MILAN SEKANINA
LEO BOČEK
MILAN KOČANDRLE
JAROSLAV ŠEDIVÝ

GEOMETRIE II

STÁTNÍ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Zpracovali:
Doc. RNDr. Milan Sekanina, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Milan Kočandrle, CSc., doc. RNDr. Jaroslav Šedivý, CSc.
Lektorovali:
Doc. RNDr. Jarolím Bureš, CSc., prof. RNDr. Ernest Jucovič, DrSc.

Schváleno rozhodnutím ministerstva školství České socialistické republiky č. j. 27 841/86-31 ze dne 28. prosince 1986 jako celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty matematicko-fyzikálních, přírodovědeckých a pedagogických fakult studijního oboru 76-12-8 Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů aprobačního předmětu matematika.

OBSAH

PŘEDMLUVA

Geometrie II navazuje na učebnici Geometrie I. Obsahuje teorii geometrických transformací, teorii kvadrik, úvod do axiomatiky geometrie a nástin historie vývoje geometrie. V této učebnici jsou použity odkazy na první díl (učebnice Geometrie I).

K některým tematickým celkům chceme uvést několik poznámek.

Kapitola 4 – Kvadriky – byla zařazena na doporučení komise expertů. Autoři jsou si vědomi, že vzhledem k hodinové dotaci výuky geometrie nebude pravděpodobně nikdy vykládána v plném rozsahu. Přesto byl rozsah kapitoly zvolen tak, aby kapitola poskytovala přehled základních vlastností kvadrik. To by mělo jednak umožnit dostatečnou variabilitu výkladu, jednak poskytnout látku pro doplňující studium. Látka je vyložena tak, že umožňuje redukci učiva, a to nejen od konce.

Úvod do axiomatiky se v podstatě skládá ze dvou částí. V první je popsán axiomatický přístup k afinní rovině na základě axiómů incidence a uspořádání. Druhá část je věnována úvodu do absolutní geometrie. Tento úvod je zakončen zcela stručným přehledem základních poznatků o Lobačevského geometrii.

Byli bychom rádi, kdyby oba díly učebnice přinesly užitek jak studentům učitelského směru matematiky, tak i případným dalším zájemcům.

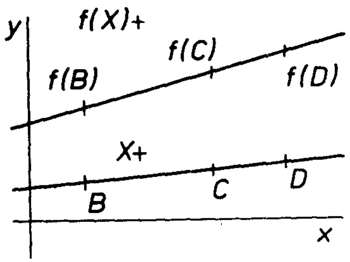
Autoři

KAPITOLA 1

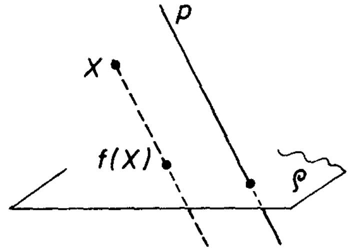
AFINNÍ ZOBRAZENÍ

1.1 Základní vlastnosti afinního zobrazení

Příklad 1. Nechť je v euklidovské rovině zvolena kartézská soustava souřadnic. Přiřaďme každému bodu $X = [x, y]$ bod $f(X) = [x', y']$, kde $x' = x$, $y' = 3y$ (obr. 1). Dostaneme tak prosté zobrazení dané euklidovské roviny na sebe. Leží-li navzájem různé body B, C, D na přímce, leží jejich obrazy $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ také na přímce, přičemž se jejich dělicí poměr rovná dělicímu poměru jejich vzorů.



Obr. 1



Obr. 2

Připomeňme, že dělicí poměr bodů B, C, D definujeme jako to reálné číslo $\lambda = (B, C; D)$, pro které platí $D - B = \lambda(D - C)$. V našem případě je také $f(D) - f(B) = \lambda(f(D) - f(C))$, tj. $(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D)$.

Uvedli jsme si příklad zobrazení, která jako první studoval významný matematik *Leonhard Euler* (1707 – 1783) ve své práci *Introductio in analysin infinitorum* v roce 1738. Dvě křivky, z nichž jedna je obrazem druhé v takovém zobrazení, nazval L. Euler „afinní“ podle latinského affinis, tj. příbuzný.

Příklad 2. V odstavci 1.6 v [G] jsme probírali zobrazení, která se nazývala promítání. Zvolme například v trojrozměrném afinním prostoru $\mathbf{A}_3$ rovinu ϱ a přímku p, která je s rovinou ϱ různoběžná. Přiřaďme každému bodu X prostoru $\mathbf{A}_3$ jeho průmět $f(X) \in \varrho$ na rovinu ϱ ve směru přímky p, tj. $f(X) = X$ pro $X \in \varrho$ a $Xf(X) \parallel p$ pro $X \notin \varrho$ (obr. 2). Leží-li navzájem různé body B, C, D na přímce, tedy $D - B = \lambda(D - C)$, je též $f(D) - f(B) = \lambda(f(D) - f(C))$, a pokud není přímka

BC rovnoběžná s přímkou p, jsou body $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ navzájem různé. Leží-li body K, L na přímce rovnoběžné s přímkou p, jejich obrazy splývají.

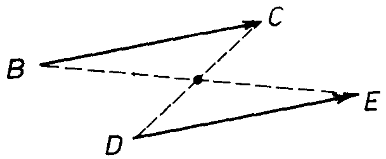
Uvedené dva příklady byly ukázkami tzv. afinních zobrazení, s nimiž jste se už seznámili v odstavci 1.6 v [G]. Jejich definici si uvedeme ještě jednou, v trochu pozměněné formě, pomocí dělicího poměru bodů.

Definice 1.1.1. Zobrazení f afinního prostoru $\mathbf{A}$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$ se nazývá afinní, jestliže má tuto vlastnost: Leží-li navzájem různé body B, C, D z prostoru $\mathbf{A}$ na přímce, pak jejich obrazy $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a jejich dělicí poměr se rovná dělicímu poměru jejich vzorů, tj. $(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D)$.

Můžeme také říci, že zobrazení f je právě tehdy afinní, jestliže z platnosti $D - B = \lambda(D - C)$ plyne $f(D) - f(B) = \lambda(f(D) - f(C))$. Nejsou-li totiž body B, C, D navzájem různé, je tato implikace splněna pro každé zobrazení.

Přímo z definice afinního zobrazení plyne, že všechny body přímky se zobrazí buď do jednoho bodu, nebo vytvoří jejich obrazy opět přímku. Jakmile se totiž dva různé body B, C zobrazí do různých bodů $f(B)$, $f(C)$ při afinním zobrazení f, je každý bod Y přímky $f(B)\,f(C)$ obrazem určitého bodu X přímky BC, sice toho bodu X, pro který platí $(B, C; X) = (f(B), f(C); Y)$. Splývají-li body $f(B)$ a $f(C)$, je $f(X) = f(B)$ pro všechny body X přímky BC.

Dále plyne přímo z definice, že se při afinním zobrazení f zobrazí střed úsečky BC na střed úsečky $f(B)\,f(C)$. Je-li totiž D středem úsečky BC ($B \neq C$), leží body B, C, D na přímce a je $(B, C; D) = -1$. Body $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ pak buď splývají, nebo jsou navzájem různé, leží na jedné přímce a platí $(f(B), f(C); f(D)) = (B, C; D) = -1$, má tedy bod $f(D)$ vzhledem k bodům $f(B)$, $f(C)$ dělicí poměr -1, je tudíž i v tomto případě bod $f(D)$ středem úsečky $f(B)\,f(C)$. V případě $B = C$ platí tvrzení o obrazu středu samozřejmě.



Obr. 3

Nechť jsou v afinním prostoru $\mathbf{A}$ dány čtyři body B, C, D, E tak, že vektor $C - B$ se rovná vektoru $E - D$ (obr. 3). To platí právě tehdy, když střed úsečky BE splývá se středem úsečky CD, tj.

$$\tfrac{1}{2}(B + E) = \tfrac{1}{2}(C + D).$$

Je-li f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{A}'$, splynou podle předcházejícího středy úseček $f(B)\,f(E)$ a $f(C)\,f(D)$, tedy

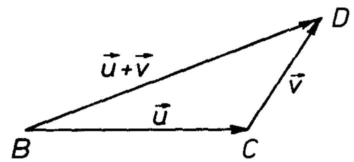
$$\tfrac{1}{2}(f(B) + f(E)) = \tfrac{1}{2}(f(C) + f(D)),$$

což je ekvivalentní s podmínkou $f(C) - f(B) = f(E) - f(D)$. Můžeme tedy shrnout: Jsou-li dvě uspořádané dvojice bodů B, C a D, E umístěním téhož vektoru $\mathbf{u}$ ze zaměření $\mathbf{V}$ afinního prostoru $\mathbf{A}$ (tj. $C - B = E - D$) a je-li f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{A}'$, jsou také uspořádané dvojice $f(B)$, $f(C)$ a $f(D)$, $f(E)$ umístěním téhož vektoru ze zaměření $\mathbf{V}'$ afinního prostoru $\mathbf{A}'$. Proto můžeme k afinnímu zobrazení f přiřadit zobrazení $\bar{f}$, které zobrazuje zaměření $\mathbf{V}$ afinního prostoru $\mathbf{A}$ do zaměření $\mathbf{V}'$ afinního prostoru $\mathbf{A}'$ předpisem

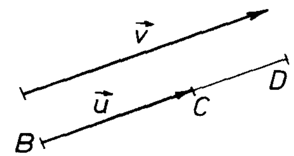
$$\mathbf{u} = C - B \Rightarrow \bar{f}(\mathbf{u}) = f(C) - f(B).$$

Podle předcházejícího je tímto předpisem zobrazení $\bar{f}$ skutečně definováno, protože vektor $f(C) - f(B)$ závisí opravdu jen na vektoru $\mathbf{u}$, nikoliv na jeho umístění v prostoru $\mathbf{A}$.

Zřejmě je $\bar{f}(\mathbf{o}) = f(B) - f(B) = \mathbf{o}$. Pro dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ můžeme zvolit jejich umístění tak, že $\mathbf{u} = C - B$, $\mathbf{v} = D - C$, pak je $\mathbf{u} + \mathbf{v} = D - B$ (obr. 4). Dále je $\bar{f}(\mathbf{u}) = f(C) - f(B)$, $\bar{f}(\mathbf{v}) = f(D) - f(C)$ a $\bar{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(D) - f(B)$, tudíž $\bar{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \bar{f}(\mathbf{u}) + \bar{f}(\mathbf{v})$.



Obr. 4



Obr. 5

Platí-li pro dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ vztah $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, můžeme zvolit body B, C, D tak, že $\mathbf{u} = C - B$, $\mathbf{v} = D - B$ (obr. 5). Body B, C, D leží na jedné přímce, a protože je $D - B = \lambda(C - B)$, je též $f(D) - f(B) = \lambda(f(C) - f(B))$ pro každé afinní zobrazení f. To znamená, že $\bar{f}(\mathbf{v}) = \lambda\bar{f}(\mathbf{u})$. Tím jsme ukázali, že zobrazení $\bar{f}$ má tyto vlastnosti:

$$\bar{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \bar{f}(\mathbf{u}) + \bar{f}(\mathbf{v}),$$
$$\bar{f}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\bar{f}(\mathbf{u})$$

pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ a všechna reálná čísla λ. Zobrazení $\bar{f}$ je tudíž homomorfismus (lineární zobrazení) vektorového prostoru $\mathbf{V}$ do vektorového prostoru $\mathbf{V}'$ a je jednoznačně přiřazeno, asociováno zobrazení f. Nazývá se proto *asociovaný homomorfismus* afinního zobrazení f. Porovnejte obdržený výsledek s definicí 1.6.1 v [G].

Ke každému afinnímu zobrazení f afinního prostoru $\mathbf{A}$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$ je tedy jednoznačně přiřazen homomorfismus $\bar{f}$ zaměření $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{A}$ do zaměření $\mathbf{V}'$ prostoru $\mathbf{A}'$. Vzniká přirozeně otázka, zda obráceně k libovolně zvolenému homomorfismu $\bar{f}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ existuje afinní zobrazení f: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ tak, aby zvolený homomorfismus $\bar{f}$ byl asociovaným homomorfismem k zobrazení f. Víme, že afinní zobrazení f a asociovaný homomorfismus $\bar{f}$ jsou vázány vztahem

$$f(C) - f(B) = \bar{f}(C - B),$$

proto musí pro zobrazení f platit

$$f(X) = f(B) + \bar{f}(X - B).$$

Vidíme, že zobrazení f je jednoznačně určeno, jakmile je dáno zobrazení $\bar{f}$ a obraz $f(B)$ jednoho bodu B.

Ukážeme si ještě, že zobrazení f je afinní. Nechť je tedy $\bar{f}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ homomorfismus, $B \in \mathbf{A}$, $B' \in \mathbf{A}'$. Přiřaďme každému bodu $X \in \mathbf{A}$ bod $f(X) \in \mathbf{A}'$ předpisem

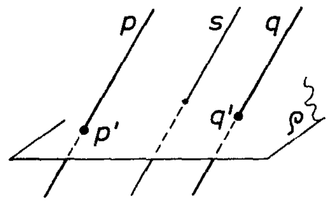
$$f(X) = B' + \bar{f}(X - B).$$

Pak je zřejmě $f(B) = B'$, a jestliže pro body X, Y, Z z prostoru $\mathbf{A}$ platí $Z - X = \lambda(Z - Y)$, je $f(Z) - f(X) = [B' + \bar{f}(Z - B)] - [B' + \bar{f}(X - B)] = \bar{f}(Z - B) - \bar{f}(X - B) = \bar{f}(Z - X) = \bar{f}(\lambda(Z - Y)) = \lambda\bar{f}(Z - Y)$, podobně $f(Z) - f(Y) = \bar{f}(Z - Y)$, takže $f(Z) - f(X) = \lambda(f(Z) - f(Y))$. To znamená, že f je afinní zobrazení a jeho asociovaným zobrazením je výchozí homomorfismus $\bar{f}$.

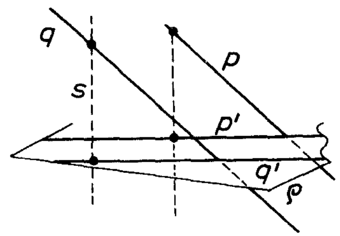
Své dosavadní úvahy shrneme ve větu.

Věta 1.1.1. Ke každému afinnímu zobrazení f afinního prostoru $\mathbf{A}$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$ existuje právě jeden tzv. asociovaný homomorfismus $\bar{f}$ zaměření $\mathbf{V}$ afinního prostoru $\mathbf{A}$ do zaměření $\mathbf{V}'$ afinního prostoru $\mathbf{A}'$. Zobrazení f a $\bar{f}$ jsou vázána vztahem $f(B + \mathbf{u}) = f(B) + \bar{f}(\mathbf{u})$ pro každý bod $B \in \mathbf{A}$ a každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Obráceně, je-li dáno lineární zobrazení, tj. homomorfismus $\bar{f}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ a dvojice bodů B, B', $B \in \mathbf{A}$, $B' \in \mathbf{A}'$, pak existuje právě jedno afinní zobrazení f: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, jehož asociovaným homomorfismem je dané lineární zobrazení $\bar{f}$ a obrazem bodu B je při zobrazení f bod B'. Zobrazení f je dáno předpisem $f(X) = B' + \bar{f}(X - B)$ pro každý bod $X \in \mathbf{A}$.

Nechť je f: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$, $\bar{f}$ k němu asociovaný homomorfismus. Předpokládejme, že p, q jsou navzájem rovnoběžné přímky v afinním prostoru $\mathbf{A}$, přímka p nechť je určena bodem P a nenulovým vektorem $\mathbf{u}$, přímka q bodem Q a týmž vektorem $\mathbf{u}$. Každý bod přímky p lze tedy psát ve tvaru $X = P + t\mathbf{u}$, každý bod přímky q má tvar $Y = Q + s\mathbf{u}$ $(t, s \in \mathbf{R})$. Je-li $\bar{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, je $f(X) = f(P) + t\bar{f}(\mathbf{u}) = f(P)$, $f(Y) = f(Q)$, přímka p se zobrazí celá do bodu $f(P)$, přímka q se zobrazí do bodu $f(Q)$. Je-li $\bar{f}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{o}$, je $f(X) = f(P) + t\bar{f}(\mathbf{u})$, $f(Y) = f(Q) + s\bar{f}(\mathbf{u})$, přímka p se zobrazí na přímku danou bodem $f(P)$ a nenulovým vektorem $\bar{f}(\mathbf{u})$, přímka q se zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou určenou bodem $f(Q)$ a týmž vektorem $\bar{f}(\mathbf{u})$. Platí tedy věta 1.1.2.



Obr. 6



Obr. 7

Věta 1.1.2. Při afinním zobrazení se dvě rovnoběžné přímky zobrazí buď na dvě rovnoběžné přímky, nebo se každá z nich zobrazí do bodu.

Dobře je vidět tato vlastnost afinního zobrazení v případě rovnoběžného promítání třeba třídimenzionálního afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ do afinní roviny ϱ ve směru přímky s, která je s rovinou ϱ různoběžná. Jsou-li přímky p, q rovnoběžné s přímkou s, zobrazí se obě do bodu (obr. 6), v opačném případě se přímky p, q promítnou do rovnoběžných přímek p', q' (obr. 7), které mohou popřípadě i splynout.

Dále platí věta 1.1.3.

Věta 1.1.3. Afinní zobrazení f je právě tehdy prostým zobrazením afinního prostoru $\mathbf{A}$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$, je-li k němu asociovaný homomorfismus prostým zobrazením zaměření $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{A}$ do zaměření $\mathbf{V}'$ prostoru $\mathbf{A}'$. Afinní zobrazení f zobrazuje afinní prostor $\mathbf{A}$ na afinní prostor $\mathbf{A}'$ právě tehdy, zobrazuje-li asociované lineární zobrazení $\bar{f}$ vektorový prostor $\mathbf{V}$ na vektorový prostor $\mathbf{V}'$.

Důkaz. Pro každé dva body $X, Y \in \mathbf{A}$ platí $f(X) - f(Y) = \bar{f}(X - Y)$. Není-li zobrazení f prosté, existují v prostoru $\mathbf{A}$ dva různé body X, Y, pro které je $f(X) = f(Y)$. Pak je $\bar{f}(X - Y) = \mathbf{o}$ a $X - Y \neq \mathbf{o}$, tudíž není zobrazení $\bar{f}$ prosté. Není-li obráceně zobrazení $\bar{f}$ prosté, existuje nenulový vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tak, že $\bar{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$. Pak je $f(X + \mathbf{u}) = f(X) + \bar{f}(\mathbf{u}) = f(X)$ a $X + \mathbf{u} \neq X$, proto není zobrazení f prosté. Jestliže je zobrazení f zobrazením prostoru $\mathbf{A}$ na prostor $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{v}$ je libovolný vektor z $\mathbf{V}'$, můžeme zvolit body $K, L \in \mathbf{A}'$ tak, že $\mathbf{v} = K - L$. K bodům K, L existují body $M, N \in \mathbf{A}$ tak, že $f(M) = K$, $f(N) = L$. Pak je $\mathbf{v} = f(M) - f(N) = \bar{f}(M - N)$. Tím jsme dokázali, že $\bar{f}$ je zobrazením prostoru $\mathbf{V}$ na prostor $\mathbf{V}'$. Je-li obráceně $\bar{f}$ zobrazením prostoru $\mathbf{V}$ na prostor $\mathbf{V}'$ a Z libovolný bod z $\mathbf{A}'$, zvolíme libovolný bod $B \in \mathbf{A}$ a položíme $\mathbf{v} = Z - f(B)$. Podle předpokladu existuje vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tak, že $\mathbf{v} = \bar{f}(\mathbf{u})$. To znamená, že $Z = f(B) + \bar{f}(\mathbf{u}) = f(B + \mathbf{u})$. Proto je f zobrazením prostoru $\mathbf{A}$ na prostor $\mathbf{A}'$. Tím je důkaz věty 1.1.3 dokončen.

