v = \vec o \iff \vec u, \vec v$ LZ $\qquad \begin{vmatrix} \vec u \\ \vec v \\ \vec x \end{vmatrix} = 0 \ \forall \vec x \in V_3 \iff \vec u, \vec v$ LZ

- $(\vec u + \vec u') \times \vec v = \vec u \times \vec v + \vec u' \times \vec v$ $\qquad \begin{vmatrix} \vec u + \vec u' \\ \vec v \\ \vec x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec u \\ \vec v \\ \vec x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec u' \\ \vec v \\ \vec x \end{vmatrix}$

- $\vec u \times (\vec v + \vec v') = \vec u \times \vec v + \vec u \times \vec v'$

- $\forall \vec a, \vec b, \vec c, \vec d \in V_3$:

$$(\vec a \times \vec b) \cdot (\vec c \times \vec d) = \begin{vmatrix} \vec a \cdot \vec c & \vec a \cdot \vec d \\ \vec b \cdot \vec c & \vec b \cdot \vec d \end{vmatrix}$$

důk.: přímým výpočtem

pro usnadnění volíme kladnou ONB takovou,

že $\vec a = (\alpha, 0, 0)$

$\vec b = (\beta_1, \beta_2, 0)$

Odchylky 2 podprostorů

- odchylka 2 přímek:

$$p = [P; \vec{u}]$$
$$q = [Q; \vec{v}]$$

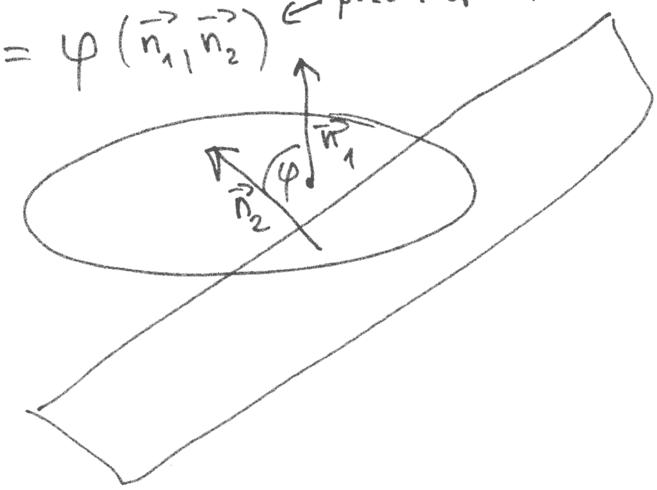
„ten menší úhel" $\Rightarrow$ abs. hodnota

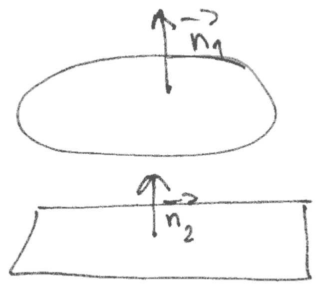
$$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \cos\varphi(p, q)$$

- odchylka 2 nadrovin

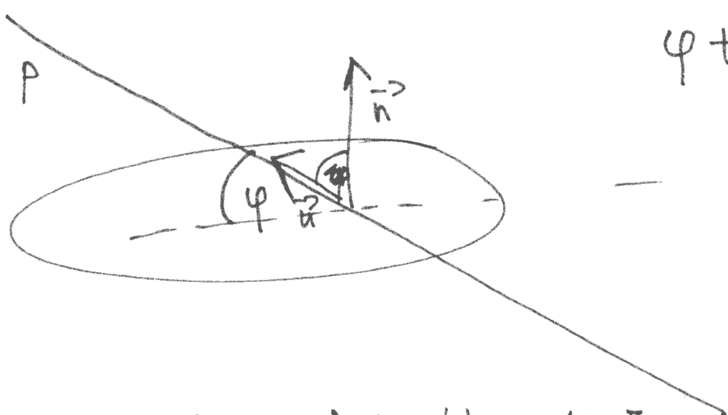
$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$$

← pozor: opět „ten menší úhel", $\underline{\varphi \leq \frac{\pi}{2}}$





- odchylka přímky od nadroviny:



pozor, opět „ten menší ∡", tj. $\leq \frac{\pi}{2}$

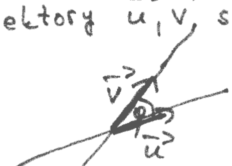
$$\varphi + \varphi(\vec{u}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(p, \alpha) = \frac{\pi}{2} - \varphi(\vec{u}, \vec{n})$$

