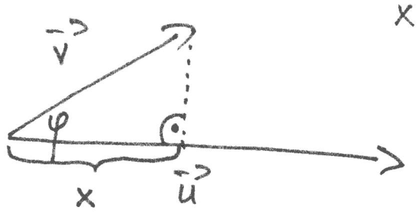
Geometrická interpretace skalárního součinu

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\underbrace{\|\vec{v}\|\cdot\cos\varphi}_{x}} \qquad \varphi \in \langle 0,\pi\rangle$$



$$\cos\varphi = \frac{x}{\|\vec{v}\|}$$

$$x = \|\vec{v}\|\cdot\cos\varphi$$

↑

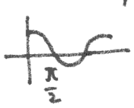
Co to je?

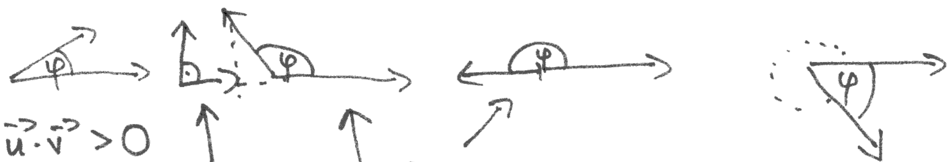
• projekce vektoru $\vec{v}$ do ~~vektoru~~ $\vec{u}$ směru

OG orientovaná délka projekce ≥ 0

$\cos\varphi < 0 \Rightarrow$ „orientovaná"

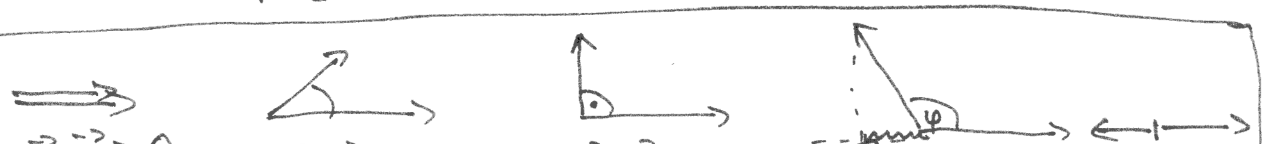
pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2},\pi\rangle$





$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ $\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ $\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$



$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ $\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ $\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ $\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ $\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

skal. součin klesá s rostoucím $\varphi \in \langle 0,\pi\rangle$

$$\cos(\pi-\varphi) = \frac{x}{\|\vec{v}\|}$$

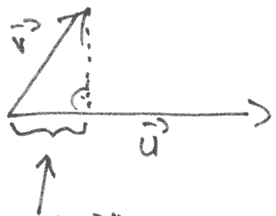
$$x = \|\vec{v}\|\cdot\underbrace{\cos(\pi-\varphi)}_{\underbrace{\cos\pi}_{-1}\cos\varphi + \cancel{\sin\varphi\underbrace{\sin\pi}_{0}}}$$

$$x = -\underbrace{\|\vec{v}\|\cdot\cos\varphi}_{<0} > 0$$

• tj.: $\|\vec{v}\|\cdot\cos\varphi$ ...

orientovaná délka ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$

- $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$



$\|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$ projekce, jako by $\vec{u}$ byl jednotkový

a gumový… :-)

zde si uděláme čárku

a $\vec{u}$ natáhneme na původní velikost vektoru $\vec{u}$

„zjednotkovatělý"

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

- složité

stojí za to uvažovat případ, kdy $\|\vec{u}\| = 1$

$\Downarrow$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ je přímo or. délka OG proj. $\vec{v}$ do směru $[\vec{u}]$

- aplikace interpretace skal. součinu:

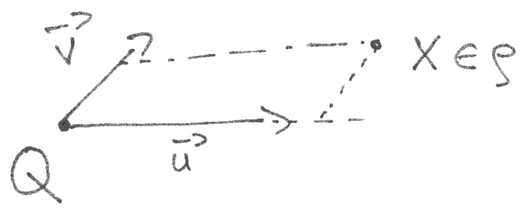
1) $\vec{u} \perp \vec{v}$ or. délka proj. $= 0$

$$\underbrace{\vec{u} \perp \vec{v}}_{\text{tj. } \varphi = \frac{\pi}{2}} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Obecná rovnice nadroviny

$\mathbb{R}^3$, rovina $\rho \subset \mathbb{R}^3$

$$\rho = [Q; \vec{u}, \vec{v}]$$



$X = Q + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$X - Q = t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$

vektor $\vec{n}$ kolmý na rovinu ρ

tj. kolmý na její zaměření

kolmý na každý vektor $\in [\vec{u}, \vec{v}]$

$[\vec{n}]$ je tedy $[\vec{u}, \vec{v}]^{\perp}$

ortogonální doplněk

$$\mathbb{R}^3 = [\vec{u}, \vec{v}] \oplus [\vec{u}, \vec{v}]^{\perp}$$

direktní součet podprostorů

tj. jejich průnik je triviální $= \{\vec{o}\}$

$$\boxed{\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W} \underbrace{- \dim(U \cap W)}_{=0}$$

