Spojení podprostorů

$\emptyset \neq M = \{A_{r_i} \subset A_n\}$ lib. nepr. mn. podP A_n — hledáme „nejm." podP $\bar{A}$ prostoru A_n obsahující všechny podP z M, tj. podp. obsahující všechny a je nejmenší

1) $\forall A' \in M: \; A' \subset \bar{A}$
2. $A'' \subset A_n;\ (A' \subset A'' \ \forall A' \in M) \Rightarrow \bar{A} \subset A''$
   (tj. A'' splňuje 1)

sjednocení není podprostor

$\exists \bar{A}$? ano, je to průnik všech podP obsahujících všechny podP z M

<u>Def. 2</u> M nepr. množina podprostorů AP A_n. pod P $\bar{A}$ splňující vlastnosti 1, 2 naz. <u>spojení</u> všech podP-ů z mn. M.
Spojení dvou podP A'_r, A''_s ozn. $A'_r \vee A''_s$. Podobně spojení 3 podP A'_r, A''_s, A'''_t ozn. $A'_r \vee A''_s \vee A'''_t$.

jako logické nebo, věty pak budou pěkně vypadat (V3) a z kontextu jasné, nedojde ke kolizím

Konstrukce spojení konečného počtu podP-ů

na příkladu 3 podP: $A'_r = [A'; V'_r]$, $A''_s = [A''; V''_s]$, $A'''_t = [A'''; V'''_t]$

báze: $V'_r = [\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_r]$ $\quad V''_s = [\vec{u}''_1, \dots, \vec{u}''_s]$ $\quad V'''_t = [\vec{u}'''_1, \dots, \vec{u}'''_t]$

$\bar{A}$ obsahuje všechny podP $A'_r, A''_s, A'''_t \Leftrightarrow$ jeho zaměření $\bar{V}$ obsahuje $A''-A'$, $A'''-A'$, $\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_r$, $\vec{u}''_1, \dots, \vec{u}''_s$, $\vec{u}'''_1, \dots, \vec{u}'''_t$
~~a A'~~ a $A' \in A'_r \vee A''_s \vee A'''_t$

Speciální případy spojení

spojení dvou různých bodů — přímka $\overleftrightarrow{AB}$
3 bodů neležících na přímce — rovina
přímka a bod v ní neležící — rovina
2 různoběžky — rovina
2 rovnoběžky — rovina

říkáme ekvivalentně:
- podP $\bar{A}$ je <u>spojením</u> podP-ů z mn. M

nebo
- podP $\bar{A}$ je podprostory z M <u>určen</u>

rovina je určena třemi body, dvěma různoběžkami, …

lze dodef. (bereme-li, v rozporu s naší def., $\emptyset$ za ApodP): $A'_r \vee \emptyset = A'_r$ $\quad \emptyset \vee \emptyset = \emptyset$

<u>V3</u> (str. 35 dole)

1. komut.
4. Asoc.
2. spojení podP-ů A''_t je také podP-em A''_t
3. průnik „nadP-ů" A''_t je také nadP-em A'''_t
5. $(\varrho \cap \sigma) \vee (\varrho \cap p) =$ přímka $\vee \emptyset =$ přímka
   $\varrho \parallel p$
   $\varrho \cap (\sigma \vee p) = \varrho \cap A_3 = \varrho$
6. $p \vee (\varrho \cap \sigma) \subset (p \vee \varrho) \cap (p \vee \sigma)$ — vše různob.
   spojení přímek $\subset A_3 \cap \quad A_3 = A_3$
   rovina $\subset A_3$

6 plyne z 2: $A_1 \subset A_3 \wedge A_2 \subset A_3 \Rightarrow \underline{A_1 \vee A_2 \subset A_3}$,