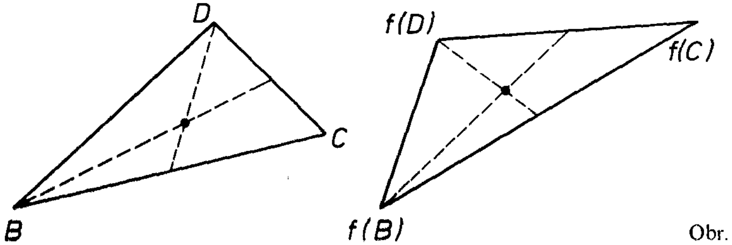
Poznámka. Existuje-li prosté lineární zobrazení φ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ dimenze n do vektorového prostoru $\mathbf{W}$ dimenze m, musí být $n \leqq m$. Existuje-li homomorfismus φ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ na vektorový prostor $\mathbf{W}$, je $n \geqq m$. Je-li φ izomorfismus $\mathbf{V}$ na $\mathbf{W}$, je $n = m$. Z tohoto tvrzení a z předcházející věty vyplývá, že prosté afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ dimenze n do afinního prostoru $\mathbf{A}'_m$ dimenze m existuje jen tehdy, je-li $n \leqq m$, zatímco afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n$ na prostor $\mathbf{A}'_m$ existuje jen tehdy, platí-li $n \geqq m$. Existuje-li vzájemně jednoznačné afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n$ na prostor $\mathbf{A}'_m$, mají oba prostory stejnou dimenzi, tj. $n = m$. Mají-li prostory $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{A}'_n$ stejnou dimenzi n a je-li afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n$ do prostoru $\mathbf{A}'_n$ prosté,pak je též zobrazením na prostor $\mathbf{A}'_n$. Obráceně, je-li zobrazením na prostor $\mathbf{A}'_n$, je též zobrazením prostým.

Nechť jsou dány v n-rozměrném afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ lineárně nezávislé body $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (vektory $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0$ jsou lineárně nezávislé). To je podmínka ekvivalentní s podmínkou, že body $P_0, P_1, \ldots, P_n$ neleží v žádné nadrovině prostoru $\mathbf{A}_n$. Každé afinní zobrazení f afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$ je podle předcházejícího jednoznačně určeno obrazem $f(P_0)$ bodu P_0 a svým asociovaným homomorfismem $\bar{f}$. Zobrazení $\bar{f}$ je zase jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze, třeba báze $\langle P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0 \rangle$. Obraz $\bar{f}(P_j - P_0)$ vektoru $P_j - P_0$ je podle vztahu $\bar{f}(P_j - P_0) = f(P_j) - f(P_0)$ určen obrazem $f(P_j)$ bodu P_j a bodem $f(P_0)$. Platí proto věta 1.1.4.

Věta 1.1.4. Afinní zobrazení f n-dimenzionálního afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$ je jednoznačně určeno obrazy $f(P_0), f(P_1), \ldots, f(P_n)$ lineárně nezávislých bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ prostoru $\mathbf{A}_n$. K libovolně zvoleným bodům $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n$ prostoru $\mathbf{A}'$ existuje právě jedno afinní zobrazení f prostoru $\mathbf{A}_n$ do prostoru $\mathbf{A}'$ tak, že $f(P_j) = P'_j$ pro $j = 0, 1, \ldots, n$.

Příklad 3. Afinní zobrazení afinní roviny $\mathbf{A}_2$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$ je podle předcházející věty jednoznačně určeno obrazy vrcholů některého trojúhelníku BCD v rovině $\mathbf{A}_2$. Mohou nastat tyto tři případy:

1. Body $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ tvoří v prostoru $\mathbf{A}'$ trojúhelník. Zobrazení f je pak prosté, asociované zobrazení $\bar{f}$ zobrazuje lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u} = C - B$, $\mathbf{v} = D - B$ na lineárně nezávislé vektory $\bar{f}(\mathbf{u}) = f(C) - f(B)$, $\bar{f}(\mathbf{v}) = f(D) - f(B)$, obrazem roviny $\mathbf{A}_2$ je rovina v $\mathbf{A}'$, určená body $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$. Protože prosté afinní zobrazení zachovává dělicí poměr, zobrazí se těžnice a těžiště trojúhelníku BCD na těžnice a těžiště trojúhelníku $f(B)f(C)f(D)$, obr. 8.



Obr. 8

2. Body $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ leží na jedné přímce, avšak nesplývají v jeden bod, nechť je například $f(C) \neq f(B)$, $f(D)$ leží na přímce $f(B)f(C)$. Na přímce BC pak leží právě jeden bod E tak, že $f(E) = f(D)$. Zobrazení f není prosté, například všechny body přímky ED se zobrazí do bodu $f(D)$. Obrazem roviny $\mathbf{A}_2$ je přímka $f(B)f(C)$.
3. Body $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ splývají, zobrazení f je konstantní, všechny body roviny $\mathbf{A}_2$ se zobrazí do bodu $f(B)$.

1.2 Analytické vyjádření afinního zobrazení

Nechť je v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ dimenze n dána lineární soustava souřadnic repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$, v afinním prostoru $\mathbf{A}'_m$ je dána lineární soustava souřadnic repérem $\langle Q, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$. Nechť je f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n$ do prostoru $\mathbf{A}'_m$ a $\bar{f}$ k němu asociovaný homomorfismus. Položme

$$\bar{f}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{d}_j, \qquad f(P) = Q + \sum_{j=1}^{m} b_j\mathbf{d}_j.$$

Pak pro bod

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$$

platí

$$f(X) = f(P) + \bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) = f(P) + \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{f}(\mathbf{e}_i) =$$

$$= Q + \sum_{j=1}^{m} b_j\mathbf{d}_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{d}_j = Q + \sum_{j=1}^{m} x'_j\mathbf{d}_j,$$

kde

(1) $$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Pro vektor

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\mathbf{e}_i \in \mathbf{V}$$

je

$$\bar{f}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i\bar{f}(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\mathbf{d}_j = \sum_{j=1}^{m} u'_j\mathbf{d}_j,$$

kde

(1') $$u'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Při zobrazení f se tedy bod X prostoru $\mathbf{A}_n$ o souřadnicích $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ zobrazuje do bodu $f(X)$ prostoru $\mathbf{A}'_m$ o souřadnicích $[x'_1, x'_2, \ldots, x'_m]$, přičemž se souřadnice bodu $f(X)$ vypočtou ze souřadnic bodu X podle rovnic (1). Přitom jsou souřadnice bodu X vzaty vzhledem k lineární soustavě souřadnic dané repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$, čísla $x'_1, \ldots, x'_m$ jsou souřadnice bodu $f(X)$ vzhledem k lineární soustavě souřadnic dané repérem $\langle Q, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$. Říkáme, že rovnice (1) jsou rovnicemi afinního zobrazení f vzhledem k zvoleným lineárním soustavám souřadnic.

Vektor $\mathbf{u}$, který má vzhledem k bázi $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ souřadnice $u_1, \ldots, u_n$, se při asociovaném homomorfismu $\bar{f}$ k afinnímu zobrazení f zobrazuje na vektor, který má vzhledem k bázi $\langle \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$ souřadnice $u'_1, \ldots, u'_m$, jež jsou dány rovnicemi (1').

Obráceně, jsou-li dána reálná čísla $a_{ij}, b_j, i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m$ a přiřadíme-li každému bodu X prostoru $\mathbf{A}_n$ o souřadnicích $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ vzhledem k zvolené lineární soustavě souřadnic v $\mathbf{A}_n$ bod X' z $\mathbf{A}'_m$, který má vzhledem k zvolené lineární soustavě souřadnic v $\mathbf{A}'_m$ souřadnice $[x'_1, x'_2, \ldots, x'_m]$, a to tak, že jsou splněny rovnice (1), dostaneme zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n$ do prostoru $\mathbf{A}'_m$, které je afinní. Platí-li totiž pro body $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, \ldots, y_n]$, $Z = [z_1, \ldots, z_n]$ z $\mathbf{A}_n$ vztah $Z - X = \lambda(Z - Y)$, je $z_i - x_i = \lambda(z_i - y_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pro souřadnice $[x'_1, \ldots, x'_m]$, $[y'_1, \ldots, y'_m]$, $[z'_1, \ldots, z'_m]$ obrazů X', Y', Z' bodů X, Y, Z pak platí

$$z'_j - x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(z_i - x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(z_i - y_i),$$

$$z'_j - y'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(z_i - y_i), \quad \text{tedy} \quad Z' - X' = \lambda(Z' - Y'),$$

odkud je vidět, že uvažované zobrazení je afinní.

Rovnice (1) můžeme psát též v maticovém tvaru:

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm} \end{pmatrix} + (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

nebo ve tvaru $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B}$,
kde

$$\mathbf{X}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$$

je matice typu $(1, m)$ složená ze souřadnic bodu $f(X)$,

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

je matice tvořená ze souřadnic bodu X,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm} \end{pmatrix}$$

je matice typu (n, m), v jejímž i-tém řádku jsou souřadnice vektoru $\bar{f}(\mathbf{e}_i)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ je matice, jejíž prvky jsou souřadnice bodu $f(P)$.

Přitom jsou souřadnice všech bodů prostoru $\mathbf{A}_n$ vzaty vzhledem k lineární soustavě souřadnic dané repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$, souřadnice bodů v prostoru $\mathbf{A}_m$ vzhledem k lineární soustavě souřadnic určené repérem $\langle Q, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$, podobně pro souřadnice vektorů.

Příklad 1. V afinní rovině je dán trojúhelník BCD. Zvolme v ní repér $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, a tím i lineární soustavu souřadnic takto: $P = B$, $\mathbf{e}_1 = C - B$, $\mathbf{e}_2 = D - B$. Víme, že existuje právě jedno afinní zobrazení f afinní roviny trojúhelníku BCD do třídimenzionálního afinního prostoru $\mathbf{A}_3$, které zobrazí bod B do bodu $B' = [1, 0, 0]$, bod C do bodu $C' = [0, 1, 0]$ a bod D do bodu $D' = [0, 0, 1]$, přičemž souřadnice bodů B', C', D' jsou vzaty vzhledem k nějaké lineární soustavě souřadnic v $\mathbf{A}_3$. Máme určit rovnice zobrazení f.

Řešení. Asociovaný homomorfismus k zobrazení f označíme jako obvykle $\bar{f}$. Je $f(P) = B' = [1, 0, 0]$, $\bar{f}(\mathbf{e}_1) = C' - B' = (-1, 1, 0)$, $\bar{f}(\mathbf{e}_2) = D' - B' = (-1, 0, 1)$, proto pro $X = [x, y]$, tj. $X = P + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ je $f(X) = f(P) + x\bar{f}(\mathbf{e}_1) + y\bar{f}(\mathbf{e}_2) = [1 - x - y, x, y]$. Tudíž je

$$\begin{aligned} x' &= 1 - x - y \\ y' &= x \\ z' &= y, \end{aligned}$$

kde $[x', y', z']$ jsou souřadnice bodu $f(X)$ v $\mathbf{A}_3$.

Vrátíme se k obecnému případu. Nechť je f afinní zobrazení n-dimenzionálního afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do m-dimenzionálního afinního prostoru $\mathbf{A}'_m$, $\bar{f}$ k němu asociovaný homomorfismus. Označme $\mathbf{W} = \bar{f}^{-1}(\mathbf{o})$ tzv. jádro lineárního zobrazení $\bar{f}$, tj. vektorový prostor všech těch vektorů ze zaměření prostoru $\mathbf{A}_n$, které se při zobrazení $\bar{f}$ zobrazí na nulový vektor. Zvolme teď v prostoru $\mathbf{A}_n$ repér $\langle P, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ tak, že vektory $\mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ tvoří bázi jádra $\mathbf{W}$. Pak jsou vektory $\bar{f}(\mathbf{e}_1)$, $\bar{f}(\mathbf{e}_2)$, $\ldots$, $\bar{f}(\mathbf{e}_r)$ lineárně nezávislé. V opačném případě by totiž existovala taková čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, ne vesměs rovna nule, pro která by platilo

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \bar{f}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{o},$$

tedy

$$\bar{f}\Big(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbf{e}_j\Big) = \mathbf{o} \Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbf{e}_j \in \mathbf{W} \Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=r+1}^{n} u_i \mathbf{e}_i.$$

To by však byl spor, protože vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jsou lineárně nezávislé a aspoň jedno z čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ je nenulové. Položme $\mathbf{d}_1 = \bar{f}(\mathbf{e}_1), \ldots, \mathbf{d}_r = \bar{f}(\mathbf{e}_r)$ a doplňme tyto lineárně nezávislé vektory na bázi $\langle \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r, \mathbf{d}_{r+1}, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$ zaměření prostoru $\mathbf{A}'_m$. Položíme-li ještě $Q = f(P)$, dostáváme tak v $\mathbf{A}'_m$ repér $\langle Q, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$.

Pro $X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$ je $f(X) = Q + \sum_{i=1}^{r} x_i \mathbf{d}_i$, protože $\bar{f}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{d}_i$ pro $i = 1, 2, \dots, r$ a $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{o}$ pro $i = r + 1, \dots, n$. Má tedy bod $f(X)$ vzhledem k lineární soustavě souřadnic dané repérem $\langle Q, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$ souřadnice $x'_1, \dots, x'_m$, které souvisí se souřadnicemi $x_1, \dots, x_n$ bodu X rovnicemi

$$(2)\qquad \begin{aligned} x'_1 &= x_1 & x'_{r+1} &= 0 \\ x'_2 &= x_2 & x'_{r+2} &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \\ x'_r &= x_r & x'_m &= 0. \end{aligned}$$

Přitom souřadnice bodu X jsou vzaty vzhledem k lineární soustavě souřadnic dané repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Na závěr odstavce si odvozené výsledky shrneme do věty.

Věta 1.2.1. Každé afinní zobrazení $f\colon \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}'_m$ je vzhledem k daným lineárním soustavám souřadnic v $\mathbf{A}_n$ a $\mathbf{A}'_m$ dáno rovnicemi tvaru (1). Obráceně je rovnicemi tvaru (1) dáno afinní zobrazení $f\colon \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}'_m$. Ke každému afinnímu zobrazení $f\colon \mathbf{A}_n \to \mathbf{A}'_m$ lze zvolit v $\mathbf{A}_n$ a $\mathbf{A}'_m$ lineární soustavy souřadnic tak, že zobrazení f je vzhledem k nim dáno rovnicemi tvaru (2), kde $r \leqq n$, $r \leqq m$. Je-li $r = m$, je zobrazení f zobrazením prostoru $\mathbf{A}_n$ na prostor $\mathbf{A}'_m$; je-li $r = n$, je zobrazení f prosté.

Příklad 2. V afinní rovině $\mathbf{A}_2$ a v afinním třírozměrném prostoru $\mathbf{A}_3$ jsou zvoleny lineární soustavy souřadnic. Zjistěte, zda existuje afinní zobrazení $f\colon \mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_3$, při kterém se body $B = [1, 0]$, $C = [0, 1]$, $D = [2, p]$ zobrazí po řadě na body $B' = [2, 1, -1]$, $C' = [3, 2, 0]$, $D' = [1, 0, 2]$. Proveďte diskusi vzhledem k parametru p. Napište rovnice tohoto zobrazení vzhledem k zvoleným lineárním soustavám souřadnic.

Řešení. Body B, C, D jsou lineárně nezávislé právě tehdy, je-li $p \neq -1$. V tom případě existuje podle věty 1.1.4 právě jedno afinní zobrazení požadovaných vlastností. Zobrazí-li se při něm bod $[x, y]$ na bod $[x', y', z']$, existují podle věty 1.2.1 reálná čísla a_{ij}, b_j ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) tak, že

$$(3)\qquad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + b_1 \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + b_2 \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + b_3. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za x, y souřadnice bodu B a za x', y', z' souřadnice bodu B', dostaneme pro čísla a_{ij}, b_j rovnice $2 = a_{11} + b_1$, $1 = a_{12} + b_2$, $-1 = a_{13} + b_3$. Dalších šest rovnic dostaneme obdobně pro dvojice C, C' a D, D'. Ze všech devíti rovnic pak vypočteme hledané koeficienty. Dosadíme-li je do rovnic (3), dostaneme rovnice hledaného zobrazení:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 3 \\ y' &= -x + 2 \\ z' &= \frac{1}{p+1}\,[(3 - p)\,x + 4y - 4] \end{aligned}$$

Je-li $p = -1$, jsou body B, C, D lineárně závislé, leží na jedné přímce. Dělicí poměr bodů B', C', D' nejenže se nerovná dělicímu poměru bodů B, C, D, ale není vůbec definován, protože body B', C', D' neleží v přímce. Žádné afinní zobrazení nemůže tedy zobrazit body B, C, D na body B', C', D'.

Příklad 3. Napište rovnici afinního zobrazení afinní roviny $\mathbf{A}_2$ do afinní přímky $\mathbf{A}_1$, při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body o souřadnici $[2]$, $[0]$, $[10]$. (Mluvíme-li o souřadnicích v $\mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_1$, předpokládáme, že jsou v těchto prostorech zvoleny lineární soustavy souřadnic.)

Řešení. Dané tři body v rovině $\mathbf{A}_2$ jsou lineárně nezávislé, proto existuje právě jedno afinní zobrazení požadovaných vlastností, bude dáno rovnicí $x' = ax + by + p$, z daných podmínek dostaneme pro hledané koeficienty a, b, p rovnice

$$\begin{aligned} 2 &= 2a + b + p \\ 0 &= 3a + 2b + p \\ 10 &= b + p, \end{aligned}$$

z nichž vypočteme a, b, p. Rovnice zobrazení je

$$x' = -4x + 2y + 8.$$

Příklad 4. V afinní rovině $\mathbf{A}_2$ je dán rovnoběžník $ABCD$. Existuje afinní zobrazení roviny $\mathbf{A}_2$ do sebe, při kterém se bod A zobrazí na sebe (je samodružný), bod B se zobrazí na bod C a bod C na bod D? Jestliže ano, který bod je obrazem středu S rovnoběžníku $ABCD$? Napište rovnice takového zobrazení v lineární soustavě souřadnic, kterou si zvolíte. Ověřte pomocí obdržených rovnic odpověď na poslední otázku.

Řešení. Protože body A, B, C jsou lineárně nezávislé, existuje právě jedno afinní zobrazení daných vlastností. Protože bod S je středem úsečky AC, bod C se zobrazí na bod D a bod A na sebe, je obrazem bodu S střed úsečky AD. Lineární soustavu souřadnic můžeme zvolit například repérem $\langle A, B - A, D - A \rangle$. Bod C má pak souřadnice $[1, 1]$, protože $ABCD$ je rovnoběžník. Rovnice daného zobrazení jsou $x' = x - y$, $y' = x$. Bod S má souřadnice $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, zobrazí se tedy na bod $[0, \frac{1}{2}]$, což je střed úsečky AD.

Na závěr odstavce si odvodíme, jak se změní rovnice (1'), změníme-li báze v zaměření $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}'_m$ afinních prostorů $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{A}'_m$. Nechť je φ lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ do vektorového prostoru $\mathbf{V}'_m$, $\mathscr{B} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ báze ve $\mathbf{V}_n$, $\mathscr{C} = \langle \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$ báze ve $\mathbf{V}'_m$, $\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{d}_j$. Pak je pro vektor $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\mathbf{e}_i$, $\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{m} u'_j\mathbf{d}_j$, kde $u'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i$, tj. $\mathbf{U}' = \mathbf{U}\mathbf{A}$, což jsou rovnice (1′), psané v maticovém tvaru.

