Vzdálenost podprostorů

def. $\beta = E_r = [B; U]$, $\gamma = E_s = [C; W]$ podprostory E_n $\Rightarrow$ vzdálenost podprostorů E_r, E_s — $d(\overset{\beta}{E_r}, \overset{\gamma}{E_s}) :=$

$$d(\beta, \gamma) := \underset{\text{inf}}{\cancel{\min}} \{|XY|;\ X \in \underset{\beta}{E_r},\ Y \in \underset{\gamma}{E_s}\}$$

- $\beta = \{B\}$, $\gamma = \{C\}$ místo $d(\{B\}, \{C\})$ píšeme $d(B, C)$
- mají-li β, γ spol. bod $\Rightarrow d(\beta, \gamma) = 0$, stačí zvolit lib. bod z průniku: $X = Y \in \beta \cap \gamma$

- $\exists \min$? (inf. určitě, zdola omez. 0)
  (Je jediné? – když už je to min., tak samozřejmě; nemusí být nabýváno pro jedinou dvojici bodů.)
  A jak to minimum nalézt?

V/ $d(\beta, \gamma) =$ velikost komponenty vektoru $\overset{B-C}{\cancel{BC}}$ vzhledem k $U + W$ $= \|\vec{z}\|$

tj. $\underbrace{B - C}_{\in E_n} = \underbrace{\vec{y}}_{\in U+W} + \underbrace{\vec{z}}_{\in (U+W)^\perp}$

$(U+W) \oplus (U+W)^\perp = E_n$

↑ direktní součet

⇙ vektor z E_n lze napsat jediným způsobem jako součet vektorů z $U+W$ a $(U+W)^\perp$

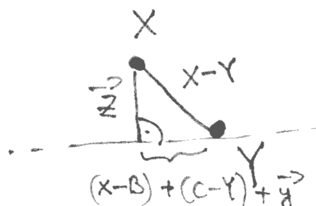
a) Je to min.?
b) Jak nalézt $\vec{z}$?

a) že je to minimum: L/ $X \in \beta, Y \in \gamma \Rightarrow \|X - Y\| \geq \|\vec{z}\|$

důk. z Pýth. věty

$$X - Y = \underbrace{(X-B)}_{\in U} + \underbrace{(B-C)}_{\vec{y}+\vec{z}} + \underbrace{(C-Y)}_{\in W} = \underbrace{(X-B) + (C-Y)}_{\in U+W} + \underbrace{\vec{y}}_{\in U+W} + \underbrace{\vec{z}}_{\in (U+W)^\perp}$$

$\Rightarrow \vec{z} \perp (X - B + C - Y + \vec{y})$



$$\|X-Y\|^2 \overset{\text{z Pýth.}}{=} \underbrace{\|(X-B) + (C-Y) + \vec{y}\|^2}_{\geq 0} + \|\vec{z}\|^2 \overset{\text{Pýthag.}}{\geq} \|\vec{z}\|^2 \Rightarrow \|X - Y\| \geq \|\vec{z}\|$$

b) Nalezneme $\|\vec{z}\|$; tj. najdeme body X_0, Y_0, pro něž je min. nabýváno: L/ $\exists X_0 \in \beta\ \exists Y_0 \in \gamma;\ \|\vec{z}\| = \|X_0 - Y_0\|$