6: $\underbrace{A_r}_{A_1} \vee \underbrace{(A_s \cap A_t)}_{A_2} \subset \underbrace{(A_r \vee A_s) \cap (A_r \vee A_t)}_{A_3}$

ověřit předpoklady 2:
- $A_r \subset (A_r \vee A_s) \cap (A_r \vee A_t)$ ✓
- $(A_s \cap A_t) \subset (A_r \vee A_s) \cap (A_r \vee A_t)$

pseudodistrib.:
5. $A'_r \cap (A''_s \vee A'''_t) \supset (A'_r \cap A''_s) \vee (A'_r \cap A'''_t)$ — spojuji průniky, tj. menší celky, jsou menší
6. $A'_r \vee (A''_s \cap A'''_t) \subset (A'_r \vee A''_s) \cap (A'_r \vee A'''_t)$
   spojuji s průnikem $\subset$ průnik spojení, ta jsou veliká

Příčka

<u>Def. 3</u> p, q … mimoběžné přímky v A_n
příčka přímek p, q — přímka s nimi různoběžná (různob. s p a různob. s q)

BÚNO: $n = 3$ $\quad \left.\begin{array}{l} p = [A; \vec{u}] \\ q = [B; \vec{v}] \end{array}\right\}$ mimoběžky v A_n

p, q musí ležet v $p \vee q = [A; A-B, \vec{u}, \vec{v}] = $ AP dim 3
a v $(p \vee q)$ musí ležet i každá příčka

<u>Př. 1</u> hledejme příčku ~~směru~~ $\vec{w}$, aby měla zaměření $[\vec{w}]$

① $p = [A; \vec{u}]$ $\quad q = [B; \vec{v}]$ $\quad r$ … příčka
$[\vec{u}] \neq [\vec{w}] \wedge [\vec{v}] \neq [\vec{w}]$ $\quad r \nparallel p \wedge r \nparallel q \Rightarrow r \in \varrho = [A; \vec{u}, \vec{w}] \wedge r \in [B; \vec{v}, \vec{w}] \Rightarrow r \in \varrho \cap \sigma$

p, q mimoběžné $\Rightarrow \varrho \neq \sigma$ ~~různé~~

kdyby $\varrho \parallel \sigma$ (je možné) $\Rightarrow \vec{w} \in [\vec{u}, \vec{v}]$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LZ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{neex. řeš.}}$

$\varrho \nparallel \sigma$, tj. $\vec{w} \notin [\vec{u}, \vec{v}]$, tj. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LNZ $\Leftrightarrow \varrho \cap \sigma$ je přímka se zaměř. $[\vec{w}]$ — tj. hledaná příčka r
tedy: $\exists!$ řeš. $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LNZ

1.5. Vyjádření podprostoru rovnicemi

- lin. forma $f: V \to R$ $\quad \dim \operatorname{Ker} f + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{1 \text{ pro } f \neq 0 \text{ nenulovou LF}} = n$ $\quad$ dle věty o hodnosti a defektu hom.

$\dim \ker f = n-1$ ... tj. LF lze použít pro popis nadroviny

- $d(f) = n-1$ také plyne z teorie soustav:

$f(\vec{x}) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ $\quad \ker f: \; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$

$n-1$ param. (1 rov. o n nezn.) $\Rightarrow$ mn. řeš. homog. soust. je podpr. dim $\underline{\underline{n-1}}$

- A'_{n-1} nadrovina A_n

$A'_{n-1} = [R; V'_{n-1}]$ $\quad A_n = [P; V_n]$

k danému V'_{n-1} $\exists!$ (až na c-násobek, $c \neq 0$) lin. forma $f: V_n \to R$; $\operatorname{Ker} f = V'_{n-1}$

Kdy $X \in A'_{n-1}$? $\iff X - R \in V'_{n-1}$, tj. $\boxed{f(X-R) = 0}$

$\underline{\text{def.}}$ obecná rovnice nadroviny

- korektnost def.: nezávislost na bodu $R \in A'_{n-1}$

$Q \neq R \in A'_{n-1} \Rightarrow f(X-Q) = f((X-R)+(R-Q)) = f(X-R) + \underbrace{f(R-Q)}_{0, \text{ neboť } Q, R \in A'_{n-1}, \text{ tj. } R-Q \in V'_{n-1}} = f(X-R)$