Nechť je $\bar{\mathscr{B}} = \langle \bar{\mathbf{e}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n \rangle$ jiná báze vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, $\bar{\mathbf{e}}_i = \sum_{r=1}^{n} b_{ir}\mathbf{e}_r$, $(b_{ij}) = \mathbf{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B})$ je matice přechodu od báze $\mathscr{B}$ k bázi $\bar{\mathscr{B}}$. Položíme-li $\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{n} \bar{u}_r\bar{\mathbf{e}}_r$, je

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B}), \quad \text{kde} \quad \bar{\mathbf{U}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n).$$

Je-li $\bar{\mathscr{C}} = \langle \bar{\mathbf{d}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{d}}_m \rangle$ jiná báze ve $\mathbf{V}'_m$, $\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{m} \bar{u}'_j\bar{\mathbf{d}}_j$, dostaneme zcela obdobně $\mathbf{U}' = \bar{\mathbf{U}}'\mathbf{M}(\bar{\mathscr{C}}, \mathscr{C})$, neboli $\bar{\mathbf{U}}' = \mathbf{U}'\mathbf{M}(\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}})$, kde $\bar{\mathbf{U}}' = (\bar{u}'_1, \ldots, \bar{u}'_m)$. Proto je $\bar{\mathbf{U}}' = \mathbf{U}'\mathbf{M}(\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}}) = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{M}(\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}}) = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B})\,\mathbf{A}\mathbf{M}(\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}})$, tedy $\bar{\mathbf{U}}' = \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{A}}$, kde

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B})\,\mathbf{A}\mathbf{M}(\mathscr{C}, \bar{\mathscr{C}}).$$

Tento důležitý vztah mezi maticemi $\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{A}}$ budeme potřebovat při některých dalších definicích a větách.

Cvičení

1. Určete rovnici afinního zobrazení roviny $\mathbf{A}_2$ do přímky $\mathbf{A}_1$, při kterém se body [2, 1], [3, 2], [0, 1] zobrazí po řadě na body [2], [0], [8].
2. Určete parametry p, q tak, aby existovalo afinní zobrazení afinní roviny $\mathbf{A}_2$ do afinní roviny $\mathbf{A}'_2$, při kterém se zobrazí body [2, 1], [−2, 3], [4, 0] po řadě na body [p, 3], [0, q], [1, 1].
3. Pro které hodnoty p, q, r existuje afinní zobrazení afinní roviny do třírozměrného afinního prostoru tak, aby se body [1, 2], [2, 0], [4, −4] zobrazily po řadě na body [7, 1, −3], [2, 4, 5], [p, q, r]? Napište rovnice všech takovýchto zobrazení.
4. V afinní rovině je dán trojúhelník ABC. Kolik existuje afinních zobrazení dané roviny do sebe, při kterých se bod A zobrazí na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A? Který bod je obrazem těžiště T trojúhelníku ABC při takovém zobrazení? Napište rovnice takového afinního zobrazení v některé lineární soustavě souřadnic a ověřte, který bod je obrazem bodu T.
5. Předcházející cvičení řešte pro případ, že bod A je samodružný, bod B se zobrazí na bod C a bod C na bod B.

1.3 Restrikce a skládání afinních zobrazení. Inverzní afinní zobrazení, grupa afinních zobrazení

Je-li f afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'$ a je-li $\mathbf{A}''$ afinní podprostor prostoru $\mathbf{A}$, je restrikce (omezení) f'' afinního zobrazení f na prostor $\mathbf{A}''$ afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}''$ do prostoru $\mathbf{A}'$. To je jednak obsahem věty 1.6.1 z I. dílu této učebnice, plyne to však i přímo z definice afinního zobrazení. Přitom asociovaný homomorfismus $\bar{f}''$ k zobrazení f'' je restrikcí homomorfismu $\bar{f}$ asociovaného k afinnímu zobrazení f, omezujeme se na zaměření $\mathbf{V}''$ afinního prostoru $\mathbf{A}''$. To je přímý důsledek definice asociovaného zobrazení.

Nechť jsou $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ afinní prostory, f' afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{A}'$, f'' afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}'$ do prostoru $\mathbf{A}''$. Platí-li pro body B, C, D z prostoru $\mathbf{A}$ vztah $D - B = \lambda(D - C)$, platí i $f'(D) - f'(B) = \lambda(f'(D) - f'(C))$, protože f' je afinní zobrazení. Protože ale též f'' je afinní zobrazení, plyne z poslední rovnosti rovnost $f''(f'(D)) - f''(f'(B)) = \lambda[f''(f'(D)) - f''(f'(C))]$. Je proto složené zobrazení $f = f'' \circ f'$ afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{A}''$. K němu asociovaný homomorfismus označíme $\bar{f}$, homomorfismy asociované k zobrazením f', f'' označíme $\bar{f}'$, $\bar{f}''$. Pro body $B, C \in \mathbf{A}$ pak platí

$$\begin{aligned} \bar{f}(B - C) &= f(B) - f(C) = f''(f'(B)) - f''(f'(C)) = \\ &= \bar{f}''(f'(B) - f'(C)) = \bar{f}''(\bar{f}'(B - C)), \end{aligned}$$

proto je $\bar{f} = \bar{f}'' \circ \bar{f}'$.

Vidíme, že složení dvou afinních zobrazení je též afinní zobrazení, k němu asociovaný homomorfismus je složením asociovaných homomorfismů k afinním zobrazením, ze kterých bylo afinní zobrazení složeno.

Rovnice (2) z předcházejícího odstavce ukazují, že restrikce f' tam probíraného afinního zobrazení f na podprostor $\mathbf{A}''_r$, určený bodem P a vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r$ je prosté afinní zobrazení. Zobrazení f je složením projekce p prostoru $\mathbf{A}_n$ na podprostor $\mathbf{A}''_r$ (ve směru vektorového prostoru $\mathbf{W}$, generovaného vektory $\mathbf{e}_{r+1}$, $\mathbf{e}_{r+2}, \ldots, \mathbf{e}_n$) a restrikce f' zobrazení f na podprostor $\mathbf{A}''_r$. V souřadnicích mají uvažovaná zobrazení tato vyjádření:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n] \xrightarrow{p} [x_1, \ldots, x_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r}],$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0] \xrightarrow{f'} [x_1, \ldots, x_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-r}].$$

Pouze souřadnice posledního bodu jsou vzaty vzhledem k lineární soustavě souřadnic určené repérem $\langle Q, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r, \mathbf{d}_{r+1}, \ldots, \mathbf{d}_m \rangle$, souřadnice prvních dvou bodů jsou vzaty vzhledem k lineární soustavě souřadnic určené repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$. Pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$ je vektor $X - p(X)$ z vektorového prostoru $\mathbf{W}$.

Nechť je f afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}$ na afinní prostor $\mathbf{A}'$. Pokud je zobrazení f navíc prosté (což nastane např. v případě, že prostory $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ mají stejnou konečnou dimenzi), existuje k zobrazení f zobrazení inverzní. Protože zobrazení f zobrazuje každé tři navzájem různé kolineární body B, C, D opět v tři navzájem různé a kolineární body B', C', D', jejichž dělicí poměr se rovná dělicímu poměru bodů B, C, D, má tuto vlastnost i zobrazení inverzní f^{-1}. Jsou-li totiž K', L', M' tři navzájem různé a kolineární body v prostoru $\mathbf{A}'$ o dělicím poměru $\lambda = (K', L'; M')$, označíme K, L vzory bodů K', L' při zobrazení f. Na přímce KL zvolíme bod M tak, aby $(K, L; M) = \lambda$. Bod $f(M)$ pak leží na spojnici bodů $f(K) = K'$, $f(L) = L'$ a je $(K', L'; f(M)) = \lambda$. Protože je též $(K', L'; M') = \lambda$, je $f(M) = M'$, a tedy $f^{-1}(K') = K$, $f^{-1}(L') = L$, $f^{-1}(M') = M$. Zobrazení f^{-1} zobrazuje tudíž body na přímce (kolineární body) opět v kolineární body a zachovává dělicí poměr, proto je afinním zobrazením. Jelikož je $\bar{f}(L - K) = L' - K'$, kde $\bar{f}$ je homomorfismus asociovaný k zobrazení f, a zároveň je $f^{-1}(L') - f^{-1}(K') = L - K$, je zobrazení asociované k zobrazení f^{-1} totožné se zobrazením $\bar{f}^{-1}$.

Na základě uvedených tvrzení můžeme vyslovit tuto definici:

Definice 1.3.1. Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}$ na sebe nazveme afinní transformací prostoru $\mathbf{A}$ nebo stručně afinitou prostoru $\mathbf{A}$. Všechny afinity prostóru $\mathbf{A}$ tvoří při obvyklém skládání grupu, tzv. grupu afinních transformací prostoru $\mathbf{A}$ nebo také afinní grupu prostoru $\mathbf{A}$.

Nechť je f afinní zobrazení n-rozměrného afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe a nechť je v $\mathbf{A}_n$ pevně zvolena lineární soustava souřadnic. Pak jsou souřadnice bodu $X = [x_1, \ldots, x_n]$ a bodu $f(X) = [x'_1, \ldots, x'_n]$ vzhledem k téže zvolené soustavě souřadnic vázány rovnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n + b_1 \\ x'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n + b_2 \\ &\ldots \\ x'_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

viz rovnice (1). Zobrazení f je právě tehdy prosté, a tudíž i zobrazením prostoru $\mathbf{A}_n$ na sebe, je-li asociovaný homomorfismus izomorfismem. Asociovaný homomorfismus $\bar{f}$ zobrazuje vektor $\mathbf{e}_i$ na vektor o souřadnicích $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, a je tudíž izomorfismem právě tehdy, když je matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ regulární. Každý prvek afinní grupy prostoru $\mathbf{A}_n$ je proto vzhledem k pevně zvolené lineární soustavě souřadnic vyjádřen výše uvedenými rovnicemi, pro které je determinant matice (a_{ij}) různý od nuly. Rovnice můžeme psát též v maticovém tvaru $\mathbf{X}' = \mathbf{XA} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ je regulární matice. Je-li další afinita g prostoru $\mathbf{A}_n$ dána vzhledem k téže soustavě souřadnic maticovou rovnicí $\mathbf{X}' = \mathbf{XC} + \mathbf{D}$, je složená afinita dána rovnicí

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{XA} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} + \mathbf{D} = \mathbf{XAC} + (\mathbf{BC} + \mathbf{D}).$$

Afinity f, g jsou navzájem inverzní právě tehdy, je-li složená afinita identita, což nastane právě tehdy, když je matice $\mathbf{AC}$ jednotková a matice $\mathbf{BC} + \mathbf{D}$ nulová, tedy $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{D} = -\mathbf{BA}^{-1}$.

1.4 Samodružné body a směry afinních zobrazení

Při zobrazení prostoru $\mathbf{A}$ do sebe má smysl se zabývat otázkou, které prvky se zobrazí samy na sebe, jinými slovy řečeno, které prvky jsou *samodružné*.

Nechť je f afinní zobrazení n-rozměrného afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe. Víme, že bod X a jeho obraz $f(X)$ splývají právě tehdy, když mají oba body stejné souřadnice, ovšem vzhledem k téže soustavě souřadnic. Víme, že je možné zvolit v prostoru $\mathbf{A}_n$ lineární soustavy souřadnic tak, že bodu X o souřadnicích $[x_1, \ldots, x_n]$ vzhledem k první soustavě souřadnic odpovídá v zobrazení f bod $f(X)$ o souřadnicích $[x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0]$ vzhledem k druhé soustavě souřadnic. To je však vzor a jeho obraz vyjádřen vzhledem k různým soustavám souřadnic a nemůžeme dělat žádné závěry o tom, které body jsou samodružné. Zvolme tedy stejně jako v předcházejícím odstavci jednu lineární soustavu souřadnic, vzhledem k níž vyjádříme jak vzory, tak i jejich obrazy při afinním zobrazení f. Rovnice afinního zobrazení f pak mají tvar

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j + b_i, \quad \text{maticově} \quad \mathbf{X}' = \mathbf{XA} + \mathbf{B},$$

$[x_1, \ldots, x_n]$ jsou souřadnice bodu X a tvoří řádkovou matici $\mathbf{X}$, $[x'_1, \ldots, x'_n]$ jsou souřadnice jeho obrazu $f(X)$ a tvoří řádkovou matici $\mathbf{X}'$.

Bod X je v zobrazení f právě tehdy samodružný, platí-li

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j + b_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tj.

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1)\,x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n + b_1 &= 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - 1)\,x_2 + \ldots + a_{n2}x_n + b_2 &= 0 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + (a_{nn} - 1)\,x_n + b_n &= 0. \end{aligned}$$

To jsou rovnice pro souřadnice samodružných bodů afinního zobrazení f. Je to soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která má právě tehdy řešení, je-li hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy. Je-li tato podmínka splněna, tvoří všechna řešení lineární množinu dimenze $k = n - h$, kde h je hodnost matice soustavy. Geometricky to znamená, že množina samodružných bodů zobrazení f tvoří afinní podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$ dimenze k, což lze nahlédnout též touto úvahou: Jsou-li navzájem různé body B, C samodružnými body afinního zobrazení f, jsou samodružnými body všechny body X přímky BC, protože je pak

$$X - B = t(C - B), \quad t \in \mathbf{R},$$

$f(X) - f(B) = t(f(C) - f(B))$, ale $f(B) = B, f(C) = C$, takže $f(X) = X$.

Všechny samodružné body afinního zobrazení f afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe tvoří podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$, tedy buď prázdnou množinu (zobrazení f nemá žádný samodružný bod), nebo bod, nebo přímku, rovinu, atd. Splyne-li podprostor samodružných bodů zobrazení f s celým prostorem $\mathbf{A}_n$, je f identitou na $\mathbf{A}_n$.

Poznamenejme ještě, že stejně jako jsme mohli rovnice afinního zobrazení psát též v maticovém tvaru, můžeme i rovnice pro samodružné body afinního zobrazení psát v maticovém tvaru. Je-li afinní zobrazení f dáno maticovou rovnicí $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, jsou jeho samodružné body dány rovnicí $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková a $\boldsymbol{0}$ nulová matice, obě čtvercové s počtem řádků rovným dimenzi prostoru, na kterém je f definováno.

Podle věty 1.1.2 se dvě rovnoběžné přímky zobrazí při afinním zobrazení f buď každá na bod, nebo každá na přímku, přičemž jsou tyto obrazy rovnoběžných přímek opět rovnoběžné. Jestliže jsou vzájemně rovnoběžné přímka p a její obraz $f(p)$ a přímka q je rovnoběžná s přímkou p, musí být podle uvedené věty navzájem rovnoběžné i přímky q a $f(q)$. Připomeneme si, co je to směr.

Definice 1.4.1. Směrem afinního prostoru rozumíme jednorozměrný podprostor jeho zaměření. Směr je při afinním zobrazení prostoru do sebe samodružný, jestliže se zobrazí na sebe při asociovaném zobrazení.

Víme, že každý nenulový vektor ze zaměření afinního prostoru určuje jednoznačně právě jeden směr afinního prostoru. Dva nenulové vektory určují právě tehdy tentýž směr, když jsou lineárně závislé, když je jeden násobkem druhého. Také každá přímka afinního prostoru určuje směr, protože její zaměření je jednorozměrný podprostor v zaměření celého prostoru. Dvě přímky určují tentýž směr právě tehdy, když jsou rovnoběžné.

Někdy se směr zavádí tak, že dva nenulové vektory určují tentýž směr právě tehdy, když je jeden z nich kladným násobkem druhého. Pak není směr určen přímkou, nýbrž polopřímkou. Dvě polopřímky určují tentýž směr, leží-li v téže polorovině, jejíž hraniční přímka obsahuje počáteční body obou polopřímek, ne však polopřímky samotné. Každá přímka pak určuje dva směry, tzv. směry opačné. Takto definovaný směr odpovídá lépe běžnému názoru, podle kterého je třeba rozlišit směr Praha – Brno od směru Brno – Praha. Mluvíme pak někdy o tzv. orientovaném směru. Pro náš další výklad je však účelnější výše uvedená definice směru (neorientovaného).

Nechť je přímka p v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ určená bodem A a nenulovým vektorem $\boldsymbol{u}$, nechť f je afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe, $\bar{f}$ k němu asociovaný

homomorfismus. Je-li $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$, kde λ je reálné nenulové číslo, zobrazí se přímka p při afinním zobrazení f na přímku s ní rovnoběžnou, směr přímky p je při zobrazení f samodružný. Je-li $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$, zobrazí se přímka p a každá přímka s ní rovnoběžná do bodu. I v tomto případě je vektor $\bar{f}(\boldsymbol{u})$ násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$, je jeho nulovým násobkem, $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = 0 \,.\, \boldsymbol{u}$. Významné jsou tudíž ty nenulové vektory, které se zobrazí na svůj násobek.

Definice 1.4.2. Je-li φ homomorfismus vektorového prostoru $\mathbf{V}$ do sebe, pak vlastním vektorem lineárního zobrazení φ rozumíme každý nenulový vektor $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}$, pro který je $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ pro nějaké číslo λ. Takové číslo λ je pak při každém vlastním vektoru $\boldsymbol{u}$ jen jedno a nazývá se vlastní číslo homomorfismu φ, odpovídající vektoru $\boldsymbol{u}$.

Poznámka 1. Všimněte si, že o vlastních vektorech a číslech můžeme mluvit jen v případě homomorfismu vektorového prostoru do sebe, tedy v případě endomorfismu. Je-li φ lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathbf{V}$ do jiného vektorového prostoru $\mathbf{W}$, je pro $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}$ vektor $\varphi(\boldsymbol{u})$ z prostoru $\mathbf{W}$, proto je zpravidla bezpředmětná otázka, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}$, $\varphi(\boldsymbol{u})$ lineárně závislé.

Poznámka 2. Místo vlastní vektor a vlastní číslo se někdy používá termín charakteristický vektor, charakteristické číslo.

Přejděme nyní k výpočtu vlastních vektorů a vlastních čísel homomorfismu $\bar{f}$ asociovaného k afinnímu zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ dimenze n do sebe. Je-li $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ báze zaměření $\mathbf{V}_n$ prostoru $\mathbf{A}_n$ a $\bar{f}(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_j$, je pro vektor $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\boldsymbol{e}_i$, $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij})\, \boldsymbol{e}_j$. Tudíž je $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ právě tehdy, platí-li $\lambda u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i$, tj.

$$\begin{aligned}
\lambda u_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{n1}u_n \\
\lambda u_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{n2}u_n \\
&\ldots \\
\lambda u_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n,
\end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)\, u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{n1}u_n &= 0 \\
a_{12}u_1 + (a_{22} - \lambda)\, u_2 + \ldots + a_{n2}u_n &= 0 \\
\ldots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\, u_n &= 0.
\end{aligned}$$

To je pro $u_1, u_2, \ldots, u_n$ homogenní soustava lineárních rovnic, v níž však ještě neznáme koeficient λ. Můžeme ji psát též v maticovém tvaru $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$, kde $\boldsymbol{I}$ a $\boldsymbol{0}$ jsou jednotková a nulová matice typu (n, n).

Uvažovaná homogenní soustava lineárních rovnic má při libovolném λ řešení $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. To je tzv. triviální řešení, kterému odpovídá nulový vektor. Nás však v tomto případě zajímají jen nenulové vektory, musíme proto hledat netriviální řešení naší soustavy rovnic, tj. řešení, v němž je aspoň jedno z čísel $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nenulové. Z algebry víme, že homogenní soustava lineárních rovnic o stejném počtu neznámých, jako je počet rovnic, má právě tehdy netriviální řešení, jestliže se determinant soustavy rovná nule. Nemůžeme tudíž zvolit číslo λ libovolně, nýbrž jen tak, aby se determinant soustavy rovnal nule. Položíme-li determinant soustavy roven nule, dostaneme pro λ algebraickou rovnici n-tého stupně, tzv. *charakteristickou rovnici* lineárního zobrazení $\bar{f}$. Ke každému jejímu reálnému kořenu λ_0 pak najdeme aspoň jedno netriviální řešení $u_1, \ldots, u_n$, a tím nenulový vektor $\boldsymbol{u}$, pro který platí $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \lambda_0 \boldsymbol{u}$. Vektor $\boldsymbol{u}$ je tedy vlastním vektorem a číslo λ_0 vlastním číslem homomorfismu $\bar{f}$ a tímto postupem obdržíme všechny vlastní vektory zobrazení $\bar{f}$. Dříve než si celý postup ukážeme na několika příkladech, dokážeme, že charakteristická rovnice zobrazení $\bar{f}$ závisí opravdu jen na homomorfismu $\bar{f}$, nikoli na volbě báze prostoru $\mathbf{V}_n$.