Pozor: odchylka 2 podprostorů je číslo $\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

- např. odchylka 2 přímek: • pokud jejich směrové vektory $\vec{u}, \vec{v}$, svírají $\overbrace{\text{úhel}}^{\varphi(\vec{u},\vec{v})} \leq \frac{\pi}{2}$,

  tak $\varphi(p, q) = \varphi(\vec{u}, \vec{v})$



  - pokud $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) > \frac{\pi}{2}$, směrové vektory tedy svírají tupý úhel, tak stačí vzít místo jednoho z nich vektor opačný, např. $-\vec{u}$, abychom dostali $\varphi(p, q)$:

$$\varphi(p, q) = \varphi(-\vec{u}, \vec{v})$$

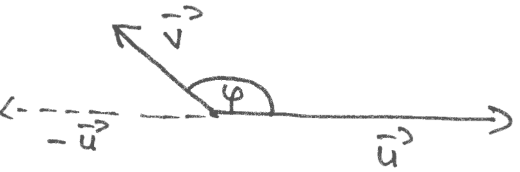
$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\cos(\varphi(\vec{u}, \vec{v})) < 0$

navíc:

$$\cos\varphi(-\vec{u}, \vec{v}) = -\cos\varphi(\vec{u}, \vec{v})$$

- Proč $\cos\varphi(-\vec{u},\vec{v}) = -\cos\varphi(\vec{u},\vec{v})$?



tj. $\boxed{\varphi(-\vec{u},\vec{v}) = \pi - \varphi(\vec{u},\vec{v})}$

Takže:

$$\cos\varphi(-\vec{u},\vec{v}) = \cos\left(\pi - \varphi(\vec{u},\vec{v})\right) \overset{\text{součt. vzorce}}{=} \overbrace{\cos\pi}^{-1} \cdot \cos\varphi(\vec{u},\vec{v}) - \underbrace{\sin\pi}_{0} \cdot \sin\varphi(\vec{u},\vec{v}) =$$

$$= -\cos\varphi(\vec{u},\vec{v})$$

$$\boxed{\cos\varphi(-\vec{u},\vec{v}) = -\cos\varphi(\vec{u},\vec{v})}$$

- Takže: $p = [P; \vec{u}]$, $q = [Q; \vec{v}]$ ... 2 lib. přímky v $\mathbb{E}_n$

a) $\varphi(\vec{u},\vec{v}) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(p,q) = \varphi(\vec{u},\vec{v})$

b) $\varphi(\vec{u},\vec{v}) > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(p,q) = \varphi(-\vec{u},\vec{v})$
nebo lze $\varphi(\vec{u},-\vec{v})$ (je to jedno)

Pro praktické výpočty je výhodnější tento důsledek:

Jelikož $\cos\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$, tak pro $\varphi(\vec{u},\vec{v}) \in \langle 0,\pi\rangle$:

a) $\varphi(\vec{u},\vec{v}) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi(\vec{u},\vec{v}) \geq 0 \Rightarrow \varphi(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

b) $\varphi(\vec{u},\vec{v}) > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi(\vec{u},\vec{v}) < 0 \Rightarrow$ ~~$\varphi(\vec{u},\vec{v}) =$~~
jelikož $-\cos\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \cos\varphi(-\vec{u},\vec{v})$,
$\Downarrow$
vezmeme doplněk do přímého úhlu (π), což je úhel ostrý; jeho cos > 0 $\Rightarrow$ stačí vzít $-\cos\varphi(\vec{u},\vec{v})$

Celkem tedy:

$$\cos\varphi(p,q) = \begin{cases} \cos\varphi(\vec{u},\vec{v}) & \text{pro } \varphi(\vec{u},\vec{v}) \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos\varphi(\vec{u},\vec{v}) & \text{pro } \varphi(\vec{u},\vec{v}) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

takže: $\boxed{\cos\varphi(p,q) = |\cos\varphi(\vec{u},\vec{v})| \quad \forall\, \varphi(\vec{u},\vec{v}) \in \langle 0,\pi\rangle}$

Odchylka dvou lib. přímek $p, q \in E_n$, $p = [P; \vec{u}]$, $q = [Q; \vec{v}]$:

protože: $$\cos \varphi(p, q) = \left| \cos \varphi(\vec{u}, \vec{v}) \right|$$

a
$$\cos \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|},$$

tak:
$$\boxed{\varphi(p, q) = \arccos \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right|}$$