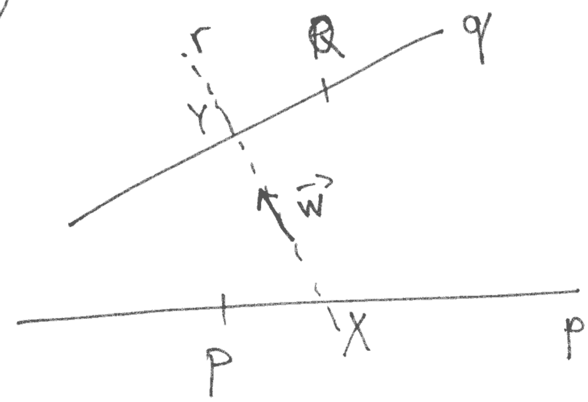
Hledání příčky:

- je-li dán směr příčky: ... $[\vec{w}]$

$$\left.\begin{array}{l} p = [P; \vec{u}] \\ q = [Q; \vec{v}] \end{array}\right\} \text{ ~~ka~~ mimoběžky}$$

příčka: $r = [M; \vec{w}]$ dán

tj. **hledáme M**



$p: \ X = P + t\vec{u}$

$q: \ Y = Q + s\vec{v}$

$r: \ Z = M + \alpha \cdot \vec{w}$

$Y - X, \ \vec{w} \ \ldots \text{LZ}$ ← toto je základ řešení

tj. $\exists c \neq 0; \ \boxed{Y - X = c \cdot \vec{w}}$

$$Q + s\vec{v} - (P + t\vec{u}) = c \cdot \vec{w}$$

$$\boxed{s\vec{v} - t\vec{u} - c\vec{w} = P - Q}$$

s_0, t_0, c_0 ... řeš. soust.

$$\underline{\underline{M}} = \begin{cases} P + t_0\vec{u} \\ Q + s_0\vec{v} \end{cases}$$

① Příčka s daným směrem $[\vec{w}]$ $\quad \vec{w} = (3,-2,6)$

$p: X = P + t\vec{u} \qquad P = [4,2,3] \qquad \vec{u} = (-2,3,2)$

$q: Y = Q + s\cdot\vec{v} \qquad Q = [3,4,-4] \qquad \vec{v} = (2,0,-1)$

najděme příčku $r: Z = M + \alpha\cdot\vec{w}$

tj. hledáme $\underline{\underline{M}}$

$$\boxed{Y - X = c\cdot\vec{w}}$$

$$(Q + s\vec{v}) - (P + t\vec{u}) = c\vec{w}$$

$$Q - P = t\cdot\vec{u} + s\cdot(-\vec{v}) + c\cdot\vec{w}$$ ← soustava

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} t & s & c \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -2 & 3 & -1\\ 3 & 0 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 6 & -7\end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$$

$t_0 = 0 \qquad s_0 = -1 \qquad c_0 = -1$

např. $M = Y_0 = Q + s_0\vec{v} = [3,4,-4] - 1\cdot(2,0,-1) =$

$$\underline{\underline{M = [1,4,-3]}}$$

$$\underline{\underline{r: Z = M + \alpha\cdot\vec{w}}}$$ ↖ zadáno

$\exists\, r \iff \exists$ řeš. soustavy

$$\left(\vec{u} \,\vdots\, -\vec{v} \,\vdots\, \vec{w} \,\vdots\, \middle|\, Q-P\right)$$

p, q mimob. $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ LNZ

r dle def. příčky je různob. s p, q (ne rovnob.) $\Rightarrow$ $\vec{u}, \vec{w}$ LNZ, $\vec{v}, \vec{w}$ LNZ

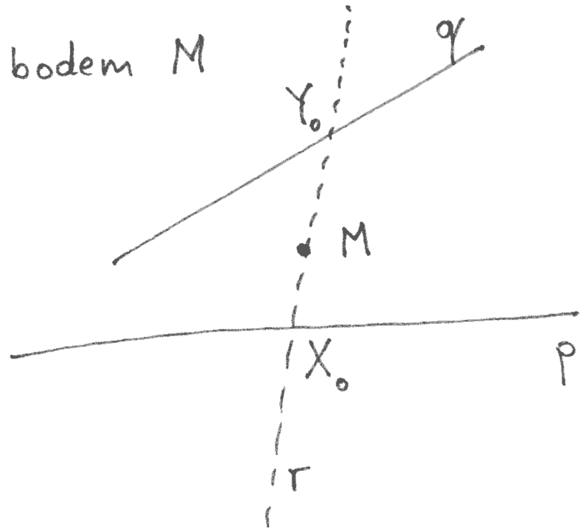
$\Big\}$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LNZ $\quad h(A) = 3$, $\quad h(A|\vec{b}) = 3$, $\quad Q - P \in [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ✓

$$\underbrace{\vec{w} \notin [\vec{u}, \vec{v}]}_{\text{2rozm. podpr.}}$$

$$\boxed{\exists!\ \text{příčka se směrem } \vec{w} \iff \underset{p \cap q = \emptyset}{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \text{LNZ}}}$$

② Hledání příčky procházející daným bodem M

$$r:\quad Z = \underset{\text{zadán}}{M} + \alpha \cdot \underset{\text{hledáme}}{\vec{w}}$$