Charakteristickou rovnici endomorfismu $\bar{f}$ dostaneme, položíme-li roven nule determinant z matice $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$, kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice a $\boldsymbol{A}$ je matice, jejíž i-tý řádek $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ je tvořen souřadnicemi obrazu i-tého vektoru báze $\mathscr{B} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ vzhledem k téže bázi $\mathscr{B}$, $f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j$. Na konci odstavce 1.2 jsme si odvodili, jak se změní matice $\boldsymbol{A}$, přejdeme-li od báze $\mathscr{B}$ k jiné bázi $\bar{\mathscr{B}}$. Matice $\boldsymbol{A}$ přejde v matici $\bar{\boldsymbol{A}}$,

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B})\, \boldsymbol{A} \boldsymbol{M}(\mathscr{B}, \bar{\mathscr{B}}),$$

neboť v našem případě, kdy zobrazujeme vektorový prostor do sebe, je $\mathscr{C} = \mathscr{B}$, $\bar{\mathscr{C}} = \bar{\mathscr{B}}$. Avšak matice $\boldsymbol{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B})$ a $\boldsymbol{M}(\mathscr{B}, \bar{\mathscr{B}})$ jsou navzájem inverzní. Označíme-li $\boldsymbol{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B}) = \boldsymbol{P}$, je $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$. Dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\bar{\boldsymbol{A}}$, ke kterým existuje regulární matice $\boldsymbol{P}$ tak, že $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$, se nazývají podobné. Je $\bar{\boldsymbol{A}} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} - \lambda \boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} - \lambda \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{P}^{-1}$, tudíž

$$\det(\bar{\boldsymbol{A}} - \lambda \boldsymbol{I}) = \det \boldsymbol{P} \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \det \boldsymbol{P}^{-1} = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}),$$

neboť $\det \boldsymbol{P} \,.\, \det \boldsymbol{P}^{-1} = 1$. Tím jsme dokázali oprávněnost mluvit o charakteristické rovnici endomorfismu. Není třeba doplnit vzhledem k jaké bázi.

Na závěr odstavce odvodíme ještě jednu větu o nule jako vlastním čísle homomorfismu.

Věta 1.4.1. Afinní zobrazení f afinního prostoru do sebe je právě tehdy prosté, jestliže nula není vlastním číslem asociovaného homomorfismu $\bar{f}$.

Důkaz. Není-li f prosté, není ani zobrazení $\bar{f}$ prosté, viz věta 1.1.3. Pak existuje nenulový vektor, který se zobrazí na nulový, tedy je nula vlastním číslem homomorfismu $\bar{f}$. Je-li nula vlastním číslem homomorfismu $\bar{f}$, existuje nenulový vektor, který se zobrazí na svůj nulový násobek, tedy na nulový vektor, proto není zobrazení $\bar{f}$, a tedy ani zobrazení f prosté. Ještě si připomeňme, že nula je právě tehdy kořenem charakteristické rovnice, rovná-li se při výše zavedeném označení determinant matice $\boldsymbol{A}$ nule.

Uvedeme si několik příkladů na výpočet samodružných bodů a směrů afinních zobrazení prostoru do sebe.

Příklad 1. Afinní zobrazení třídimenzionálního afinního prostoru do sebe je vzhledem k pevně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z + 1 \\ y' &= -x + y + z + 2 \\ z' &= -x - y + 3z + 3. \end{aligned}$$

Určete jeho samodružné body a směry.

Řešení. Rovnice pro souřadnice samodružných bodů jsou

$$\begin{aligned} -y + z + 1 &= 0 \\ -x \quad\; + z + 2 &= 0 \\ -x - y + 2z + 3 &= 0, \end{aligned}$$

odečteme-li od sebe poslední dvě rovnice, dostaneme první rovnici. Všechna řešení jsou tvaru $[t + 2, t + 1, t]$, samodružné body tvoří přímku danou bodem $[2, 1, 0]$ a vektorem $(1, 1, 1)$. Vektor (u, v, w) je vlastním vektorem asociovaného zobrazení, je-li nenulový a existuje-li číslo λ tak, že jsou splněny rovnice

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)u - v + w &= 0 \\ -u + (1 - \lambda)v + w &= 0 \\ -u - v + (3 - \lambda)w &= 0. \end{aligned}$$

Příslušná charakteristická rovnice pro λ je

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda, & -1, & 1 \\ -1, & 1 - \lambda, & 1 \\ -1, & -1, & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

po úpravě (třeba odečtením druhého řádku od třetího) dostaneme

$$-(\lambda - 2)^2 (\lambda - 1) = 0.$$

Rovnice má dva kořeny, $\lambda = 2$ a $\lambda = 1$. Dosadíme-li $\lambda = 2$ do výše uvedené soustavy pro u, v, w, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -u - v + w &= 0 \\ -u - v + w &= 0 \\ -u - v + w &= 0, \end{aligned}$$

tedy vlastně jen jednu rovnici, všechna řešení jsou tvaru $(u, v, u + v)$, všechny tyto vektory tvoří dvourozměrný podprostor a každý nenulový vektor z tohoto podprostoru určuje samodružný směr daného afinního zobrazení. Každý vektor tvaru $(u, v, u + v)$ se zobrazí při asociovaném zobrazení na svůj dvojnásobek. Vezmeme-li druhý kořen $\lambda = 1$, dostaneme obdobně soustavu

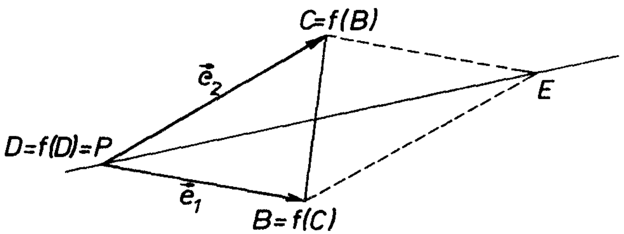
$$\begin{aligned} -v + w &= 0 \\ -u + w &= 0 \\ -u - v + 2w &= 0, \end{aligned}$$

řešením jsou všechny trojice tvaru (u, u, u), dostáváme tedy jeden samodružný směr určený vektorem $(1, 1, 1)$.

Příklad 2. Afinní zobrazení roviny do sebe je dáno rovnicemi $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + 2y + 3$. Určete jeho samodružné body a směry.

Řešení. Pro souřadnice samodružného bodu musí platit $x - y + 1 = 0, x + y + 3 = 0$, zobrazení má jediný samodružný bod $[-2, -1]$. Nenulový vektor (u, v) je vlastním vektorem asociovaného endomorfismu, platí-li $(2 - \lambda) u - v = 0$, $u + (2 - \lambda) v = 0$, kde vlastní číslo λ musí splňovat charakteristickou rovnici $(2 - \lambda)^2 + 1 = 0$. Tato rovnice však nemá reálná řešení, proto neexistují žádné vlastní vektory, a tedy ani žádné samodružné směry.

Příklad 3. V afinní rovině je dán trojúhelník BCD, afinní zobrazení f roviny trojúhelníku do sebe je dáno podmínkami $f(B) = C$, $f(C) = B$ a $f(D) = D$. Máme určit samodružné body a směry zobrazení f.



Obr. 9

Řešení. V tomto příkladu není soustava souřadnic předem dána, musíme si ji zvolit. Zvolíme ji například repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, kde $P = D$, $\mathbf{e}_1 = B - D$, $\mathbf{e}_2 = C - D$ (obr. 9). Je pak $f(P) = P$, $\bar{f}(\mathbf{e}_1) = f(B) - f(D) = C - D = \mathbf{e}_2$, $\bar{f}(\mathbf{e}_2) = f(C) - f(D) = B - D = \mathbf{e}_1$, kde $\bar{f}$ je asociované zobrazení k zobrazení f. Pro bod $X = P + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ je tedy $f(X) = P + x\mathbf{e}_2 + y\mathbf{e}_1$, zobrazení f přiřazuje každému bodu $X = [x, y]$ bod $f(X) = [x', y']$, kde $x' = y$, $y' = x$. Samodružné body jsou právě všechny ty body, pro jejichž souřadnice platí $x = y$, tedy všechny body tvaru $P + x(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = D + x((B - D) + (C - D)) = D + x(E - D)$, kde E je bod, kterým se trojúhelník BCD doplní na rovnoběžník $BECD$. Samodružné body jsou všechny body těžnice trojúhelníku BCD procházející bodem D. Pro vektor $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$ je $\bar{f}(\mathbf{u}) = u\mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_1$, tudíž je $\bar{f}(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ právě tehdy, platí-li $\lambda u = v$, $\lambda v = u$. Tato soustava má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, je-li $1 - \lambda^2 = 0$. Pro kořen $\lambda = 1$ dostaneme soustavu $u = v$, $v = u$, příslušnými vlastními vektory jsou všechny nenulové vektory tvaru $u(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = u(E - D)$, každý z nich se při zobrazení f zobrazí přímo na sebe. Pro kořen $\lambda = -1$ charakteristické rovnice dostaneme pro souřadnice odpovídajících vlastních vektorů soustavu rovnic $-u = v$, $-v = u$, jde o vektory tvaru $u(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = u(B - C)$, každý z nich se zobrazí na vektor opačný. Samodružné směry jsou směry přímek DE, BC, to jsou směry úhlopříček rovnoběžníku $BECD$.

Příklad 4. Napište rovnice afinního zobrazení, jestliže víte, že bod $[\sqrt{2}, 0, 0]$ je samodružný, že vektory $(1, 1, 0)$ a $(1, -1, 0)$ jsou vlastními vektory asociovaného homomorfismu, oba odpovídají stejnému vlastnímu číslu 2, zatímco vektor $(0, 1, 2)$ se zobrazí do vektoru opačného.

Řešení. Rovnice afinního zobrazení mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + b_1 \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z + b_2 \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3. \end{aligned}$$

Aby se vektor $(0, 1, 2)$ zobrazil na vektor opačný, musí platit

$$\begin{aligned} 0 &= a_{21} + 2a_{31} \\ -1 &= a_{22} + 2a_{32} \\ -2 &= a_{23} + 2a_{33}. \end{aligned}$$

Vektor $(1, 1, 0)$ se zobrazí na svůj dvojnásobek, proto platí

$$\begin{aligned} 2 &= a_{11} + a_{21} \\ 2 &= a_{12} + a_{22} \\ 0 &= a_{13} + a_{23}, \end{aligned}$$

stejně tak vektor $(1, -1, 0)$, tedy

$$\begin{aligned} 2 &= a_{11} - a_{21} \\ -2 &= a_{12} - a_{22} \\ 0 &= a_{13} - a_{23}. \end{aligned}$$

Bod $[\sqrt{2}, 0, 0]$ je samodružný, to znamená

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= a_{11}\sqrt{2} + b_1 \\ 0 &= a_{12}\sqrt{2} + b_2 \\ 0 &= a_{13}\sqrt{2} + b_3. \end{aligned}$$

Rovnice hledaného afinního zobrazení jsou:

$$\begin{aligned} x' &= 2x \qquad\qquad -\sqrt{2} \\ y' &= \quad 2y - \tfrac{3}{2}z \\ z' &= \qquad\quad -z \end{aligned}$$

Příklad 5. Najděte všechny afinity afinní roviny, při kterých je bod $[2, 1]$ samodružný a také směry určené vektory $(1, 1)$ a $(1, -2)$ jsou samodružné.

Řešení. Rovnice afinity budou mít tvar

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q. \end{aligned}$$

Bod $[2, 1]$ má být samodružný, musí tedy platit

$$\begin{aligned} 2 &= 2a + b + p \\ 1 &= 2c + d + q. \end{aligned}$$

Vektor $(1, 1)$ je vlastním vektorem, existuje tudíž číslo λ tak, že $\lambda = a + b$, $\lambda = c + d$. Číslo λ existuje právě tehdy, když platí $a + b = c + d$. Protože je též vektor $(1, -2)$ vlastním vektorem, musí existovat číslo μ (μ se nemusí rovnat λ) tak, že

$$\begin{aligned} \mu &= a - 2b \\ -2\mu &= c - 2d, \end{aligned}$$

tj. musí platit $-2(a - 2b) = c - 2d$. Z této rovnice a rovnice $a + b = c + d$ plyne, že $a = b + d$, $c = 2b$. Pak je $p = 2 - 3b - 2d$, $q = 1 - 4b - d$. Každá z hledaných afinit má rovnice tvaru

$$\begin{aligned} x' &= (b + d)\,x + by + 2 - 3b - 2d \\ y' &= \quad 2bx + dy + 1 - 4b - d. \end{aligned}$$

Aby byly obráceně tyto rovnice rovnicemi afinity, musí být $ad - bc = (b + d)\,d - 2b^2 = (d + 2b)(d - b) \neq 0$.

Cvičení

1. Určete všechny samodružné body a směry afinního zobrazení prostoru do sebe daného rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y + 6z - 2 \\ y' &= x \qquad\;\, + 3z - 1 \\ z' &= -x + y - 2z + 1. \end{aligned}$$

2. Napište rovnice všech afinních zobrazení roviny do sebe, při kterých jsou body $[1, 2]$, $[2, -1]$ samodružné.
3. Afinní zobrazení afinního prostoru do sebe je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= x - y + 2z - 7 \\ y' &= \qquad\; y + z - 5 \\ z' &= x - 2y + z + 6. \end{aligned}$$

Určete jeho samodružné body a směry.

4. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení prostoru do sebe, které má vzhledem k zvolené lineární soustavě souřadnic analytické vyjádření

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 2y + 2z + 1 \\ y' &= 2x + 3y - 3z \\ z' &= \qquad\quad\;\; y - z + 4. \end{aligned}$$

5. Určete samodružné body a směry afinního zobrazení afinní roviny do sebe, které má rovnice

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - x_2 + 6 \\ x_2' &= \qquad\;\; 3x_2 + 4. \end{aligned}$$

6. Je-li $\mathbf{u}$ vlastní vektor endomorfismu, λ_0 odpovídající vlastní číslo, $\mathbf{v}$ vlastní vektor téhož endomorfismu s vlastním číslem λ_1 a $\lambda_1 \neq \lambda_0$, pak jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně nezávislé. Dokažte.
7. Všechny vlastní vektory daného endomorfismu vektorového prostoru $\mathbf{V}$, kterým odpovídá totéž vlastní číslo, tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbf{V}$. Dokažte.
8. Pro která čísla a, b existuje afinní zobrazení afinní roviny do sebe tak, aby se body $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[1, a]$ zobrazily po řadě na body $[1, 0]$, $[1, a]$, $[b, a]$? Pro která a, b je toto zobrazení určeno jednoznačně? V tom případě určete jeho samodružné body a směry.

1.5 Posunutí, stejnolehlost

Nechť je f taková afinita afinního prostoru $\mathbf{A}$ na sebe, pro kterou je každý směr směrem samodružným. Pro každý nenulový vektor $\mathbf{u}$ ze zaměření $\mathbf{V}$ afinního prostoru $\mathbf{A}$ existuje tedy λ tak, že $\bar{f}(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$, kde $\bar{f}$ značí jako obvykle zobrazení asociované k zobrazení f. Koeficient λ sice nezávisí na vektoru $\mathbf{u}$, ale to musíme nejdříve dokázat. Nechť $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé vektory z $\mathbf{V}$, nechť $\bar{f}(\mathbf{u}) = \lambda_1\mathbf{u}$, $\bar{f}(\mathbf{v}) = \lambda_2\mathbf{v}$. Podle předpokladu existuje koeficient λ_3 tak, že $\bar{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda_3(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Z lineárnosti zobrazení $\bar{f}$ pak ovšem plyne $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} = \lambda_3(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Protože jsme předpokládali lineární nezávislost vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, musí být $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Jsou-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně závislé a nenulové, plyne z $\bar{f}(\mathbf{u}) = \lambda_1\mathbf{u}$

ihned $\bar{f}(\boldsymbol{v}) = \lambda_1 \boldsymbol{v}$. Proto pro všechny nenulové vektory z $\mathbf{V}$ je $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$, kde λ je konstanta. Pro nulový vektor platí ovšem poslední rovnost také. Konstanta λ je nenulová, v opačném případě by zobrazení f nebylo prosté, nebyla by to afinita. Tím jsme si dokázali následující větu.

Věta 1.5.1. Je-li při afinitě afinního prostoru na sebe každý směr samodružný, je asociovaný homomorfismus násobkem (nenulovým) identického izomorfismu.

Dále rozlišíme dva případy:

a) $\lambda = 1$, potom $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ pro každý vektor z $\mathbf{V}$. Nechť B je libovolný bod z prostoru $\mathbf{A}$, položme $\boldsymbol{a} = f(B) - B$. Pro každý bod X z $\mathbf{A}$ je $f(X) = f(B) + \bar{f}(X - B) = f(B) + (X - B) = X + \boldsymbol{a}$. Takové zobrazení se nazývá translace neboli posunutí. Je-li $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, je f identita; je-li $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, je f neidentické posunutí.

b) $\lambda \neq 1$, obdobně jako v předcházejícím případě je $f(X) = f(B) + \lambda(X - B)$. Bod X je právě tehdy samodružný, když $X = f(B) + \lambda(X - B)$, tj. $X - B = (f(B) - B) + \lambda(X - B)$, tedy

$$(1 - \lambda)(X - B) = f(B) - B.$$

Odtud plyne, že afinita má jediný samodružný bod X_0,

$$X_0 = B + \frac{1}{1 - \lambda}(f(B) - B).$$

Předpokládejme, že jsme právě tento samodružný bod zvolili za bod B, tj. $f(B) = B$. Pak je pro každý bod X z prostoru $\mathbf{A}$

$$f(X) - B = \lambda(X - B).$$

Body B, X a $f(X)$ jsou tedy vždy kolineární, v případě $X = B$ splývají v jeden bod, pro $X \neq B$ jsou to body navzájem různé a dělicí poměr $(f(X), X; B)$ se rovná λ. Pro každé dva body X, Y je $f(Y) - f(X) = \lambda(Y - X)$, obrazem každé úsečky je tedy úsečka s ní rovnoběžná. Popsané zobrazení se nazývá stejnolehlost, jeho jediný samodružný bod je tzv. střed stejnolehlosti, číslo λ ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$) je koeficient stejnolehlosti.

Také s pojmem stejnolehlost jste se seznámili již v I. díle učebnice v odstavci 1.6. Někdy je účelné zahrnout mezi stejnolehlosti i identitu jako stejnolehlost s koeficientem 1, za její střed pak můžeme zvolit libovolný bod prostoru.

Nechť f je stejnolehlost se středem S a koeficientem λ, g stejnolehlost se středem T a koeficientem μ, tedy pro každý bod X uvažovaného prostoru je

$$f(X) = S + \lambda(X - S), \quad g(X) = T + \mu(X - T).$$

Pak je $g(f(X)) = T + \mu(f(X) - T) = T + \mu(f(X) - S) + \mu(S - T) = T + \mu\lambda(X - S) + \mu(S - T)$. Pro složené zobrazení $g \circ f$ tedy platí $(g \circ f)(S) = T + \mu(S - T)$,

$$(g \circ f)(X) = (g \circ f)(S) + \lambda\mu(X - S).$$

V případě $\lambda\mu \neq 1$ je proto složené zobrazení $g \circ f$ opět stejnolehlost s koeficientem $\lambda\mu$ a středem P, pro který platí

$$P = T + \mu(S - T) + \lambda\mu(P - S),$$

odkud

$$(1 - \lambda\mu)(P - S) = (1 - \mu)(T - S), \quad P = S + \frac{1 - \mu}{1 - \lambda\mu}(T - S).$$

Je-li však $\lambda\mu = 1$, je složené zobrazení $g \circ f$ posunutí o vektor $(1 - \mu)(T - S)$, je pak $(g \circ f)(X) = X + (1 - \mu)(T - S)$.

Viděli jsme, že všechny stejnolehlosti afinního prostoru netvoří grupu, i kdybychom mezi stejnolehlosti zařadili i identitu, protože složením dvou stejnolehlostí můžeme dostat i translaci. Kdybychom složili stejnolehlosti f, g v obráceném pořadí, kdybychom byli vzali zobrazení $f \circ g$, byli bychom v případě $\lambda\mu = 1$ dostali posunutí o vektor $(1 - \lambda)(S - T)$, který je pro $T \neq S$ různý od vektoru $(1 - \mu)(T - S)$. Již tento jednoduchý příklad ukazuje, že skládání stejnolehlostí a tím i afinit není komutativní, že záleží na pořadí, v jakém jednotlivé afinity skládáme.