- tj. obecně: $\mathbb{R}^n$ $\rho \ldots (n-1)$-rozměrný podprostor

$$[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}]^{\perp} = [\vec{n}]$$

OG doplněk má dle věty o dim (direktního) součtu podprostorů dimenzi 1

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim\left([\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}] \oplus [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}]^{\perp}\right) =$$

$$= \underbrace{\dim [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}]}_{n-1} + \underbrace{\dim [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}]}_{?} = n$$

- pro jednoduchost zpět do E_3

$$[\vec{n}] = [\vec{u}, \vec{v}]^{\perp}$$

tj. $\vec{n} \perp$ každý vektor z $[\vec{u}, \vec{v}]$. - zaměření ρ

stačí ověřit, že $\vec{n} \perp$ na prvcích báze

tj.: $\vec{n} \perp \vec{u} \;\wedge\; \vec{n} \perp \vec{v}$

návod k nalezení $\vec{n}$

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ ... atd.

$\vec{n}$ vyjde jediný až na nenulový násobek

- **takže:**
  - místo ~~popi~~ n-1 vektorů nutných k popisu nadroviny stačí vektor jediný ... $\vec{n}$
  - $\vec{n} \perp$ na všechny vektory zaměření $\rho = [Q; \vec{u}, \vec{v}]$

$X \in \rho \Leftrightarrow X - Q = \underbrace{t_1\vec{u} + t_2\vec{v}}_{[\vec{u}, \vec{v}]}$

$$\boxed{\vec{n} \perp X - Q}$$

SŠ: z názorné představy plyne ihned

X ... lib. bod nadroviny ρ

Q ... 1 pevně zvolený bod nadroviny ρ

$$\rho: \boxed{\vec{n} \cdot (X - Q) = 0}$$ ... obecná rovnice nadroviny

(v AP: $f(X-Q) = 0$)

- Jak vypadá obecná rovnice nadroviny v LSS?

$\vec{n} = (a, b, c)$

$Q = [q_1, q_2, q_3]$

$X = [x, y, z]$

$(a, b, c) \cdot (x - q_1, y - q_2, z - q_3) = 0$

$ax + by + cz \underbrace{- aq_1 - bq_2 - cq_3}_{\text{konst., ozn. } d} = 0$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

$\vec{n}$ ... naz. normálový vektor

Hledání vektoru kolmého na zadané vektory

- $\mathbb{R}^2$, zadán $\vec{u}=(u_1,u_2)$ najděme $\vec{w}=(w_1,w_2)$; $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

$[\vec{u}]^{\perp} = ?$

$= [\vec{w}]$

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 = 0$$

např.: $w_1 \to -u_2$, $w_2 \to u_1$

$$\vec{w} = \underline{\underline{(-u_2, u_1)}} \perp \vec{u}$$

- v $\mathbb{R}^3$: zadány LNZ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ najděme $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$; $\vec{u}\perp\vec{w}$ a $\vec{v}\perp\vec{w}$

$[\vec{u},\vec{v}]^{\perp} = ?$

$= [\vec{w}]$

tj. $\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \text{ a } \vec{v}\cdot\vec{w}=0}$

vzhl. ke kartézské soust. s.

$$u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 = 0$$
$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{array}\right)$$ řešme soustavu:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\cdot v_1 \\ \cdot u_1\end{array} \sim \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 \\ v_1u_1 & v_2u_1 & v_3u_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 \\ 0 & u_1v_2-u_2v_1 & u_1v_3-u_3v_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 \\ 0 & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

2ř. − 1ř.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\cdot w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_3 = 0$$

např.: $w_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}$, $w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

dopočítejme w_1:

z 1. rovnice:

$$u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3 = 0$$

$$u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot (-u_1v_3 + u_3v_1) + u_3 \cdot (u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

$$u_1 \cdot w_1 - u_1u_2v_3 + \cancel{u_2u_3v_1} + u_1u_3v_2 - \cancel{u_2u_3v_1} = 0$$

$$u_1 \cdot (w_1 - u_2v_3 + u_3v_2) = 0$$

$$w_1 = u_2v_3 - u_3v_2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

tj.:

$$\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3$$

až na nenulový násobek

pomůcka pro zapamatování:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3$$

vypadá to jako rozvoj determinantu:

formálně tedy pišme:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \vec{w}$$

- co jsme získali? bin. operaci na $\mathbb{R}^3$: 2 vektorům $\vec{u}, \vec{v}$ přiřadí $\vec{w}$

Jak se tato operace chová vůči jiným operacím v $\mathbb{R}^3$?

$\uparrow$ z def. vektorového prostoru známe jedinou: $\underline{\underline{\vec{a}+\vec{b}}}$

(1)

Najděme $\vec{w}$ k vektorům $\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{w} = {}''\begin{vmatrix} & \vec{a}+\vec{b} & \\ & \vec{c} & \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}'' = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

Vůči sčítání vektorů se chová distributivně

$\Downarrow$

naz. součin

ozn. $\times$ ($\cdot$ už je obsazena pro skal. součin)

(2) Je tento součin komutativní?

$${}''\begin{vmatrix} & \vec{u} & \\ & \vec{v} & \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}'' = - {}''\begin{vmatrix} & \vec{v} & \\ & \vec{u} & \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}'' \Rightarrow \text{není kom.}$$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ ... vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (v tomto pořadí)