důk. chceme, aby

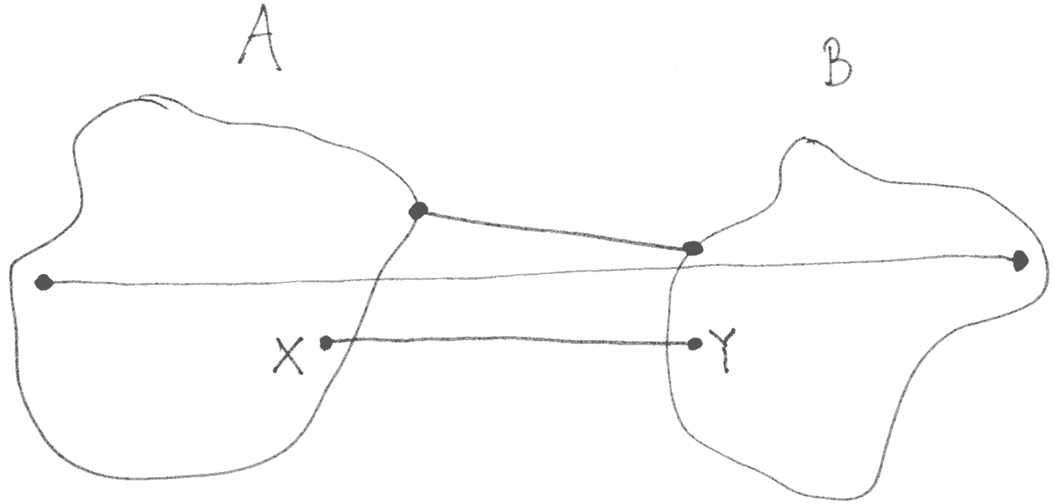
$$\underbrace{(X_0 - B)}_{\in U} + \underbrace{(C - Y_0)}_{\in W} + \underbrace{\vec{y}}_{\in U+W} = \vec{o} \Rightarrow \vec{y} = \underset{\in U}{\vec{u}} + \underset{\in W}{\vec{w}}$$

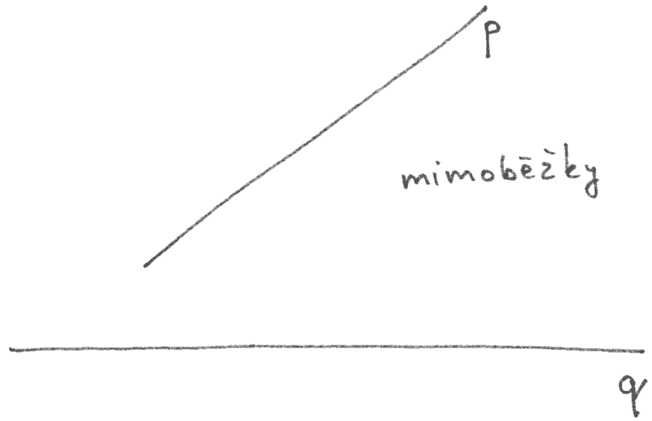
$$\Leftarrow (X_0 - B) + (C - Y_0) + \vec{u} + \vec{w} = \vec{o}$$

$$\downarrow$$

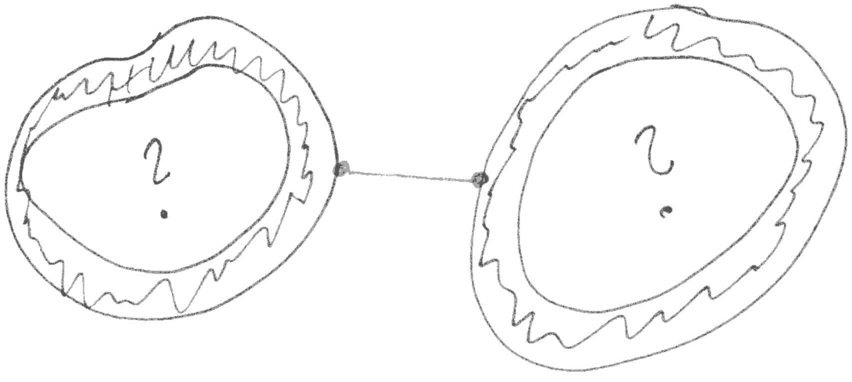
$$\underbrace{(X_0 - B) + \vec{u}}_{\in U} = \underbrace{(Y_0 - C) - \vec{w}}_{\in W}$$