Příklad 1. Nechť je f stejnolehlost prostoru $\mathbf{A}$ se středem S a koeficientem λ, $\lambda \neq 1$, nechť je teď g posunutí téhož prostoru o nenulový vektor $\boldsymbol{a}$. Vyšetřete zobrazení $g \circ f$ a $f \circ g$.

Řešení. Podle předpokladu pro všechny body X daného afinního prostoru $\mathbf{A}$ platí

$$f(X) = S + \lambda(X - S), \quad g(X) = X + \boldsymbol{a},$$

proto

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = f(X) + \boldsymbol{a} = S + \boldsymbol{a} + \lambda(X - S).$$

Je tedy $g \circ f$ stejnolehlost s koeficientem λ, která zobrazuje bod S na bod $S + \boldsymbol{a}$ a má střed v bodě

$$T = S + \frac{1}{1 - \lambda}\boldsymbol{a}.$$

Podobně je $(f \circ g)(X) = f(g(X)) = S + \lambda((X - S) + \boldsymbol{a}) = S + \lambda\boldsymbol{a} + \lambda(X - S)$, jde opět o stejnolehlost s koeficientem λ, která má však střed v bodě $U = S + \dfrac{\lambda}{1 - \lambda}\boldsymbol{a}$.

Protože je $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ a $\lambda \neq 1$, jsou stejnolehlosti $g \circ f$ a $f \circ g$ různé.

Je tedy přirozené se ptát, zda netvoří grupu všechny stejnolehlosti prostoru **A** spolu se všemi translacemi prostoru **A**. Víme již, že složení dvou stejnolehlostí je stejnolehlost nebo translace a že složení stejnolehlosti a translace i translace a stejnolehlosti je stejnolehlost. Zřejmě složením posunutí o vektor $\boldsymbol{a}$ s posunutím o vektor $\boldsymbol{b}$ dostaneme posunutí o vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Zbývá otázka inverzních zobrazení. Je však úplně zřejmé, že inverzním zobrazením k posunutí o vektor $\boldsymbol{a}$ je posunutí o vektor $-\boldsymbol{a}$ a že k stejnolehlosti o středu S s koeficientem λ je inverzním zobrazením opět stejnolehlost se středem S a s koeficientem $\frac{1}{\lambda}$. Tím jsme vlastně dokázali další větu, před kterou však ještě zařadíme jednu definici.

Definice 1.5.1. Pro stejnolehlost a translaci (posunutí) prostoru **A** zavedeme společný název homotetická transformace nebo stručně homotetie prostoru **A**. Homotetie na afinním prostoru je tudíž taková afinita, při které je každý směr samodružný.

Věta 1.5.2. Všechny homotetie afinního prostoru **A** tvoří grupu, tzv. grupu homotetických transformací nebo grupu homotetií prostoru **A**. Je podgrupou grupy všech afinit prostoru **A**.

Důkaz: vyslovené věty je již obsažen v předcházejících úvahách o složených zobrazeních a inverzních zobrazeních. Plyne však i přímo z vyslovené definice homotetické transformace a z okolnosti, že směr, který je samodružný při dvou afinitách, je samodružný i při složené afinitě i při inverzní afinitě.

Zvolme v n-rozměrném afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ lineární soustavu souřadnic. Nechť je f homotetie prostoru $\mathbf{A}_n$ daná předpisem

$$f(X) = C + \lambda(X - B) \quad \text{pro} \quad X \in \mathbf{A}_n,$$

B, C jsou pevné body z prostoru $\mathbf{A}_n$, λ nenulové reálné číslo. Nechť je dále $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $f(X) = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$.

Pak je

$$x'_i = c_i + \lambda(x_i - b_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

V případě $\lambda = 1$ jsou to rovnice translace, a je-li $B = C$, je tato translace identitou. Je-li $\lambda \neq 1$, jsou to rovnice stejnolehlosti s koeficientem λ a se středem S,

$$S = \left[\frac{c_1 - \lambda b_1}{1 - \lambda}, \frac{c_2 - \lambda b_2}{1 - \lambda}, \dots, \frac{c_n - \lambda b_n}{1 - \lambda}\right].$$

Položíme-li $c_i - \lambda b_i = d_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, můžeme výše uvedené rovnice psát ve tvaru $x'_i = \lambda x_i + d_i$, v maticovém tvaru $\mathbf{X}' = \lambda\mathbf{X} + \mathbf{D}$ nebo $\mathbf{X}' = \mathbf{X}(\lambda\mathbf{I}) + \mathbf{D}$,

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice typu (n, n). Obráceně je každá rovnice $\mathbf{X}' = \lambda\mathbf{X} + \mathbf{D}$, $\lambda \neq 0$, maticovou rovnicí posunutí ($\lambda = 1$) nebo stejnolehlosti ($\lambda \neq 1$).

Příklad 2. Napište rovnice stejnolehlosti afinní roviny $\mathbf{A}_2$, která zobrazuje bod $B = [2, 0, -1]$ na bod $C = [0, 1, 3]$ a má koeficient $\lambda = -2$. Najděte její střed.

Řešení. Protože pro každý bod $X \in \mathbf{A}_2$ je $f(X) = f(B) - 2(X - B)$, je pro $X = [x, y]$, $f(X) = [x', y']$ (stejnolehlost jsme označili f)

$$\begin{aligned} x' &= \quad - 2(x - 2) = -2x + 4 \\ y' &= 1 - 2y \qquad\;\; = -2y + 1 \\ z' &= 3 - 2(z + 1) = -2z + 1. \end{aligned}$$

Souřadnice středu (samodružného bodu) musí splňovat rovnice $3x = 4$, $3y = 1$, $3z = 1$, střed má souřadnice $[\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

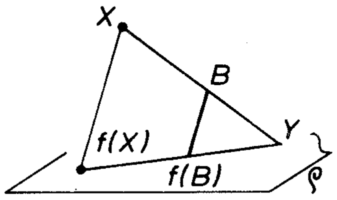
Cvičení

1. Určete p tak, aby existovala stejnolehlost se středem $[3, 2]$, zobrazující bod $[1, 4]$ na bod $[2, p]$. Napište rovnice této stejnolehlosti.
2. Složte stejnolehlost z předcházejícího cvičení s posunutím o vektor $(1, -2)$.
3. Napište rovnice homotetie, zobrazující bod $[3, 2]$ na bod $[2, 1]$ a bod $[1, -1]$ na bod $[0, ?]$. Určete její samodružné body.
4. Zobrazení třídimenzionálního afinního prostoru do sebe je dáno maticovou rovnicí $(x', y', z') = 4(x, y, z) + (3, 0, -6)$. Jaké je to zobrazení?

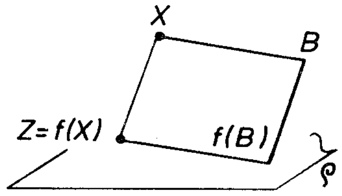
1.6 Základní afinity

Při studiu samodružných bodů afinního zobrazení prostoru **A** do sebe jsme viděli, že tyto body tvoří afinní podprostor afinního prostoru **A**. Je-li tímto podprostorem celý prostor **A**, je zobrazení identitou prostoru **A**. Další důležitý případ nastane, je-li množinou samodružných bodů nějaká nadrovina prostoru **A**. Takové afinní zobrazení f afinního prostoru **A** do sebe, v němž všechny samodružné body tvoří nadrovinu (označme ji ϱ), je například podle věty 1.1.4 jednoznačně určeno, je-li dán ještě obraz $f(B)$ některého bodu B, neležícího v nadrovině ϱ. Musí pak samozřejmě platit $f(B) \neq B$, protože bod B neleží v nadrovině ϱ, v množině všech samodružných bodů zobrazení f. Ukážeme si teď přímo, jak nadrovina ϱ a dvojice bodů B a $f(B)$ jednoznačně určují afinní zobrazení f. Rozlišíme nejdříve dva případy — zda bod $f(B)$ je nebo není bodem nadroviny ϱ.

Nechť platí $f(B) \in \varrho$. Ukážeme, že f je projekce prostoru **A** na nadrovinu ϱ ve směru vektoru $f(B) - B$ (obr. 10). Obraz každého dalšího bodu $X \notin \varrho$ dostaneme takto: Neleží-li bod X na spojnici $Bf(B)$ a není-li přímka BX rovnoběžná



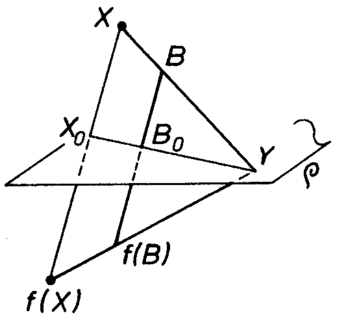
Obr. 10



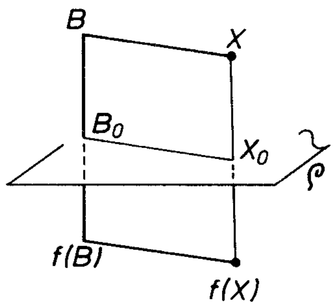
Obr. 11

s nadrovinou ϱ, označíme Y průsečík přímky BX s nadrovinou ϱ. Bod Y je v zobrazení f samodružný. Protože bod X leží na přímce BY, leží jeho obraz $f(X)$ na přímce $f(B)Y$ a dělicí poměr $(f(B), f(Y); f(X))$ se rovná dělicímu poměru $(B, Y; X)$. Proto musí být přímky $Bf(B)$ a $Xf(X)$ vzájemně rovnoběžné, neboť $f(Y) = Y$ a rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměr. Takže $f(X) \in \varrho$ a $Xf(X) \parallel Bf(B)$. Je-li přímka BX rovnoběžná s nadrovinou ϱ (obr. 11), můžeme zvolit v nadrovině ϱ bod Z tak, aby $Bf(B)ZX$ byl rovnoběžník, tedy $X - B = Z - f(B)$. Pak je $f(X) - f(B) = Z - f(B)$, protože body Z a $f(B)$ jsou při zobrazení f samodružné, tudíž $f(X) = Z$. Opět je $f(X) \in \varrho$ a $Xf(X) \parallel Bf(B)$. Leží-li konečně bod X na přímce $Bf(B)$, musí být $f(X) = f(B)$, protože obrazy bodů B a $f(B)$ při zobrazení f splývají. Ve všech případech je bod $f(X)$ průmětem bodu X do nadroviny ϱ ve směru vektoru $f(B) - B$.

Uvažujme nyní případ $f(B) \notin \varrho$. Pomocí věty 1.1.4 bychom mohli v tomto případě dokázat, že afinní zobrazení f je afinní transformace. Ukážeme si konstrukci obrazu $f(X)$ bodu $X \notin \varrho$. Rozlišíme ještě dvě možnosti. Nechť je nejdříve přímka $Bf(B)$ různoběžná s nadrovinou ϱ, její průsečík s nadrovinou ϱ označíme B_0. Neleží-li bod X na přímce $Bf(B)$ a není-li přímka BX rovnoběžná s nadrovinou ϱ, označíme obdobně jako v případě projekce Y průsečík přímky BX a nadroviny ϱ. Bod X leží na přímce BY, proto leží bod $f(X)$ na přímce $f(B)Y$.



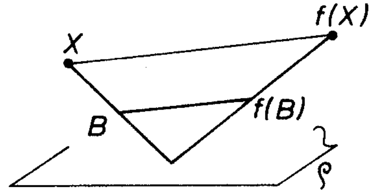
Obr. 12



Obr. 13

Protože afinní zobrazení zachovává dělicí poměr, tj. $(B, X; Y) = (f(B), f(X); Y)$, je $Xf(X) \parallel Bf(B)$ (obr. 12). Označme ještě X_0 průsečík přímky $Xf(X)$ s nadrovinou ϱ. Protože se dělicí poměr zachovává i při středovém promítání na rovnoběžné

přímky, je $(X, f(X); X_0) = (B, f(B); B_0)$. Je-li přímka BX rovnoběžná s nadrovinou ϱ (obr. 13), je $f(X)$ ten bod, kterým se doplní body $X, B, f(B)$ na rovnoběžník $XBf(B)f(X)$, protože asociovaný homomorfismus $\bar{f}$ zobrazuje vektory ze zaměření nadroviny ϱ na sebe, tedy $f(X) - f(B) = \bar{f}(X - B) = X - B$. Opět vidíme, že $Xf(X) \parallel Bf(B)$ a $(X, f(X); X_0) = (B, f(B); B_0)$, X_0 je i v tomto případě průsečík přímky $Xf(X)$ s nadrovinou ϱ. Leží-li bod X na přímce $Bf(B)$, sestrojíme nejdříve obraz $f(C)$ některého bodu C, který neleží na přímce $Bf(B)$, a pak použijeme ke konstrukci bodu $f(X)$ dvojici $C, f(C)$. Bude pak platit $Xf(X) \parallel Cf(C)$, a jelikož $Cf(C) \parallel Bf(B)$, bude $Xf(X) \parallel Bf(B)$. Obdobně dostaneme $(X, f(X); X_0) = (B, f(B); B_0)$.



Obr. 14

Zbývá vyšetřit druhou možnost, kdy je přímka $Bf(B)$ rovnoběžná s nadrovinou ϱ. Postup je analogický, přímka $Xf(X)$ je rovnoběžná s přímkou $Bf(B)$ (obr. 14), neexistují však body X_0, B_0, nemůžeme tedy ani mluvit o dělicím poměru $(X, f(X); X_0)$. Je-li přímka BX rovnoběžná s nadrovinou ϱ, je stejně jako při předchozí možnosti $f(X) - f(B) = X - B$. Teď však leží všechny čtyři body $X, f(X), B, f(B)$ v jedné nadrovině σ rovnoběžné s nadrovinou ϱ a restrikce zobrazení f na nadrovinu σ je zřejmě posunutí.

Odvozené výsledky si shrneme.

Věta 1.6.1. Afinní zobrazení f afinního prostoru do sebe, při kterém jsou všechny body nadroviny ϱ samodružné, je jednoznačně určeno, známe-li kromě nadroviny ϱ ještě obraz $f(B)$ jednoho bodu $B \notin \varrho$. Přitom mohou nastat tyto případy:

1. $f(B) = B$, zobrazení f je pak identita na prostoru $\mathbf{A}$.
2. $f(B) \in \varrho$, zobrazení f je pak projekce prostoru $\mathbf{A}$ na nadrovinu ϱ ve směru vektoru $f(B) - B$.
3. $f(B) \neq B$, $f(B) \notin \varrho$ a přímka $Bf(B)$ je s nadrovinou ϱ různoběžná, B_0 je jejich průsečík. Pak jsou všechny přímky $Xf(X)\,(X \notin \varrho)$ vzájemně rovnoběžné, označíme-li X_0 průsečík přímky $Xf(X)$ a nadroviny ϱ, je $(X, f(X); X_0) = k$, k je konstanta.
4. $f(B) \neq B$, $f(B) \notin \varrho$ a přímka $Bf(B)$ je s nadrovinou ϱ rovnoběžná. Všechny přímky $Xf(X)\,(X \notin \varrho)$ jsou vzájemně rovnoběžné, restrikce zobrazení f na

každou nadrovinu rovnoběžnou s nadrovinou ϱ je posunutí, pouze v případě nadroviny ϱ samotné je toto posunutí identita.

Definice 1.6.1. Afinity afinního prostoru popsané v předchozí větě v bodech 3 a 4 se nazývají základní afinity, směr přímek $Xf(X)$ je tzv. směr základní afinity. Základní afinita popsaná v bodě 4 má ještě zvláštní název – elace. Číslo $k = (X, f(X); X_0)$, definované pro základní afinitu, jež není elací, se nazývá charakteristika základní afinity. V případě afinní roviny říkáme základním afinitám osové afinity, přímka samodružných bodů je osa osové afinity.

Definice 1.6.2. Zobrazení prostoru na sebe, které není identitou, avšak složeno samo se sebou dává identitu, se nazývá involutorní zobrazení nebo též involuce.

Věta 1.6.2. Základní afinita je involuce právě tehdy, když není elací a její charakteristika je -1. Bod X neležící v nadrovině samodružných bodů se v ní zobrazí na bod X' tak, že směr přímky XX' je totožný se směrem základní afinity a střed úsečky XX' leží v nadrovině samodružných bodů.

Důkaz. Elace nemůže být involutorní zobrazení, protože jeho restrikce na nadrovinu rovnoběžnou s nadrovinou samodružných bodů a od ní různou je neidentické posunutí a to složeno samo se sebou není identita. Pro základní afinitu, jež není elací, je $(X, X'; X_0) = k$. Má-li se bod X' zobrazit v téže afinitě na bod X, musí též platit $(X', X; X_0) = k$, odkud plyne $k = -1$. Pak je bod X_0 středem úsečky XX'. Základní afinita s charakteristikou -1 je involutorní.

Ukážeme si, že každou afinní transformaci afinního prostoru lze složit ze základních afinit. Tím bude zároveň vysvětleno označení „základní" afinity.

Věta 1.6.3. Ke každé afinitě f n-rozměrného afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ existuje $m < n + 2$ základních afinit tak, že afinní transformace f je jejich složením.

Důkaz. Zvolme v $\mathbf{A}_n$ $n + 1$ lineárně nezávislých bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ a nadrovinu ϱ_1, která neobsahuje body P_0 a $f(P_0)$ (předpokládejme, že jsou různé). Pak existuje základní afinita f_1, která zobrazuje bod P_0 na bod $f(P_0)$ a má nadrovinu ϱ_1 za svou nadrovinu samodružných bodů. Položme $f_1(P_i) = P_{1i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Body $f(P_0)$, $P_{11}, \ldots, P_{1n}$ neleží v žádné nadrovině, protože jsou obrazy lineárně nezávislých bodů v afinitě f_1. Je-li $P_0 = f(P_0)$, vezmeme za f_1 identitu. Je-li $P_{11} = f(P_1)$, vezmeme za f_2 identitu. V opačném případě zvolíme nadrovinu ϱ_2, která prochází bodem $f(P_0)$, ale neobsahuje body P_{11} a $f(P_1)$ a za f_2 základní afinitu, která převádí bod P_{11} v bod $f(P_1)$ a má nadrovinu ϱ_2 za nadrovinu samodružných bodů. Položme $f_2(P_{1i}) = P_{2i}$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$. Dál pokračujeme analogicky – zvolíme nadrovinu ϱ_3 procházející body $f(P_0)$ a $f(P_1)$ a neprocházející body P_{22}, $f(P_2)$ (nechť jsou různé), za f_3 vezmeme základní afinitu s nadrovinou samodružných bodů ϱ_3, která zobrazuje bod P_{22} na bod $f(P_2)$.

Jsou-li body P_{22}, $f(P_2)$ totožné, zvolíme za f_3 identitu. Tak postupujeme dále až k základní afinitě nebo identitě f_{n+1}. Složená afinita $f_{n+1} \circ f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$ zobrazuje bod P_i na bod $f(P_i)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$, je tudíž totožná s afinitou f. Tím jsme ukázali, že afinní transformace f je složena z nejvýše $n + 1$ základních afinit, protože ty afinity f_i, které jsou identitami, můžeme v složeném zobrazení $f_{n+1} \circ f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$ vynechat. To by nešlo pouze v případě, kdy je f sama identita, $f(P_i) = P_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$. V tom případě však můžeme psát $f = f_0 \circ f_0$, kde f_0 je libovolná involutorní základní afinita.

Postup rozkladu afinity f na základní afinity si ještě přiblížíme tímto schématem:

$$\begin{array}{llllll}
P_0 & P_1 & P_2 & \ldots & P_{n-1} & P_n \\
f(P_0) & P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1,n-1} & P_{1n} \\
f(P_0) & f(P_1) & P_{22} & \ldots & P_{2,n-1} & P_{2n} \\
f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) & \ldots & P_{3,n-1} & P_{3n} \\
\ldots & & & & & \\
f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) & \ldots & f(P_{n-1}) & P_{nn} \\
f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) & \ldots & f(P_{n-1}) & f(P_n)
\end{array}
\begin{array}{l}
\big\downarrow f_1 \\
\big\downarrow f_2 \\
\big\downarrow f_3 \\
\\
\\
\big\downarrow f_{n+1}
\end{array}$$

V každém řádku jsou body lineárně nezávislé.