- z předch. 2 bodů: každá nadrovina má svou rovnici
a obráceně: každá rovnice reprezentuje nadrovinu:

$\underline{\text{V1}}$/ f nenul. LF na V_n
$R \in A_n$
$\Rightarrow \{X \in A_n;\; f(X-R) = 0\}$ je nadrovina v A_n

důk. – z předch. úvah:

$f \neq 0 \Rightarrow \ker f = V'_{n-1}$
(je podprostor dim $n-1$)

- Jak vypadá obecná rovnice nadroviny v dané LSS? $\quad \boxed{f(X-Q) = 0}$

v A_n máme LSS L určenou repérem $R = \langle P; \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \rangle$ $\quad X \underset{R}{=} [x_1, \ldots, x_n]$, $Q = [q_1, \ldots, q_n]$

$X - Q = [x_1 - q_1, \ldots, x_n - q_n]$

neboli:

$X - Q = (x_1 - q_1)\vec{u}_1 + \ldots + (x_n - q_n)\vec{u}_n \quad / f$

$$f(X-Q) = (x_1-q_1)\underbrace{f(\vec{u}_1)}_{a_1} + \ldots + (x_n-q_n)\underbrace{f(\vec{u}_n)}_{a_n} = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \underbrace{- a_1q_1 - \ldots - a_nq_n}_{a_{n+1}} =$$

$$= a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}$$

obec. rov. nadroviny v dané LSS:

$$\boxed{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0}$$

$\boxed{f(X-R)=0}$

$f \longleftrightarrow$ nadrovina

- dána nenul. f $\quad f(X-R)=0$ je obec. rov. nadroviny

  její zaměření je $\mathrm{Ker} f$

  $$X-R \in \mathrm{Ker} f \iff X \in A'_{n-1} = [R; V'_{n-1}]$$

  $$X = R + t_1\vec{u}_1 + \ldots + t_{n-1}\vec{u}_{n-1}$$

- dána nadrovina $A'_{n-1} = [R; V'_{n-1}]$

  $$X = R + t_1\vec{u}_1 + \ldots + t_{n-1}\vec{u}_{n-1}$$

  najděme LF f

  f dána obrazy bázových vektorů

  formu zadáme obrazy báz. vektorů

  ~~nabon předepsat~~ chceme: $V'_{n-1} = \mathrm{Ker} f$, tj. $f(\vec{u}_i)=0 \quad i=1,\ldots,n-1$

  $$X-R = t_1\vec{u}_1 + \ldots + t_{n-1}\vec{u}_{n-1} \quad / f$$

  $$f(X-R) = t_1 \underbrace{f(\vec{u}_1)}_{0} + \ldots + t_{n-1}\underbrace{f(\vec{u}_{n-1})}_{0} = 0$$

  $f(\vec{u}_n) =$ nenulové číslo

  (forma je nenul.)

  $\Downarrow$

  nejednoznačnost až na násobek

  jinak rovnice jednoznačná

  našli jsme f!

  ~~$f(\vec{x})=$~~

  [všechny f, které mají $\mathrm{Ker} f = V'_{n-1}$:

  $$f(\vec{x}) = \underset{\substack{\downarrow \\ f(\vec{u}_1)=0}}{a_1} x_1 + \ldots + \underset{\substack{\downarrow \\ f(\vec{u}_{n-1})=0}}{a_{n-1}} x_{n-1} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nenul.}}}{a_n} x_n$$

  $$\boxed{f(\vec{x}) = a_n x_n}, \quad a_n \neq 0$$

  rovnice vzhl. k ~~ceq~~ bázi $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}, \underbrace{\vec{u}_n}_{\text{doplněn lib. LNZ}}$

1.5. Vyjádření podP rovnicemi – hledání rovnice nadroviny

nadrovina $A'_{n-1} = [Q; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}]$ $\quad R = \langle P; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle$ repér v A_n $\quad$ LSS L daná repérem R

$Q = [q_1, \dots, q_n]$ $\quad \vec{v}_1 = (v_{11}, \dots, v_{1n})$

$\dots$

$\vec{v}_{n-1} \ (v_{n-1\,1}, \dots, v_{n-1\,n})$

$X \in A'_{n-1} \iff X - Q \in V'_{n-1}$

tj. $X - Q$, $\underbrace{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}}_{\text{LNZ} \dots \text{báze } V'_{n-1}}$ jsou LZ

rovnice nadroviny?