$M \notin p$
$M \notin q$
$\exists c \neq 0;$ $\boxed{Y_0 - X_0 = c \cdot (M - X_0)}$

$$(Q + s_0 \vec{v}) - (P + t_0 \vec{u}) = c \cdot \underbrace{(M - (P + t_0 \vec{u}))}_{c \cdot (M-P) - c \cdot t_0 \vec{u}}$$

$$\underbrace{(ct_0 - t_0)}_{\underset{\beta}{t_0 \cdot (c-1)}} \vec{u} + s_0 \vec{v} + c \cdot (P - M) = P - Q$$

soustava 3 rovnic o 3 nezn.: t_0, s_0, c je nelin. !

$$\beta \vec{u} + s_0 \vec{v} + c(P - M) = P - Q$$

$\beta = t_0 (c-1)$

tj.: $t_0 = \frac{\beta}{c-1}$

$c \neq 1$, protože $M \notin p$, $M \notin q$

zadáme:
$M = [7, 0, 9]$

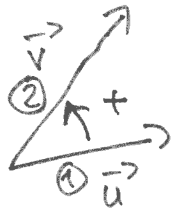
$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 7 \end{array}\right) \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u} & \vec{v} & P-M & P-Q \end{array}
\end{array}
\sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

např.:

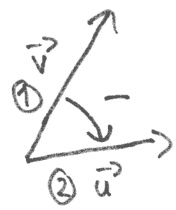
$$\vec{w} = X_0 - Y_0 = (P + t_0 \vec{u}) - (Q + s_0 \vec{v}) =$$
$$= P - Q + 0 \cdot \vec{u} - (-1)\vec{v} = (P - Q) + \vec{v} = (3, -2, 6)$$

$\beta = 0$
$s_0 = -1$ $\Rightarrow t_0 = \frac{0}{-2} = 0$
$c = -1$

$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ ... báze ← záleží na pořadí



$B' = \{\vec{v}, \vec{u}\}$



VP $\underline{\underline{V}}$ orientovaný: jednu z jeho bází prohlásíme za kladnou

změní se orientace: když mezi sebou vyměním 2 vektory

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ $\qquad \vec{b}_i \longleftrightarrow \vec{b}_j$ ... změnili orientaci

$$B = \left(\vec{b}_1 \;\; \vec{b}_2 \;\; \cdots \;\; \vec{b}_n \right) \longmapsto \text{číslo, které změní své znaménko při záměně 2 vektorů}$$

čtvercová regulární

matice přechodu P_{BK} ← kanon. báze

determinant

znaménko

B, C mají obě báze stejnou orientaci?

$\det P_{BC} > 0$ ... B, C mají stejnou orientaci, jsou souhlasné

mn. všech bází, relace být souhlasné: ekvivalence

indukuje rozklad i na 2 třídy

příčka proch. bodem M

$$\left(\underbrace{\vec{u} \,\vdots\, \vec{v} \,\vdots\, P-M \,\vdots}_{LNZ} \middle| \, P-Q\right)$$

$\exists$ řeš. $\Longleftrightarrow$ $M \notin$ rovině obsahující p a rovnoběžné s q

$M \notin$ – " – q – " – p

13. Orientace

přímá a nepřímá shodnost trojúhelníků $<$ posunutím, otočením / + osová souměrnost — převedeme na shodnost repérů $\langle A; B-A, C-A\rangle$ $\langle A'; B'-A', C'-A'\rangle$

přímo shodné útvary na sebe lze převést „spojitým pohybem"

Def. M, N ... 2 báze V_n

determinant přechodu od báze M k bázi N — $\det P_{MN}$, ozn. D_{MN}

báze M a N jsou souhlasné — $D_{MN} > 0$

L, M, N ... báze V_n

$$P_{LN} = P_{LM} \cdot P_{MN} \qquad D_{LN} = D_{LM} \cdot D_{MN} \quad (1) \Rightarrow T$$

$$R: \quad P_{NN} = E \qquad \text{tj.} \quad D_{NN} = 1 \quad (2) \Rightarrow R$$

$$S \Rightarrow \quad P_{MN} = P_{NM}^{-1} \qquad D_{MN} = \frac{1}{D_{NM}} \quad (3) \Rightarrow S$$

$$>0 \Rightarrow >0$$

měním-li spojitě báze, mění se spojitě i D_{MN}

0 je předěl, přes který D_{MN} nemůže – je to det reg. matice

nad $\mathbb{C}$ nemá souhlasnost bází smysl

V/ Relace „být souhlasné" na mn. všech bází prostoru V_n je relace ekvivalence.

důk. plyne z (2), (3), (1)

Relace ekvivalence indukuje rozklad na třídy ekvivalentních prvků

vezmu-li bázi $M \Rightarrow D_{MN} < \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$ 2 třídy ekvivalence

Def. Orientace V_n — volba jedné ze dvou tříd bází při ekvivalenci „být souhlasné" na mn. všech bází V_n

kladné báze — báze ze zvolené třídy

záporné báze — báze z druhé třídy

VP, ~~na ně~~ v němž je dána orientace — naz. orientovaný VP

„volba" – zobr. $\{T_1\} \to \{T_1, T_2\}$, kde T_1, T_2 jsou obě třídy ekvivalence

z vlastností det: provedeme-li na bázové vektory permutaci $\Rightarrow \operatorname{sgn} P <$ >0 zůstává báze v pův. třídě / <0 báze přechází do druhé třídy

vezmeme-li v kladné bázi místo jednoho vektoru opačný, dostaneme zápornou bázi

Def. orientace AP A_n — orientace jeho zaměření V_n

počátek není pro orientaci podstatný (spojitým pohybem – posunutím ~~dvě~~ bázi přeneseme v druhou)

využití: např. vektorový součin