Přejdeme k analytickému vyjádření základních afinit. Nechť je v n-rozměrném afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ zvolena lineární soustava souřadnic, v níž má nadrovina ϱ rovnici

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c = 0,$$

aspoň jedno z čísel $c_1, c_2, \ldots, c_n$ je různé od nuly.

Aby afinita f o analytickém vyjádření

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n + b_1 \\
x'_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n + b_2 \\
&\ldots \\
x'_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n
\end{aligned}$$

měla všechny body nadroviny ϱ za samodružné, je nutné a stačí, aby každá z rovnic

$$x_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n + b_i,$$

tj.

$$\begin{aligned}
&a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{i-1,i}x_{i-1} + (a_{ii} - 1)x_i + a_{i+1,i}x_{i+1} + \\
&+ \ldots + a_{ni}x_n + b_i = 0,
\end{aligned}$$

byla splněna pro všechny body nadroviny ϱ, tj. byla násobkem rovnice nadroviny ϱ. To znamená, že existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tak, že

$$\begin{aligned}
&a_{1i} = \lambda_i c_1, \ldots, a_{i-1,i} = \lambda_i c_{i-1}, a_{ii} - 1 = \lambda_i c_i, \\
&a_{i+1,i} = \lambda_i c_{i+1}, \ldots, a_{ni} = \lambda_i c_n, b_i = \lambda_i c.
\end{aligned}$$

Rovnice afinity f pak mají tvar

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1' &= x_1 + \lambda_1(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c)\\ x_2' &= x_2 + \lambda_2(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c)\\ &\ldots\\ x_n' &= x_n + \lambda_n(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c). \end{aligned}$$

Obráceně je ihned vidět, že je těmito rovnicemi (1) dáno afinní zobrazení f prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe, při kterém je každý bod nadroviny ϱ o rovnici $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c = 0$ samodružný. Je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, jsou dokonce všechny body samodružné, jsou to rovnice identického zobrazení. Je-li aspoň jedno z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nenulové, není f identita. Pro obraz $f(X) = [x_1', \ldots, x_n']$ bodu $X = [x_1, \ldots, x_n]$ platí $f(X) - X = (c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c)\,\boldsymbol{l}$, kde $\boldsymbol{l} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je nenulový vektor. Bod $f(X)$ leží v nadrovině ϱ právě tehdy, když $c_1x_1' + \ldots + c_nx_n' + c = 0$, tj.

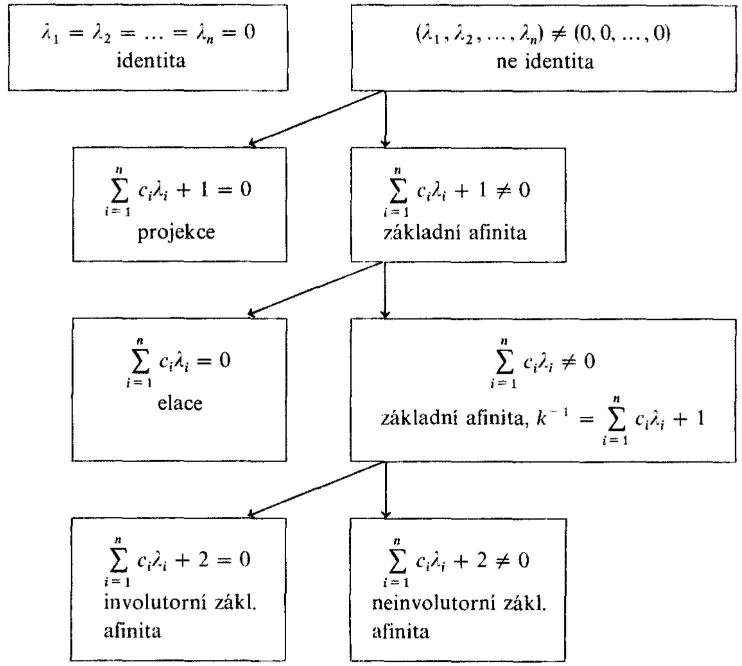
$$(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c)(1 + c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n) = 0.$$

Poslední rovnice je splněna, je-li $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c = 0$, tedy když bod X leží v nadrovině ϱ a je $f(X) = X$, nebo když je $c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n + 1 = 0$. Pak leží každý bod $f(X)$ v nadrovině ϱ. Vidíme, že se jedná o projekci prostoru $\mathbf{A}_n$ na nadrovinu ϱ ve směru vektoru $\boldsymbol{l}$. Je-li alespoň jedno z čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nenulové a zároveň je $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n + 1 \neq 0$, je rovnicemi (1) dána základní afinita. Ta je právě tehdy elací, když je vektor $\boldsymbol{l}$ ze zaměření nadroviny ϱ, tedy když je $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n = 0$. Není-li to elace, můžeme počítat její charakteristiku k. Nechť $X \notin \varrho$, hledejme na přímce $Xf(X)$ ten bod X_0, který leží v nadrovině ϱ. Je $X_0 = X + t\boldsymbol{l}$, t splňuje rovnici $c_1(x_1 + t\lambda_1) + \ldots + c_n(x_n + t\lambda_n) + c = 0$, odkud $t = -(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c)/(c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n)$. Dále je $X_0 - f(X) = (X_0 - X) + (X - f(X)) = t\boldsymbol{l} - (c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c)\,\boldsymbol{l}$, takže $(X, f(X); X_0) = 1/(c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n + 1)$. Vidíme znovu, že dělicí poměr k bodů X, $f(X)$, X_0 nezávisí na volbě bodu $X \notin \varrho$. Základní afinita je involutorní, je-li $k = -1$, tj. $c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n + 2 = 0$. Můžeme si udělat přehled o tom, jaké afinní zobrazení je dáno rovnicemi (1) – viz str. 41 nahoře:

Porovnejte si tento přehled s tvrzením a důkazem vět 1.6.1 a 1.6.2. Poznamenejme ještě, že čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou jednoznačně určena, známe-li obraz $f(R) = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$ některého bodu $R = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$, který neleží v nadrovině ϱ. Potom je

$$\lambda_i = \frac{s_i - r_i}{c_1r_1 + \ldots + c_nr_n + c}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Příklad 1. Napište rovnice osové afinity afinní roviny, která má osu x (přímku o rovnici $y = 0$) za přímku samodružných bodů (osu afinity) a zobrazuje bod $[0, 1]$ na bod $[3, 5]$.



Řešení. Rovnice osové afinity budou $x' = x + \lambda y$, $y' = y + \mu y$. Koeficienty λ, μ musí splňovat rovnice $3 = \lambda$, $5 = 1 + \mu$, afinita má rovnice $x' = x + 3y$, $y' = 5y$.

Příklad 2. Napište rovnice základní afinity třírozměrného afinního prostoru, která má rovinu $x + 2y - z + 1 = 0$ za rovinu samodružných bodů a zobrazuje počátek $P = [0, 0, 0]$ na bod $Q = [0, 0, 2]$.

Řešení. Afinita bude mít rovnice

$$\begin{aligned} x' &= x + a(x + 2y - z + 1)\\ y' &= y + b(x + 2y - z + 1)\\ z' &= z + c(x + 2y - z + 1), \end{aligned}$$

P se zobrazí na Q, proto $a = b = 0$, $c = 2$, rovnice afinity jsou $x' = x$, $y' = y$, $z' = 2x + 4y - z + 2$.

Příklad 3. V afinní rovině je afinita f dána rovnicemi $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + y + 3$. Rozložte f na osové afinity.

Řešení. Zvolme tři lineárně nezávislé body, třeba body $[0, 0]$, $[1, 0]$ a $[0, 1]$. Ty se afinitou f zobrazí po řadě na body $[1, 3]$, $[3, 4]$ a $[0, 4]$. Osovou afinitu f_1 zvolíme tak, aby zobrazila počátek na bod $[1, 3]$, její osa nesmí procházet žádným z těchto dvou bodů, jinak ji můžeme volit libovolně. Nechť je to přímka $y = 1$.

Osová afinita f_1 pak má rovnice $x' = x - y + 1$, $y' = -2y + 3$ a zobrazuje body $[1, 0]$, $[0, 1]$ na body $[2, 3]$ a $[0, 1]$. Osovou afinitu f_2 musíme zvolit tak, aby zobrazila bod $[2, 3]$ na bod $[3, 4]$ a bod $[1, 3]$ na sebe. Můžeme tudíž za její osu zvolit přímku $x = 1$, f_2 pak má rovnice $x' = 2x - 1$, $y' = x + y - 1$, zobrazí bod $[0, 1]$ na bod $[-1, 0]$. Konečně zvolíme osovou afinitu f_3 tak, aby zobrazila bod $[-1, 0]$ na bod $[0, 4]$ a aby body $[1, 3]$ a $[3, 4]$ byly jejími samodružnými body. Její osa musí tedy těmito dvěma body procházet, má rovnici $x - 2y + 5 = 0$, afinita f_3 má rovnice

$$x' = \tfrac{5}{4}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{4}, \qquad y' = x - y + 5.$$

Složením afinit f_1, f_2, f_3 dostaneme afinitu o rovnicích

$$x' = \tfrac{5}{4}[2(x - y + 1) - 1] - \tfrac{1}{2}[(x - y + 1) + (-2y + 3) - 1] + \tfrac{5}{4}$$
$$y' = [2(x - y + 1) - 1] - [(x - y + 1) + (-2y + 3) - 1] + 5,$$

což jsou skutečně rovnice afinity f.

Cvičení

1. Napište rovnice involutorní osové afinity, osou je přímka $x - y + 1 = 0$, bod $[0, 0]$ se zobrazí do bodu $[4, ?]$.
2. Může být stejnolehlost involutorním zobrazením?
3. Co je složením dvou involutorních základních afinit s touž nadrovinou samodružných bodů?
4. Ukažte, že složením dvou elací s rovnoběžnými nadrovinami samodružných bodů můžeme dostat posunutí.
5. Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby složení dvou elací s rovnoběžnými nadrovinami samodružných bodů bylo posunutí.
6. Ukažte, že složení dvou involutorních základních afinit s rovnoběžnými nadrovinami samodružných bodů je posunutí právě tehdy, mají-li obě afinity stejný směr.
7. Rozložte afinitu afinní roviny s rovnicemi $x' = y$, $y' = x + 1$ v osové afinity.
8. Ukažte, že rovnicemi $x' = y - 2z + 1$, $y' = -x + 2y - 2z + 1$, $z' = x - y + 3z - 1$ je v afinním prostoru dimenze tři dána základní afinita. Určete rovinu samodružných bodů a charakteristiku, není-li to elace.

1.7 Klasifikace afinit v rovině

Každé afinní zobrazení f afinní roviny $\mathbf{A}_2$ do sebe je vzhledem k libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic dáno rovnicemi

$$x' = ax + by + p$$
$$y' = cx + dy + q,$$

kde a, b, c, d, p, q jsou reálná čísla a bodu $X = [x, y]$ odpovídá v zobrazení f bod $f(X) = [x', y']$. Zobrazení f je právě tehdy prostým zobrazením, když je

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

V tom případě je f dokonce vzájemně jednoznačné zobrazení roviny $\mathbf{A}_2$ na sebe, tedy afinní transformace (afinita), což budeme dále předpokládat. Víme, že bod $X = [x, y]$ je samodružným bodem afinity f právě tehdy, když platí

$$(a - 1)x + by + p = 0$$
$$cx + (d - 1)y + q = 0.$$

Směr určený nenulovým vektorem (u, v) je právě tehdy samodružný směr afinity f, existuje-li nenulové reálné číslo λ tak, že

$$(1) \qquad \begin{aligned} (a - \lambda)u + bv &= 0 \\ cu + (d - \lambda)v &= 0. \end{aligned}$$

Číslo λ musí být kořenem charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0,$$

o které jsme si v odstavci 1.4 dokázali, že nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Podle diskriminantu $D = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc$ rozlišíme tři případy, které se ještě dále dělí.

1. $D > 0$, charakteristická rovnice má dva různé nenulové reálné kořeny λ_1, λ_2. V tomto případě existují dva různé samodružné směry, protože různým kořenům charakteristické rovnice odpovídají lineárně nezávislé vlastní vektory. Předpokládejme, že jsme lineární soustavu souřadnic zvolili tak, že směry os x, y splývají se samodružnými směry uvažované afinity. To znamená, že rovnicím (1) vyhovuje při $\lambda = \lambda_1$ dvojice $(u, v) = (1, 0)$ a při $\lambda = \lambda_2$ dvojice $(u, v) = (0, 1)$, tedy platí $a = \lambda_1$, $d = \lambda_2$, $b = c = 0$. Rovnice pro souřadnice samodružných bodů jsou

$$(\lambda_1 - 1)x + p = 0$$
$$(\lambda_2 - 1)y + q = 0.$$

Dále musíme rozlišit, zda číslo 1 je jedním z kořenů charakteristické rovnice či nikoli.

11. Oba kořeny λ_1, λ_2 charakteristické rovnice jsou různé od 1. Pak má afinita právě jeden samodružný bod. Předpokládejme, že jsme právě tento bod zvolili za počátek soustavy souřadnic, to znamená, že čísla $x = 0$, $y = 0$ vyhovují rovnicím pro souřadnice samodružných bodů. Je tedy $p = q = 0$, rovnice afinity jsou

$$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_2 y, \qquad \text{kde } \lambda_1\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 \neq 1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_1.$$

12. Jeden kořen charakteristické rovnice, třeba kořen λ_1, se rovná 1, druhý kořen λ_2 je pak nutně různý od 1. Rovnice pro souřadnice samodružných bodů jsou

$$0 . x + p = 0, \quad (\lambda_2 - 1) y + q = 0.$$

121. Je-li $p = 0$, má afinita celou přímku samodružných bodů, přímka má rovnici $(\lambda_2 - 1) y + q = 0$. Můžeme počátek soustavy souřadnic zvolit na této přímce samodružných bodů, pak je $q = 0$. Afinita bude mít rovnice

$$x' = x, \quad y' = \lambda_2 y, \qquad 0 \neq \lambda_2 \neq 1.$$

122. Je-li $p \neq 0$, nemá afinita žádný samodružný bod. Zkusíme, zda má aspoň nějakou samodružnou přímku. Je-li přímka samodružná, musí být tím spíše samodružný její směr. Přicházejí tedy v úvahu pouze přímky rovnoběžné s některou z os x, y. Přímka o rovnici $x = r$ se zobrazí na přímku $x = r + p \neq r$, žádná přímka rovnoběžná s osou y není samodružná. Přímka $y = r$ se zobrazí na přímku $y = \lambda_2 r + q$. Zvolíme-li r tak, aby platilo $r = \lambda_2 r + q$, je přímka samodružná. Můžeme předpokládat, že jsme počátek soustavy souřadnic zvolili na této samodružné přímce, pak je nutně $q = 0$. Afinita má rovnice

$$x' = x + p, \quad y' = \lambda_2 y, \qquad p \neq 0 \neq \lambda_2 \neq 1.$$

2. $D = 0$, charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen λ_1, afinita má aspoň jeden samodružný směr. Předpokládejme, že jsme soustavu souřadnic zvolili tak, že směr osy x je samodružný. Je pak $a = \lambda_1$, $c = 0$, neboť pro $\lambda = \lambda_1$ vyhovuje rovnicím (1) dvojice $(u, v) = (1, 0)$. Charakteristická rovnice pak má kořeny λ_1 a d, jelikož má však podle předpokladu dvojnásobný kořen, musí být $d = \lambda_1$. Víme totiž, že se charakteristická rovnice nemění při žádné změně soustavy souřadnic. Rovnice (1) mají v našem případě tvar

$$(\lambda_1 - \lambda) u + bv = 0, \quad (\lambda_1 - \lambda) v = 0.$$

Dosadíme-li za λ kořen charakteristické rovnice λ_1, dostaneme rovnici $bv = 0$.

21. Je-li $b = 0$, je každý směr směrem samodružným, afinita je homotetie. Pro souřadnice samodružného bodu máme soustavu rovnic

$$(\lambda_1 - 1) x + p = 0, \quad (\lambda_1 - 1) y + q = 0.$$

211. Je-li $\lambda_1 = 1$, je afinita translace (posunutí) o vektor (p, q). Rozlišíme ještě, zda je nulový nebo nenulový.

2111. $p = q = 0$, jde o identitu, její rovnice jsou

$$x' = x, \quad y' = y.$$

2112. $(p, q) \neq (0, 0)$, jde o posunutí, které není identitou, rovnice jsou

$$x' = x + p, \quad y' = y + q, \qquad p \neq 0 \text{ nebo } q \neq 0.$$

212. Je-li $\lambda_1 \neq 1$, má afinita právě jeden samodružný bod, který zvolíme za počátek, afinita je stejnolehlost o rovnicích

$$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_1 y, \qquad 0 \neq \lambda_1 \neq 1.$$

22. Je-li $b \neq 0$, je směr osy x jediným samodružným směrem uvažované afinity a rovnice samodružných bodů jsou

$$(\lambda_1 - 1) x + by + p = 0, \quad (\lambda_1 - 1) y + q = 0.$$

Opět musíme rozlišit, zda se kořen λ_1 rovná jedné nebo ne.

221. $\lambda_1 \neq 1$, afinita má jediný samodružný bod; zvolíme-li ho za počátek, má afinita rovnice

$$x' = \lambda_1 x + by, \quad y' = \lambda_1 y, \qquad b \neq 0 \neq \lambda_1 \neq 1.$$

222. $\lambda_1 = 1$, rovnice pro souřadnice samodružných bodů jsou

$$0 . x + by + p = 0, \quad 0 . y + q = 0.$$

2221. $q = 0$, afinita má celou přímku samodružných bodů, přímka má rovnici $by + p = 0$. Zvolíme-li počátek na této přímce, je $p = 0$, afinita má rovnice

$$x' = x + by, \quad y' = y, \qquad b \neq 0$$

2222. $q \neq 0$, afinita nemá žádný samodružný bod. Restrikce uvažované afinity na přímku o rovnici $by + p = 0$ je posunutí ve směru osy y. Zvolíme-li ještě počátek tak, aby ležel na této přímce, bude $p = 0$, rovnice afinity budou

$$x' = x + by, \quad y' = y + q, \qquad bq \neq 0.$$

3. $D < 0$, charakteristická rovnice nemá žádný reálný kořen, afinita nemá žádný samodružný směr. Protože číslo 1 není kořenem charakteristické rovnice, má soustava rovnic pro souřadnice samodružných bodů právě jedno řešení, afinita má právě jeden samodružný bod, který zvolíme za počátek soustavy souřadnic. Neexistuje nenulový vektor $\boldsymbol{u}$ tak, aby $\bar{f}(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ pro nějaké reálné číslo λ, tj. neexistuje uspořádaná dvojice reálných čísel $(u, v) \neq (0, 0)$ tak, že $au + bv = \lambda u$, $cu + dv = \lambda v$. Číslo λ by totiž muselo být kořenem charakteristické rovnice. Existuje ale komplexní kořen $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ $(\lambda_2 \neq 0)$ charakteristické rovnice a komplexní čísla $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$, alespoň jedno nenulové, tak, že

$$a(u_1 + iu_2) + b(v_1 + iv_2) = (\lambda_1 + i\lambda_2)(u_1 + iu_2)$$
$$c(u_1 + iu_2) + d(v_1 + iv_2) = (\lambda_1 + i\lambda_2)(v_1 + iv_2),$$

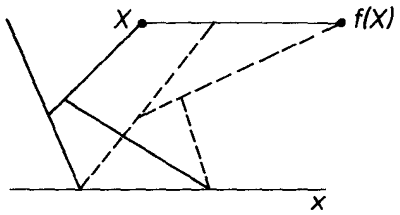
tedy

$$au_1 + bv_1 = \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2, \quad au_2 + bv_2 = \lambda_2 u_1 + \lambda_1 u_2$$
$$cu_1 + dv_1 = \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, \quad cu_2 + dv_2 = \lambda_2 v_1 + \lambda_1 v_2.$$

Položíme-li $\mathbf{w}_1 = (u_1, v_1)$, $\mathbf{w}_2 = (u_2, v_2)$, můžeme tyto rovnice psát ve tvaru $\bar{f}(\mathbf{w}_1) = \lambda_1\mathbf{w}_1 - \lambda_2\mathbf{w}_2$, $\bar{f}(\mathbf{w}_2) = \lambda_2\mathbf{w}_1 + \lambda_1\mathbf{w}_2$. Víme, že alespoň jeden z vektorů $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ je nenulový. Tyto vektory jsou dokonce lineárně nezávislé. Kdyby byl totiž jeden z nich násobkem druhého, byl by druhý podle posledních rovnic vlastním vektorem endomorfismu $\bar{f}$. Určují tudíž různé směry a zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že za směry os x, y vezmeme směry vektorů $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, bude mít uvažovaná afinita rovnice

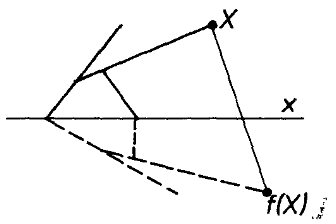
$$x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad y' = -\lambda_2 x + \lambda_1 y, \qquad \lambda_2 \neq 0.$$

Vidíme, že existuje celkem 10 typů afinit afinní roviny, které můžeme podle počtu samodružných bodů a směrů uspořádat do dále uvedené tabulky. Při vhodné volbě lineární soustavy souřadnic má příslušná afinita rovnice uvedené v tabulce. Ty bychom mohli ještě zjednodušit další speciální volbou soustavy souřadnic, což však provádět nebudeme.