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$ LNZ $\quad \vec{u} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}] \iff \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{n-1\,1} & \dots & v_{n-1\,n} \end{vmatrix}}_{f(u_1, \dots, u_n)} = 0$

LZ: pomocí det:

$\bar{f}(X) = 0$

$f(X - Q) = 0$

f je lin. forma (z vlastností det.)

$N_f = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}]$ protože $\det = 0 \iff \vec{u} \in [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}]$

tj. rovnice nadroviny A'_{n-1}: $\begin{vmatrix} x_1 - q_1 & \dots & x_n - q_n \\ v_{11} & \dots & v_{1n} \\ - & - & - \\ v_{n1} & \dots & v_{n-1\,n} \end{vmatrix} = 0$

a toto je lin. forma z Laplace

- máme rovnice $\Rightarrow$ máme podP

Průnik konečně mnoha nadrovin prostoru A_n je mn. $\left\langle \begin{matrix} \emptyset \\ \text{ApodP} \end{matrix} \right.$ tj. máme-li k rovnic nadrovin $\bar{f}_1(X) = 0, \dots, \bar{f}_k(X) = 0$

a také řešením soustavy – viz LA

mn. bodů vyhovujících těm to rovnicím je: $\left\langle \begin{matrix} \emptyset \\ \text{ApodP} \end{matrix} \right.$

- máme podP $\Rightarrow$ najít rovnice

$A'_r = [R; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r]$ $\quad \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ LNZ $\Rightarrow$ lze je doplnit na bázi $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ prostoru V_n

$A_n = [R; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$

$\forall X \in A_n$ lze souřadnice $X = [x_1, \dots, x_n]$

$X \in A'_r \iff x_{r+1} = \dots = x_n = 0$

položme $\bar{f}_1(X) = x_{r+1}$ $\dots$ $\bar{f}_{n-r}(X) = x_n$ $\Rightarrow$ $\bar{f}_1(X) = 0, \dots, \bar{f}_{n-r}(X) = 0$ jsou rovnice A'_r

každý podP lze tedy určit rovnicemi

Pozn. rovnice nejsou určeny jednoznačně:

a) rovnice nadroviny $\bar{f}(X) = 0$ $\Rightarrow$ $c \cdot \bar{f}(X) = 0$ je rovnice téže nadroviny

b) rovnice podP $\bar{f}_1(X) = 0, \dots, \bar{f}_k(X) = 0$ a $\bar{g}_1(X) = 0, \dots, \bar{g}_k(X) = 0$ jsou rovnicemi téhož podP $\iff$

každá $\bar{f}_i(X) = 0$ je LK rovnic $\bar{g}_j(X) = 0$ a naopak – každá $\bar{g}_i(X) = 0$ je LK rovnic $\bar{f}_j(X) = 0$

Def. A'_r ApodP A_n

$\bar{f}_1(X) = 0, \dots, \bar{f}_k(X) = 0$ rovnice nadrovin $\quad \Rightarrow$ řík., že tyto rovnice jsou rovnice podP A'_r.

$Y \in A'_r \iff \bar{f}_1(Y) = 0, \dots, \bar{f}_k(Y) = 0$

Př. rovnice (pí.) přímky v A_3 $\quad A'_1 = [R; \vec{v}]$ $\quad A_3 = [P; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$

