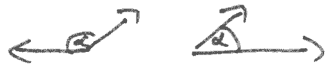
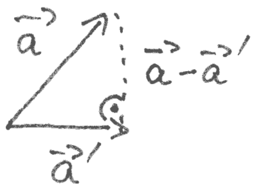
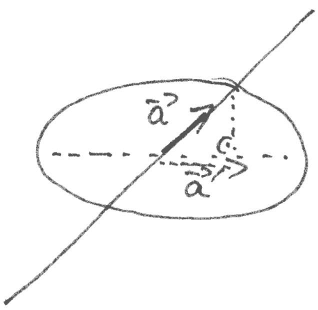
Odchylky 2 podprostorů II



def.:

- odchylka nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$ — číslo $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$;
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$
- odchylka netriv. podprostorů $\alpha, \beta \subset E_n$ — odchylka jejich zaměření
$$\sphericalangle(\alpha, \beta) := \sphericalangle(V_\alpha, V_\beta)$$





V_1 ... vektorová přímka

V_k ... podprostor dimenze k

$\underline{\text{V}}$/ V_1, V_k ... vektorové podprostory V_n

$V_1 = [\vec{a}]$

$V_k = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k]$

$\Rightarrow \exists!\ \vec{a}' \in V_k$; $\vec{a}-\vec{a}'$ je kolmý na každý vektor $\vec{x} \in V_k$

a navíc:

$\vec{a}\cdot\vec{a}' \geq 0$

Pozn.: vlastně $\exists!$ OG projekce $\vec{a}$ do V_k

důk.: • $\vec{a} \in V_k \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$

• $\vec{a} \notin V_k$ Gram-Schmidt: ortogonalizujeme $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{a}$ (jsou LNZ)

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}$$

$\left([\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k] = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]\right)$

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k + a_{k+1}\vec{u}_{k+1}$$

$$\vec{a}' = a_1'\vec{u}_1 + \dots + a_k'\vec{u}_k$$

$$\vec{a}-\vec{a}' = (a_1-a_1')\vec{u}_1 + \dots + (a_k-a_k')\vec{u}_k + a_{k+1}\vec{u}_{k+1} \ \underbrace{\perp \vec{x} \quad \forall x \in V_k}_{\text{stačí ověřit na bázi } V_k,\ \text{tj. na } \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}}$$

tj. požadujeme: $\underbrace{\vec{a}-\vec{a}' \perp \vec{u}_i}$ $i = 1, 2, \dots, k$

$$\left.0 = (\vec{a}-\vec{a}')\cdot\vec{u}_i = (a_i - a_i')\cdot\underbrace{\vec{u}_i\cdot\vec{u}_i}_{\|\vec{u}_i\|^2 \neq 0}\right\} \Rightarrow a_i - a_i' = 0$$

tj. $\vec{a}' = a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k$

nalezen, a to jediný

- ověřme ještě: $\vec{a} \cdot \vec{a}' \geq 0$ $\qquad \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \|\vec{u}_i\|^2 & i = j \end{cases}$

$$(a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k + a_{k+1} \vec{u}_{k+1}) \cdot (a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k) =$$

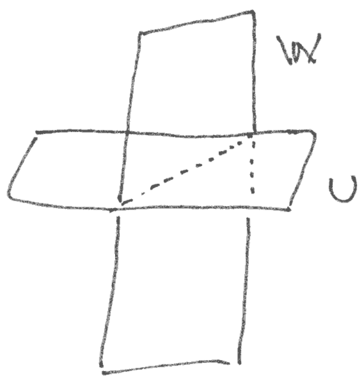
$$= a_1^2 \, \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + a_k^2 \, \vec{u}_k \cdot \vec{u}_k$$

$$= a_1^2 \|\vec{u}_1\|^2 + \dots + a_k^2 \cdot \|\vec{u}\|_k^2 \geq 0$$

$\square$

Kolmost podprostorů

- $W \subset\subset V_n \Rightarrow$ množina $\{\vec{x} \in V_n ; \vec{x} \perp \vec{w} \ \forall \vec{w} \in W\}$ naz. ortogonální doplněk podpr. W ve V_n

- 

$U \cap W$ je vekt. přímka $\qquad \vec{u} \in U \cap W$

$U \perp W$ ✓ $\qquad \begin{matrix} \vec{u} \in U \\ \vec{u} \in W \end{matrix} \not\Rightarrow \underset{\in U}{\underset{\uparrow}{\vec{u}}} \perp \underset{\in W}{\underset{\uparrow}{\vec{u}}}$

def. $U, W \subset\subset V_n$
netriv.

Je-li $U^{\perp} \subseteq W$ nebo $W \subseteq U^{\perp}$, pak o U, W ~~...~~ říkáme, že jsou ~~kol~~ navzájem kolmé (ve V_n)

píšeme $U \perp W$ (nebo $W \perp U$).

- ukažme, že nezáleží na pořadí U, W

  není tedy třeba rozlišovat, zda je U kolmé na W,

  nebo W kolmé na U.

$$U^\perp \subseteq W \quad\Downarrow\quad W^\perp \subseteq U \qquad\qquad W \subseteq U^\perp \quad\Downarrow\quad U \subseteq W^\perp$$

(protože aplikací $^\perp$ na inkluzi:

$$U^\perp \subseteq W \quad /^\perp$$

$$\underbrace{(U^\perp)^\perp}_{U} \supseteq W^\perp$$

- Pokud $U^\perp = W$ (tj. odtud plyne také, že $W^\perp = U$), tak říkáme, že podpr. U, W jsou totálně kolmé.

- **Def.** odchylky 2 vekt. podprostorů obecně

  U, W netriv. vekt. podprostory $(V_n, \cdot)$

  Pak odchylkou podpr. U, W, ozn. $\measuredangle(U, W)$, rozumíme:

  1) $U \cap W = \{\vec{o}\} \Rightarrow$ def. $\measuredangle(U,W) := \min \left\{ \measuredangle([\vec{u}], [\vec{w}]),\ \begin{smallmatrix} \vec{u} \in U \\ \vec{w} \in W \\ \vec{u}, \vec{w} \neq \vec{o} \end{smallmatrix} \right\}$

  2) $U \cap W \neq \{\vec{o}\} \Rightarrow$ def. $\measuredangle(U,W) := \measuredangle\left(U \cap (U\cap W)^\perp, W \cap (U \cap W)^\perp\right)$

  je-li některý z nich $= \{\vec{o}\}$, klademe

  $\measuredangle(U,W) := 0$

korektnost def. 2): ověřme, že $\underbrace{\left[U \cap (U\cap W)^\perp\right] \cap \left[W \cap (U\cap W)^\perp\right]}_{(U\cap W)\cap(U\cap W)^\perp} = \vec{o}$

$$(U\cap W) \cap (U \cap W)^\perp \overset{\text{ano, je:}}{=} \vec{o} \checkmark$$