Obr. 15

V posledním řádku tabulky je pouze identita. V předposledním řádku jsou uvedeny afinity, které mají přímku za množinu všech samodružných bodů, tedy osové afinity. Přitom první z nich má tu vlastnost, že spojnice každého nesamodružného bodu se svým obrazem je rovnoběžná s osou afinity (obr. 15), je to elace.



Obr. 16

Osou afinity je osa x, její směr je jediným samodružným směrem. U druhé osové afinity jsou spojnice nesamodružných bodů s jejich obrazy navzájem rovnoběžné, ale různoběžné s osou afinity. Jejich směr je druhým samodružným směrem afinity (obr. 16). Afinitu, která nemá žádný samodružný bod a právě jeden samodružný

	Žádný samodružný směr	Jeden samodružný směr	Dva samodružné směry	Každý směr je samodružný
Žádný samodružný bod	–	$x' = x + by$ $y' = y + q$ $bq \neq 0$	$x' = x + p$ $y' = \lambda_2 y$ $p \neq 0 \neq \lambda_2 \neq 1$	$x' = x + p$ $y' = y + q$ $(p, q) \neq (0, 0)$ posunutí, ne identita
Jeden samodružný bod	$x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y$ $y' = -\lambda_2 x + \lambda_1 y$ $\lambda_2 \neq 0$	$x' = \lambda_1 x + by$ $y' = \lambda_1 y$ $b \neq 0 \neq \lambda_1 \neq 1$	$x' = \lambda_1 x$ $y' = \lambda_2 y$ $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2 \neq \lambda_1$ $\lambda_1 \neq 1 \neq \lambda_2$	$x' = \lambda_1 x$ $y' = \lambda_1 y$ $\lambda_1 \neq 0, \lambda_1 \neq 1$ stejnolehlost
Přímka samodružných bodů	–	$x' = x + by$ $y' = y$ $b \neq 0$ elace	$x' = x$ $y' = \lambda_2 y$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ osová afinita, ne elace	–
Všechny body samodružné	–	–	–	$x' = x$ $y' = y$ identita

směr (1. řádek, 2. sloupec tabulky) můžeme složit z elace $x' = x + by$, $y' = y$ a z posunutí $x' = x$, $y' = y + q$. Podobně můžeme složit afinitu z 1. řádku a 3. sloupce z osové afinity $x' = x$, $y' = \lambda_2 y$ a z translace $x' = x + p$, $y' = y$. Složením elace o rovnicích $x' = x + by/\lambda_1$, $y' = y$ a stejnolehlosti $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_1 y$ dostaneme afinitu s právě jedním samodružným bodem a právě jedním samodružným směrem (2. řádek, 2. sloupec). Konečně můžeme i afinitu z 2. řádku a 3. sloupce rozložit na osovou afinitu $x' = x$, $y' = (\lambda_2/\lambda_1)\,y$ a stejnolehlost $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_1 y$.

1.8 Modul afinity, ekviafinity

Nechť je f afinní zobrazení n-rozměrného afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe, $\bar{f}$ k němu asociovaný homomorfismus. Zvolme v zaměření $\mathbf{V}_n$ prostoru $\mathbf{A}_n$ libovolnou bázi $\mathscr{B} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ a položme

$$\bar{f}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j.$$

Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je tzv. matice endomorfismu $\bar{f}$ vzhledem k bázi $\mathscr{B}$. V odstavci 1.4 jsme si ukázali, jak se změní matice endomorfismu, přejdeme-li od báze $\mathscr{B}$ k jiné bázi $\bar{\mathscr{B}}$. Místo matice $\mathbf{A}$ dostaneme matici $\bar{\mathbf{A}}$, pro kterou platí

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B})\,\mathbf{A}\mathbf{M}(\mathscr{B}, \bar{\mathscr{B}}),$$

matice $\mathbf{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B})$ je matice přechodu od báze $\mathscr{B}$ k bázi $\bar{\mathscr{B}}$, matice $\mathbf{M}(\mathscr{B}, \bar{\mathscr{B}})$ je matice přechodu od báze $\bar{\mathscr{B}}$ k bázi $\mathscr{B}$, jsou to matice navzájem inverzní. Matice $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}$ jsou v obecném případě různé, mají však stejný determinant. Je totiž

$$\det \bar{\mathbf{A}} = \det \mathbf{M}(\bar{\mathscr{B}}, \mathscr{B}) \, . \det \mathbf{A} \, . \det \mathbf{M}(\mathscr{B}, \bar{\mathscr{B}}) = \det \mathbf{A}.$$

To nás opravňuje vyslovit tuto definici:

Definice 1.8.1. Je-li f afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ dimenze n do sebe, $\mathscr{M} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ je libovolná báze prostoru $\mathbf{V}_n$ a $\bar{f}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j$, potom nazveme modulem afinního zobrazení f číslo $\det \mathbf{A} = \det(a_{ij})$. Značíme je modul f.

Zřejmě platí, že modul f je právě tehdy nenulový, když je f afinní transformace prostoru $\mathbf{A}_n$.

Nechť f, g jsou afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe, $\bar{f}$, $\bar{g}$ asociované homomorfismy,

$$\bar{f}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j, \qquad \bar{g}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_j.$$

Pak je $\bar{g} \circ \bar{f}$ asociovaný endomorfismus k složenému afinnímu zobrazení $g \circ f$ a je

$$(\bar{g} \circ \bar{f})(\mathbf{e}_i) = \bar{g}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\mathbf{e}_k.$$

Vidíme, že matice $\mathbf{C}$ složeného homomorfismu $\bar{g} \circ \bar{f}$ je součinem matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ homomorfismů $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Proto $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A}) \, . \, (\det \mathbf{B})$. Platí tudíž tvrzení další věty.

Věta 1.8.1. Pro dvě afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do sebe je

$$\operatorname{modul}(g \circ f) = \operatorname{modul} g \, . \operatorname{modul} f.$$

Je-li f afinita, je

$$\operatorname{modul} f^{-1} = (\operatorname{modul} f)^{-1}.$$

Důkaz prvního vzorce je uveden před zněním věty. Položíme-li $g = f^{-1}$ a uvědomíme-li si, že modul identického zobrazení se rovná jedné, dostaneme druhý vzorec.

Definice 1.8.2. Je-li modul afinity kladný, nazývá se afinita přímá. Afinita se záporným modulem se nazývá nepřímá. Afinita, jejíž modul se rovná v absolutní hodnotě jedné, se nazývá ekviafinní afinita nebo stručně ekviafinita.

Přímo z definice plyne, že přímá afinita zachovává orientaci prostoru, neboť asociovaný automorfismus zobrazuje bázi na bázi stejně orientovanou. Nepřímá afinita mění orientaci prostoru.

Definice 1.8.3. Všechny přímé afinity afinního prostoru tvoří podgrupu grupy všech afinit, tzv. podgrupu přímých afinit. Všechny ekviafinity afinního prostoru tvoří rovněž podgrupu grupy všech afinit prostoru, tzv. ekviafinní podgrupu.

P ř í k l a d 1. Které osové afinity afinní roviny jsou ekviafinní?

Řešení. Na základě rovnic osových afinit v tabulce v předcházejícím odstavci vidíme, že elace je vždy ekviafinní, její modul je 1. Osová afinita $x' = x$, $y' = dy$ ($d \neq 0$, $d \neq 1$) má modul roven d, je to ekviafinita právě tehdy, když je $d = -1$, tedy když je involutorní.

P ř í k l a d 2. Které stejnolehlosti afinní roviny jsou ekviafinní?

Řešení. Stejnolehlost $x' = ax$, $y' = ay$ je ekviafinní, je-li $a^2 = 1$. Protože $a \neq 1$, může to nastat pouze v případě $a = -1$, stejnolehlost je pak středová souměrnost. Každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že střed úsečky XX' splývá s daným bodem S, který je jediným samodružným bodem.

Cvičení

1. Co je složením přímé a nepřímé afinity? Co je složením dvou nepřímých afinit?
2. Ukažte, že každá involutorní afinita je ekviafinita.
3. Které stejnolehlosti afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ dimenze n jsou přímé?
4. Dokažte, že každá involutorní afinita v rovině je buď osová afinita s charakteristikou -1, nebo středová souměrnost.
5. Zjistěte z tabulky pro klasifikaci všech afinit v rovině, které z nich jsou ekviafinity a které přímé afinity.

KAPITOLA 2

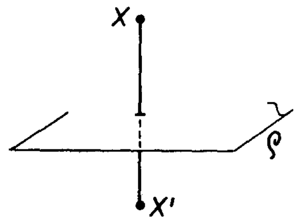
ZOBRAZENÍ V EUKLIDOVSKÉM PROSTORU

2.1 Základní vlastnosti shodných zobrazení

Definice 2.1.1. Nechť je f zobrazení euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$. Zobrazení f se nazývá shodné nebo též izometrické, jestliže zachovává vzdálenost bodů, tzn. že pro libovolné dva body X, $Y \in \mathbf{E}$ je jejich vzdálenost $|XY|$ rovna vzdálenosti $|f(X)f(Y)|$ jejich obrazů.

Jako příklad shodného zobrazení euklidovského prostoru do sebe můžeme uvést středovou souměrnost. V euklidovském prostoru zvolíme pevný bod S a každému bodu X přiřadíme bod X' tak, aby $X' - S = -(X - S)$. Pro libovolné dva body X, Y z daného euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ je pak $Y' - X' = -(Y - X)$, a proto $|X'Y'| = |XY|$.

Jiným příkladem shodného zobrazení je translace v euklidovském prostoru: $X' = X + \boldsymbol{a}$, $Y' = Y + \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ je pevný vektor ze zaměření uvažovaného euklidovského prostoru. Pak je $Y' - X' = Y - X$, tedy $|X'Y'| = |XY|$. Obě uvedená zobrazení můžeme stejným způsobem definovat i v afinním prostoru. Pokud však nejsme v euklidovském prostoru, nemůžeme je chápat jako shodná zobrazení, protože v afinním prostoru, který není euklidovským prostorem, není definována vzdálenost bodů.



Obr. 17

Shodné zobrazení je i souměrnost podle nadroviny: každému bodu X je přiřazen bod X' tak, aby střed úsečky XX' ležel v pevně zvolené nadrovině ϱ a přímka XX' byla pro $X \notin \varrho$ na nadrovinu ϱ kolmá (obr. 17). Jde o involutorní základní afinitu, jejíž směr je kolmý na nadrovinu samodružných bodů. Jelikož

zde mluvíme o kolmosti, nestačí nám prostor afinní, potřebujeme být v euklidovském prostoru.

Nechť f je shodné zobrazení euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$. Předpokládejme, že navzájem různé body A, B, C euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ leží na přímce. Jeden z nich, nechť je to například bod C, leží na úsečce s krajními body ve zbývajících dvou. Je pak $C - A = \lambda(C - B)$, $\lambda < 0$. Víme, že bod C leží na úsečce AB právě tehdy, když v trojúhelníkové nerovnosti $|AB| \leqq |AC| + |CB|$ platí znaménko rovnosti. Protože f je shodné zobrazení, platí v našem případě i rovnost $|f(A)f(B)| = |f(A)f(C)| + |f(C)f(B)|$. To ale znamená, že bod $f(C)$ leží na úsečce $f(A)f(B)$. Bod $f(C)$ nemůže splynout s bodem $f(A)$, protože $|f(C)f(A)| = |CA| \neq 0$, z téhož důvodu nemůže bod $f(C)$ splynout s bodem $f(B)$. Tím jsme vlastně dokázali, že každé shodné zobrazení je prosté. Je tudíž $f(C) - f(A) = \lambda'(f(C) - f(B))$, $\lambda' < 0$, odkud plyne $|f(C)f(A)| = |\lambda'||f(C)f(B)|$. Z rovnosti $C - A = \lambda(C - B)$ zase plyne $|f(C)f(A)| = |\lambda||f(C)f(B)|$. Je tudíž $|\lambda'| = |\lambda|$, a protože jsou obě čísla λ a λ' záporná, musí být $\lambda' = \lambda$. Tím jsme dokázali, že $(A, B; C) = (f(A), f(B); f(C))$. K témuž výsledku bychom dospěli i v případě, kdy bod C leží na přímce AB, avšak není bodem úsečky AB. Víme totiž, jak se změní dělicí poměr tří bodů, zaměníme-li jejich pořadí (viz odstavec 1.7 v [G]). Tím je pak dokázána tato důležitá věta.

Věta 2.1.1. Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.

Jinými slovy můžeme také říci, že každé shodné zobrazení zobrazuje navzájem různé a kolineární body opět v takové body a zachovává jejich dělicí poměr. Obrácené tvrzení samozřejmě neplatí, prosté afinní zobrazení euklidovského prostoru do euklidovského prostoru nemusí být shodné zobrazení, stačí si vzít elaci euklidovské roviny nebo příklad 1, odstavec 1.1.

Dále se budeme zabývat vlastnostmi asociovaného homomorfismu k shodnému zobrazení. Nechť je f afinní zobrazení euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$, $\bar{f}$ zobrazení k němu asociované. Pro body B, C z prostoru $\mathbf{E}$ je $\bar{f}(C - B) = f(C) - f(B)$, proto

$$\|\bar{f}(C - B)\| = |f(B)f(C)|, \quad \|C - B\| = |BC|.$$

Přitom jsme velikost vektorů v zaměření $\mathbf{V}$ prostoru $\mathbf{E}$ i v zaměření $\mathbf{V}'$ prostoru $\mathbf{E}'$ značili stejně, což však není na závadu. Vidíme, že platí věta 2.1.2.

Věta 2.1.2. Afinní zobrazení f euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$ je právě tehdy shodné, když asociovaný homomorfismus $\bar{f}$ zachovává velikost vektoru, tj. $\|\bar{f}(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}$.

Dokážeme si hned další tvrzení.

Věta 2.1.3. Afinní zobrazení f euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$ je právě tehdy shodné zobrazení, když asociovaný homomorfismus $\bar{f}$

zachovává skalární součin vektorů, tj. pro každé dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ z vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je $\bar{f}(\mathbf{u}) \cdot \bar{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Důkaz: Pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}[\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2],$$

stejně tak je

$$\bar{f}(\mathbf{u}) \cdot \bar{f}(\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}[\|\bar{f}(\mathbf{u}) + \bar{f}(\mathbf{v})\|^2 - \|\bar{f}(\mathbf{u})\|^2 - \|\bar{f}(\mathbf{v})\|^2].$$

Kromě toho je $\bar{f}$ homomorfismus, proto $\bar{f}(\mathbf{u}) + \bar{f}(\mathbf{v}) = \bar{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Z těchto vztahů je již vidět, že $\bar{f}$ zachovává skalární součin, jestliže zachovává velikost vektoru. Obrácené tvrzení platí evidentně, stačí položit $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

Víme, že afinní zobrazení je jednoznačně určeno jednou dvojicí odpovídajících si bodů a asociovaným lineárním zobrazením. V případě shodného zobrazení musí ovšem toto asociované zobrazení zachovávat skalární součin, jak jsme si právě dokázali.

Nechť je f afinní zobrazení n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$, $\bar{f}$ asociovaný homomorfismus zaměření $\mathbf{V}_n$ prostoru $\mathbf{E}_n$ do zaměření $\mathbf{V}'$ prostoru $\mathbf{E}'$ a $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ báze prostoru $\mathbf{V}_n$. Je-li zobrazení f shodné, zachovává zobrazení $\bar{f}$ skalární součin, zvláště tedy platí

$$\bar{f}(\mathbf{e}_i) \cdot \bar{f}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \qquad \text{pro všechna } i, j = 1, \ldots, n.$$

Obráceně, platí-li tyto vztahy, je pro každé dva vektory

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i$$

splněna rovnost

$$\bar{f}(\mathbf{x}) \cdot \bar{f}(\mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \bar{f}(\mathbf{e}_i) \cdot \bar{f}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

$\bar{f}$ tedy zachovává skalární součin a f je proto shodné.

Věta 2.1.4. Nechť $P_0, P_1, \ldots, P_n$ jsou lineárně nezávislé body n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ a f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$. Zobrazení f je právě tehdy shodné, když platí

$$(f(P_i) - f(P_0)) \cdot (f(P_j) - f(P_0)) = (P_i - P_0) \cdot (P_j - P_0)$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz plyne ihned z toho, co bylo uvedeno před vlastním zněním věty. Stačí totiž položit $\mathbf{e}_i = P_i - P_0$ a použít vztah $\bar{f}(\mathbf{e}_i) = f(P_i) - f(P_0)$.

Použitím vztahu $2(P_i - P_0) \cdot (P_j - P_0) = \|P_i - P_0\|^2 + \|P_j - P_0\|^2 - \|P_i - P_j\|^2$ a analogicky pro body $f(P_i)$, $f(P_j)$, $f(P_0)$ dostaneme, že rovnosti uvedené ve větě 2.1.4 jsou splněny právě tehdy, když platí $\|P_i - P_k\| = \|f(P_i) - f(P_k)\|$ pro všechna $i, k = 1, \ldots, n$. Platí tedy tato věta o určenosti shodného zobrazení:

Věta 2.1.5. Nechť $P_0, P_1, \ldots, P_n$ jsou lineárně nezávislé body n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ a $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n$ body euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$. Nutnou a postačující podmínkou k existenci shodného zobrazení f euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$, které by zobrazilo body $P_0, P_1, \ldots, P_n$ po řadě na body $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n$, tj. $f(P_i) = P'_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$, je platnost rovností $|P_iP_j| = |P'_iP'_j|$ pro $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Jsou-li tyto vztahy splněny, existuje právě jedno shodné zobrazení uvedených vlastností.

Podle právě uvedené věty je tedy shodné zobrazení euklidovské přímky $\mathbf{E}_1$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$ jednoznačně určeno, jsou-li dány obrazy $f(A)$, $f(B)$ dvou různých bodů A, B přímky $\mathbf{E}_1$, pro které musí ovšem platit $|f(A)\,f(B)| = |AB|$. K určení shodného zobrazení euklidovské roviny $\mathbf{E}_2$ do prostoru $\mathbf{E}'$ potřebujeme znát obrazy $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ vrcholů A, B, C některého trojúhelníku ABC v rovině $\mathbf{E}_2$. Aby ovšem takové shodné zobrazení vůbec existovalo, musí být $|f(A)\,f(B)| = |AB|$, $|f(B)\,f(C)| = |BC|$, $|f(A)\,f(C)| = |AC|$, jinými slovy trojúhelníky $f(A)\,f(B)\,f(C)$, ABC musí být shodné. Zcela analogicky je shodné zobrazení třírozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$ jednoznačně určeno obrazy A', B', C', D' vrcholů A, B, C, D některého čtyřstěnu v $\mathbf{E}_3$. Přitom musí být čtyřstěny $ABCD$, $A'B'C'D'$ shodné, aby takové shodné zobrazení vůbec existovalo.