$R = [r_1, r_2, r_3]$ $\quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – souř. v LSS dané repérem

ať $v_1 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\vec{v}, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ báze V_3

rovnice přímky A'_1 jsou: $\begin{vmatrix} x_1 - r_1 & x_2 - r_2 & x_3 - r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x_1 - r_1 & x_2 - r_2 & x_3 - r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

svazky a trsy (52–60) nebereme

afinní zobr. – co dělá matice – viz G II, tam také 1.7 Dělicí poměr

Hledání příčky – příklady

$p = [A; \vec{u}]$ $\quad q = [B; \vec{v}]$ mimoběžné

$p: X = A + t\vec{u}$

$q: Y = B + s\vec{v}$

příčka: přímka různoběžná s p, q

1 Příčka r daným směrem $\vec{w}$

$\underbrace{\vec{w} \notin [\vec{u}, \vec{v}]}$

tj. $\rho \nparallel \sigma$

$\rho = [A; \vec{u}, \vec{w}]$

$\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}]$

$r \subset \rho \cap \sigma$

$\exists r$ ... k tomu nutné, aby $\rho \nparallel \sigma$

$\boxed{\exists!\ \text{řeš.} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \text{LNZ}}$

Př. $A = [4, 2, 3]$ $\quad \vec{u} = (-2, 3, 2)$

$B = [3, 4, -4]$ $\quad \vec{v} = (2, 0, -1)$

$\vec{w} = (3, -2, 6)$

$r = [X; \vec{w}]$

stačí najít ten bod

$r \cap p = X$

$r \cap q = Y$ $\Rightarrow \boxed{Y - X = c \cdot \vec{w}}$

• $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LNZ $\Rightarrow \exists!$ řeš. soustavy

$(B + s\vec{v}) - (A + t\vec{u}) = c\vec{w}$

$B - A - t\vec{u} + s\vec{v} = c\vec{w}$

$B - A = t\vec{u} + s(-\vec{v}) + c\vec{w}$ } soustava:

$$t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 9 & -8 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right) \sim$$

řešení: $(0, -1, -1)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 9 & -8 \\ 1 & -1 & -8 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 9 & -8 \\ 1 & -1 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 49 & -49 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 9 & -8 \\ 1 & -1 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$0 \quad 3 \quad 22 \quad -25$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$K = [(0, -1, -1)]$

nebo:

$$\begin{array}{c} \\ 3\cdot \\ 2\cdot \\ \\ \end{array} \overset{1\text{ř} + 2 \cdot 3\text{ř}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 15 & -15 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right)} \sim \overset{1\text{ř}. - 2\text{ř}.}{\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 45 & -45 \\ 6 & 0 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 49 & -49 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ & & & \end{array}\right)$$

$c = -1$

$3t + 2 = 2$

$3t = 0$

$\underline{\underline{t = 0}}$

stačí: t nebo s

$Y = B + s\vec{v} = B - \vec{v} = [\cancel{344}\ 3, 4, -4] - (2, 0, -1) = \boxed{[1, 4, -2]}$

$X = A + t\vec{u} = A + 0 \cdot \vec{u}$

$r = [Y, \vec{w}]$

$r: Z = [1, 4, -3] + \alpha(3, -2, 6)$

2 příčka r procházející daným bodem M

chceme více: $\notin \rho,\ \rho \parallel p,\ q \in \rho$; $\notin \sigma,\ \sigma \parallel q,\ p \in \sigma$

$M \notin \cancel{p, q}$ jinak by z M na p bylo možno vést ∞ mnoho příček na q

$\boxed{Y - X = c \cdot (M - X)}$

p $X = A + t\vec{u}$

q! $Y = B + s\vec{v}$

$(B + \cancel{A}\, s\vec{v}) - (A + t\vec{u}) = c \cdot (M - (A + t\vec{u}))$

$B - A - t\vec{u} + s\vec{v} = c \cdot (M - A) - ct\vec{u}$

$\underbrace{(c-1)t}_{x}\vec{u} + s\vec{v} + c(A - M) = A - B$

$M = [7, 0, 9]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 7 \end{array}\right)$$

$(x, s, c) = (0, -1, -1)$ $\quad s = -1$

$x = (c-1)t = 0$

$-2t = 0 \Rightarrow t = 0$

$Y = B - \vec{v} = [1, 4, -3]$

$X = A + 0\vec{u} = A = [4, 2, 3]$

$r = [M; X - Y]$

$\vec{w} = X - Y = \underline{(3, -2, 6)}$