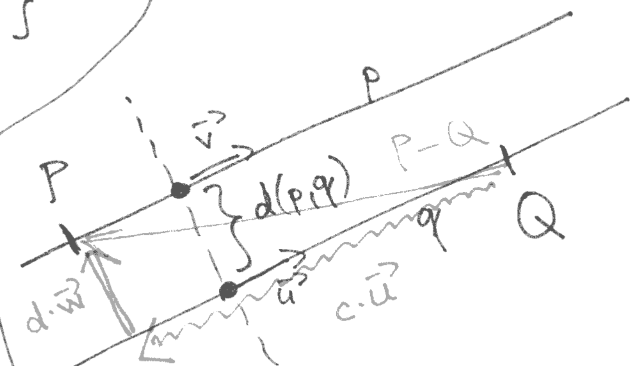
vezmeme-li přímo $\underset{\in \beta}{X_0 = B - \vec{u}}$ $\underset{\in \gamma}{Y_0 = C + \vec{w}}$ $\Rightarrow |X_0 - Y_0|^2 = \|\vec{o}\|^2 + \|\vec{z}\|^2$, tj. $\|X_0 - Y_0\| = \|\vec{z}\|$





$$d(A,B) = \inf\{d(X,Y);\ X \in A,\ Y \in B\}$$





$$U+W = [\vec{u}]$$

$$(U+W)^{\perp} = [\vec{w}],\quad \vec{w} \perp \vec{u}$$

$$P-Q = c\cdot\vec{u} + d\cdot\vec{w}$$

$$d(p,q) = \|d\cdot\vec{w}\|$$

X

hraniční bod mn. M : ~~jeho okolí, v němž leží body této mn.~~ ~~neleží body~~

$$\forall\, \mathcal{U}(X)\ \exists \text{ body} \in \mathcal{U}(X) \cap M$$

$$\exists \text{ body} \in \mathcal{U}(X) \wedge \notin M$$

- osa dvou podprostorů: příčka, která je kolmá na oba tyto podpr.

např. vzdálenost 2 mimoběžek:

$$p = [P; \vec{u}] \qquad q = [Q; \vec{v}]$$

1) najdeme směr $\vec{w}$ kolmý na $\vec{u}$ i na $\vec{v}$

např.: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

2) hledáme příčku se směrovým vektorem $\vec{w}$ ... tj. osu

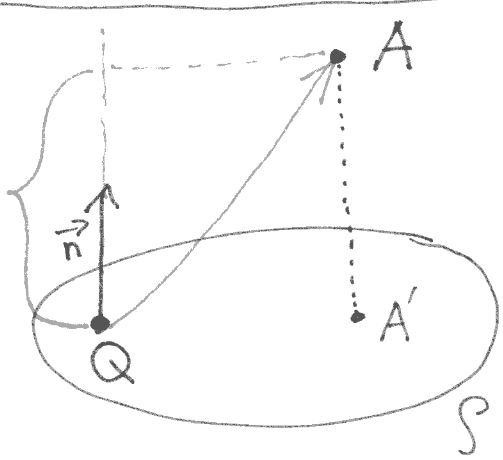
$$r = [M, \vec{w}] \qquad M = ?$$

3) $d(p,q)$ = vzdálenost průsečíků osy s p i q

$$X_0 = r \cap p \qquad Y_0 = r \cap q$$

$$\boxed{d(p,q) = d(X_0, Y_0)}$$

Vzdálenost bodu od nadroviny



$$d(\rho, A) = ? = \|A' - A\|$$

délka ~~orient.~~ projekce $A - Q$ do směru $[\vec{n}]$

$$\left| (A - Q) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| = d(A, \rho)$$

$$\rho: \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$$

A' je OG projekcí bodu A do ρ

$$A' = \rho \cap k$$

$$k = [A; \vec{n}]$$

neboli parametricky:

$$k: Y = A + t \cdot \vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\rho \cap k$:

$$\vec{n} \cdot (A + t\vec{n} - Q) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (A - Q) + \vec{n} \cdot t\vec{n} = 0$$

$$t = \frac{-\vec{n} \cdot (A - Q)}{\|\vec{n}\|^2}$$

$$A' = A - \frac{\vec{n} \cdot (A - Q)}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$$

$$\|A' - A\| = \frac{|\vec{n} \cdot (A - Q)|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\| \Rightarrow \boxed{d(A, \rho) = \frac{|\vec{n} \cdot (A - Q)|}{\|\vec{n}\|}}$$