P ř í k l a d 1. V euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$ je zvolena kartézská soustava souřadnic. Určete, pro které hodnoty čísel a, b existuje shodné zobrazení roviny $\mathbf{E}_2$ do sebe, zobrazující body $[0, 0]$, $[2, 1]$, $[4, a]$ po řadě na body $[1, 2]$, $[3, 1]$, $[5, b]$? Je toto shodné zobrazení určeno jednoznačně?

Řešení. Nutnou podmínkou pro existenci shodného zobrazení požadované vlastnosti je, aby se sobě rovnaly vzdálenosti každých dvou vzorů a vzdálenost jejich obrazů, tedy $(a - 1)^2 = (b - 1)^2$, $a^2 = (b - 2)^2$. Odtud dostáváme, že je b libovolné, $a = 2 - b$. V těchto případech shodné zobrazení požadované vlastnosti existuje. Je-li však $a = 2$, $b = 0$, leží body první trojice na přímce, body druhé trojice rovněž, zobrazení není určeno jednoznačně.

Cvičení

1. Existuje shodné zobrazení $\mathbf{E}_2$ do $\mathbf{E}_3$, při kterém se bod $[1, 2]$ zobrazí na bod $[4, 1, 0]$ a bod $[2, -3]$ na bod $[6, 5, 0]$?

2. Při shodném zobrazení f euklidovského prostoru do sebe jsou body $[0, 0, 0]$ a $[1, 1, 1]$ samodružné, bod $A = [1, -1, 0]$ se zobrazí do bodu $f(A)$, který leží v rovině $x = 0$. Určete zbývající dvě souřadnice bodu $f(A)$.
3. V euklidovské rovině je dán čtverec $ABCD$. Kolik existuje shodných zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterých se zobrazí čtverec na sebe?
4. V euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Kolik existuje shodných zobrazení roviny trojúhelníku ABC do prostoru $\mathbf{E}_3$, při kterých se trojúhelník ABC zobrazí na některou stěnu čtyřstěnu $ABCD$?

2.2 Analytické vyjádření shodného zobrazení

Nechť f je shodné zobrazení n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ do m-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}'_m$, $\bar{f}$ k němu zobrazení asociované. Nechť je v $\mathbf{E}_n$ zvolena kartézská soustava souřadnic repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, v prostoru $\mathbf{E}'_m$ kartézská soustava souřadnic repérem $\langle Q, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$. Položme $f(P) = Q + \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{d}_j$, $\bar{f}(\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \mathbf{d}_j$, $k = 1, 2, \dots, n$. Pak je stejně jako v případě obecného afinního zobrazení pro

$$X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \quad f(X) = f(P) + \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{f}(\mathbf{e}_i) =$$
$$= Q + \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j \Big) \mathbf{d}_j = Q + \sum_{j=1}^{m} x'_j \mathbf{d}_j,$$

kde

(1) $$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

Protože f je shodné zobrazení, zachovává zobrazení $\bar{f}$ skalární součin, tzn. $\bar{f}(\mathbf{e}_r) \,.\, \bar{f}(\mathbf{e}_s) = \mathbf{e}_r \,.\, \mathbf{e}_s$ pro $r, s = 1, 2, \dots, n$. Tedy $\big(\sum_{j=1}^{m} a_{rj} \mathbf{d}_j\big)\big(\sum_{i=1}^{m} a_{si} \mathbf{d}_i\big) = \delta_{rs}$, kde $\delta_{rs} = 1$ při $r = s$ a $\delta_{rs} = 0$ při $r \neq s$. Protože $\mathbf{d}_j \,.\, \mathbf{d}_i = \delta_{ji}$, máme rovnosti $\sum_{j=1}^{m} a_{rj} a_{sj} = \delta_{rs}$. Je tedy shodné zobrazení vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic vyjádřeno rovnicemi (1), přičemž pro matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ s n řádky a m sloupci platí poslední rovnosti. Rovnice (1) i vztahy pro koeficienty a_{ij} můžeme psát opět v maticovém tvaru:

$$(x'_1, \dots, x'_m) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1m} \\ a_{21}, \dots, a_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nm} \end{pmatrix} + (b_1, \dots, b_m)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1m} \\ a_{21}, \dots, a_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{n1} \\ a_{12}, \dots, a_{n2} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{1m}, \dots, a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

nebo stručněji

$$\mathbf{X}' = \mathbf{XA} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n,$$

kde $\mathbf{A}^T$ značí matici transponovanou k matici $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}_n$ značí jednotkovou matici typu (n, n). Všimněte si, že matice $\mathbf{A}$ nemusí být čtvercová, nemůžeme tedy mluvit o inverzní matici k matici $\mathbf{A}$, matice $\mathbf{A}^T \,.\, \mathbf{A}$ je typu (m, m) a nemusí být jednotková, i když $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$.

Samozřejmě bychom mohli vyjádřit shodné zobrazení i vzhledem k obecným lineárním soustavám souřadnic. Podmínky pro koeficienty a_{ij} by ale byly složitější. Proto se v euklidovských prostorech pracuje zpravidla jen s kartézskými soustavami souřadnic. Pokud budeme v této kapitole mluvit o souřadnicích, budeme mít vždy na mysli kartézské souřadnice.

Rovnice shodného zobrazení f euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'_m$ se velmi zjednoduší, zvolíme-li vhodně soustavy souřadnic. V prostoru $\mathbf{E}_n$ zvolíme libovolnou kartézskou soustavu souřadnic repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$, v prostoru $\mathbf{E}'_m$ volíme kartézskou soustavu souřadnic repérem $\langle Q, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m \rangle$, kde $Q = f(P)$, $\mathbf{d}_1 = \bar{f}(\mathbf{e}_1)$, $\dots$, $\mathbf{d}_n = \bar{f}(\mathbf{e}_n)$. Těchto posledních n vektorů tvoří ortonormální skupinu vektorů, kterou doplníme vektory $\mathbf{d}_{n+1}, \dots, \mathbf{d}_m$ na ortonormální bázi. Bod $X = [x_1, \dots, x_n]$, tj. $X = P + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$, se pak při zobrazení f zobrazí na bod $f(X) = f(P) + x_1 \bar{f}(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n \bar{f}(\mathbf{e}_n) = Q + x_1 \mathbf{d}_1 + \dots + x_n \mathbf{d}_n$, tedy $f(X) = [x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0]$. Rovnice shodného zobrazení f pak mají zvlášť jednoduchý tvar $x'_1 = x_1$, $\dots$, $x'_n = x_n$, $x'_{n+1} = 0, \dots, x'_m = 0$. Tento přístup se však nehodí, jestliže jsou soustavy souřadnic předem dány nebo když se jedná o shodné zobrazení euklidovského prostoru do sebe, kdy většinou chceme, aby vzor i obraz byly vyjádřeny vzhledem k téže kartézské soustavě souřadnic.

Ukázali jsme si, že při daných kartézských soustavách souřadnic v prostorech $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{E}'_m$ je každé shodné zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_n$ do prostoru $\mathbf{E}'_m$ dáno rovnicemi (1), kde matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ splňuje podmínku $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$. Ukážeme si ještě platnost tvrzení obráceného – platí-li $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, je rovnicemi (1) dáno shodné zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_n$ do prostoru $\mathbf{E}'_m$. Bodu $Y = [y_1, \dots, y_n]$ je přiřazen bod $f(Y) = [y'_1, \dots, y'_m]$, kde

$$y'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j + b_i,$$

proto je

$$|f(X)f(Y)|^2 = \sum_{i=1}^{m} (y'_i - x'_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} [\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(y_j - x_j)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ji}a_{ki}(y_j - x_j)(y_k - x_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk}(y_j - x_j)(y_k - x_k) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)^2 = |XY|^2.$$

Vidíme, že $|f(X)f(Y)| = |XY|$, f je shodné zobrazení.

Příklad 1. Určete parametr p tak, aby existovalo shodné zobrazení euklidovské roviny $\mathbf{E}_2$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$ zobrazující body $A = [3, 0]$, $B = [0, 3]$ a $C = [3, 3]$ po řadě na body $A' = [1, 5, 1]$, $B' = [-3, 4, p]$ a $C' = [-1, 6, 3]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a určete obraz počátku $P = [0, 0]$.

Řešení. Je $|AB|^2 = 18$, $|AC|^2 = 9$, $|BC|^2 = 9$, $|A'B'|^2 = 17 + (p - 1)^2$, $|A'C'|^2 = 9$, $|B'C'|^2 = 8 + (p - 3)^2$. Rovnicím $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ vyhovuje pouze $p = 2$. Rovnice zobrazení budou mít tvar

$$x' = ax + by + r, \quad y' = cx + dy + s, \quad z' = ex + fy + t.$$

Bodu A odpovídá v zobrazení bod A', musí tedy platit

$$1 = 3a + r, \quad 5 = 3c + s, \quad 1 = 3e + t.$$

Dalších šest rovnic dostaneme z podmínek, aby obrazy bodů B, C byly body B', C'. Ze všech devíti rovnic vypočteme $a = c = f = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $e = d = \frac{1}{3}$, $r = -1$, $s = 3$, $t = 0$. Rovnice zobrazení jsou $x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - 1$, $y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + 3$, $z' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$, v maticovém tvaru

$$(x', y', z') = (x, y) \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + (-1, 3, 0).$$

Obrazem počátku je bod $[-1, 3, 0]$.

Cvičení

1. Afinní zobrazení euklidovské roviny na sebe zobrazuje vrchol A trojúhelníku ABC na bod B, bod B na bod C a bod C na bod A. Může to být zobrazení shodné? Jestliže ano, napište jeho rovnice vzhledem k vhodně zvolené kartézské soustavě souřadnic.
2. Shodné zobrazení euklidovské roviny do euklidovského prostoru je dáno vzhledem ke kartézským soustavám souřadnic rovnicemi $x' = x + \frac{1}{2}y + 1$, $y' = ax + \frac{1}{2}y - 1$, $z' = bx + cy + 3$. Určete koeficienty a, b, c.
3. Tutéž úlohu řešte pro rovnice $x' = x + by - 2$, $y' = \frac{1}{2}y + 1$, $z' = ax + cy - 3$.

2.3 Grupa shodností

Přímo z definice shodného zobrazení plyne, že složení dvou shodných zobrazení je opět shodné zobrazení. Nechť je f shodné zobrazení n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ do sebe. Víme, že každé shodné zobrazení je afinní a prosté (věta 2.1.1). Prosté afinní zobrazení afinního prostoru do sebe je zobrazením prostoru na sebe. Vidíme, že každé shodné zobrazení euklidovského prostoru dimenze n do sebe je vzájemně jednoznačné zobrazení euklidovského prostoru na sebe.

Definice 2.3.1. Vzájemně jednoznačné shodné zobrazení euklidovského prostoru na sebe se nazývá shodnost.

Zřejmě platí věta 2.3.1.

Věta 2.3.1. Inverzní zobrazení k shodnosti je opět shodnost. Všechny shodnosti euklidovského prostoru tvoří při skládání grupu, tzv. grupu shodností tohoto euklidovského prostoru.

Zvolíme-li v n-rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ kartézskou soustavu souřadnic, je v ní každá shodnost vyjádřena rovnicemi

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j + b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ je čtvercová a platí $\sum_{r=1}^{n} a_{ir}a_{jr} = \delta_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \dots, n$, tj. $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$. Splňuje-li obráceně matice $\mathbf{A}$ tuto podmínku, jsou výše uvedené rovnice rovnice shodnosti. To jsme dokázali již v předcházejícím odstavci.

Definice 2.3.2. Čtvercovou matici $\mathbf{A}$ nazveme ortonormální, platí-li $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je matice jednotková. Můžeme také říci, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ je ortonormální, jestliže $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, matice transponovaná k matici $\mathbf{A}$ je totožná s maticí inverzní k matici $\mathbf{A}$. V tom případě je také $\mathbf{A}^T \,.\, \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Věta 2.3.2. Každá shodnost je ekviafinita.

Důkaz. Rovnice shodnosti v maticovém tvaru je $\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{B}$, matice $\mathbf{A}$ je ortonormální, tedy $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$. Proto platí pro determinanty $(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^T) = \det \mathbf{I} = 1$. Avšak $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$, tudíž $(\det \mathbf{A})^2 = 1$, odkud ihned plyne $|\det \mathbf{A}| = 1$, $\det \mathbf{A} = 1$ nebo $\det \mathbf{A} = -1$. Uveďme ještě, že obrácené tvrzení neplatí, ekviafinita nemusí být shodnost. Příkladem je ekviafinita roviny, která je vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic dána rovnicemi $x' = 2x$, $y' = \frac{1}{2}y$.

Samodružné body a samodružné směry shodnosti určíme stejným způsobem jako v případě afinit. V případě shodnosti jsou však všechny kořeny charakteristické rovnice rovny číslu 1 nebo -1. Vyplývá to z toho, že asociovaný homomorfismus k shodnosti zachovává velikost vektoru. Nemůže se tedy nenulový vektor zobrazit na svůj trojnásobek nebo (-5)násobek.

Příklad 1. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{2}{3}z + \tfrac{2}{3} \\ y' &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}y - \tfrac{2}{3}z - \tfrac{2}{3} \\ z' &= -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3}z + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

je dáno shodné zobrazení $\mathbf{E}_3$ na sebe, najděte jeho samodružné body a směry.

Řešení. Skutečnost, že se jedná o zobrazení shodné, můžeme ověřit několika způsoby. Můžeme například použít přímo definici shodného zobrazení a ověřit, že vzdálenost bodů $[x, y, z]$ a $[p, q, r]$ je stejná jako vzdálenost jejich obrazů. To je však asi postup nejsložitější. Můžeme použít větu 2.1.4, vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ se při asociovaném homomorfismu zobrazí na vektory $\mathbf{e}'_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}'_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}'_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ (souřadnice těchto vektorů jsou koeficienty u x, y a z v rovnicích zobrazení) a platí $\mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i \,.\, \mathbf{e}'_j$ pro všechny dvojice i, j, proto je zobrazení shodné. Konečně si můžeme napsat rovnice zobrazení v maticovém tvaru a ověřit, že $\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}_3$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}, & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Pro samodružné body dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -x - y + z + 1 &= 0 \\ x - 2y - z - 1 &= 0 \\ -x - y - 2z + 1 &= 0, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $x = 1$, $y = z = 0$, zobrazení má jediný samodružný bod $[1, 0, 0]$. Nenulový vektor (u, v, w) je vlastním vektorem asociovaného zobrazení, platí-li pro některé číslo λ rovnice

$$\begin{aligned} \lambda u &= \tfrac{1}{3}u - \tfrac{2}{3}v + \tfrac{2}{3}w \\ \lambda v &= \tfrac{2}{3}u - \tfrac{1}{3}v - \tfrac{2}{3}w \\ \lambda w &= -\tfrac{2}{3}u - \tfrac{2}{3}v - \tfrac{1}{3}w. \end{aligned}$$

Dále bychom měli počítat kořeny charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 - 3\lambda, & -2, & 2 \\ 2, & -1 - 3\lambda, & -2 \\ -2, & -2, & -1 - 3\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

To však není třeba, stačí zjistit, zda 1 a -1 rovnici vyhovují. Číslo 1 nevyhovuje, číslo -1 vyhovuje. Dosadíme-li $\lambda = -1$ do výše uvedených rovnic pro u, v, w, dostaneme po vynásobení každé rovnice třemi soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2u - v + w &= 0 \\ u + v - w &= 0 \\ -u - v + w &= 0, \end{aligned}$$

řešením je $u = 0$, $v = w$, zobrazení má jediný samodružný směr určený vektorem $(0, 1, 1)$.

Příklad 2. Zjistěte, zda existuje shodnost euklidovské roviny, při které se bod $A = [10, 0]$ zobrazí na počátek $A' = [0, 0]$ a bod $B = [25, 20]$ na bod $B' = [0, 25]$. V kladném případě napište rovnice tohoto zobrazení a najděte jeho samodružné body a směry.

Řešení. Je $|AB|^2 = 625 = |A'B'|^2$, zobrazení existuje, není však určeno jednoznačně, neboť nejsou dány obrazy tří nezávislých bodů. Rovnice zobrazení budou mít tvar

$$x' = ax + by + p, \quad y' = cx + dy + q.$$

Bod A se zobrazí na bod A', tedy

$$0 = 10a + p, \quad 0 = 10c + q.$$

Aby se bod B zobrazil na bod B', musí platit

$$0 = 25a + 20b + p, \quad 25 = 25c + 20d + q.$$

Vyloučením p, q dostaneme rovnice

$$0 = 3a + 4b, \quad 5 = 3c + 4d,$$

můžeme tedy rovnice hledaného zobrazení zatím psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= ax - \tfrac{3}{4}ay - 10a \\ y' &= cx + (\tfrac{5}{4} - \tfrac{3}{4}c)\,y - 10c. \end{aligned}$$

To jsou vlastně rovnice všech afinních zobrazení roviny do sebe, při kterých se body A, B zobrazí po řadě na body A', B'. Chceme-li z nich vybrat rovnice shodností, musíme ještě požadovat ortonormálnost matice z koeficientů u x a y, tj.

$$a^2 + c^2 = 1, \quad -\tfrac{3}{4}a^2 + (\tfrac{5}{4} - \tfrac{3}{4}c)\,c = 0, \quad \tfrac{9}{16}a^2 + \tfrac{1}{16}(5 - 3c)^2 = 1,$$

odkud plyne $c = \frac{3}{5}$, $a = \pm\frac{4}{5}$. Úloha má dvě řešení:

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y - 8 \qquad & x' &= -\tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y + 8 \\ y' &= \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y - 6 \qquad & y' &= \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y - 6. \end{aligned}$$

První zobrazení nemá žádný samodružný směr a jediný samodružný bod $[5, -15]$. Druhé zobrazení nemá žádný samodružný bod, jeho souřadnice by musely splňovat soustavu $9x = 3y + 40$, $3x = y + 30$, která však nemá řešení. Nenulový vektor (u, v) určuje samodružný směr druhého zobrazení, jestliže

$$\begin{aligned} u &= -\tfrac{4}{5}u + \tfrac{3}{5}v \\ v &= \tfrac{3}{5}u + \tfrac{4}{5}v \end{aligned} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{aligned} -u &= -\tfrac{4}{5}u + \tfrac{3}{5}v \\ -v &= \tfrac{3}{5}u + \tfrac{4}{5}v. \end{aligned}$$

První soustava dává samodružný směr určený vektorem $(1, 3)$, druhá samodružný směr určený vektorem $(-3, 1)$. Vektory prvního směru se při asociovaném homomorfismu zobrazí na svůj 1násobek, tedy přímo na sebe, vektory druhého se zobrazí na svůj (-1)násobek, tedy vždy na vektor opačný.

Cvičení

1. Určete parametr s tak, aby existovala shodnost roviny zobrazující body $[0, 0]$, $[3, 4]$ po řadě na body $[5, 0]$, $[9, s]$. Napište rovnice tohoto zobrazení a obraz bodu $[5, 0]$.
2. Napište rovnice všech shodností, při kterých se čtverec se středem v počátku a jedním vrcholem v bodě $[3, 0]$ zobrazí na sebe.
3. Určete p, q tak, aby existovala shodnost zobrazující body $[3, 0]$, $[1, 2]$, $[-1, -1]$ po řadě na body $[1, 4]$, $[p, 2]$, $[2, q]$. Najděte samodružné body a směry tohoto zobrazení.
4. Zobrazení euklidovského prostoru na sebe je dáno rovnicemi $21x' = -20x - 5y + 4z + 140$, $21y' = -5x + 4y - 20z + 224$, $21z' = 4x - 20y - 5z + 98$. Ukažte, že se jedná o shodnost. Určete jeho samodružné body a směry.
5. Určete a, b, c tak, aby rovnice $x' = \frac{3}{4}x + by + 1$, $y' = ax + cy - 1$ vyjadřovaly shodnost.

2.4 Souměrnost podle nadroviny

K dané nadrovině ϱ v n-rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ existují právě dvě shodnosti, při kterých jsou všechny body nadroviny ϱ samodružné. Je to jednak identita, jednak souměrnost podle nadroviny. Ta přiřazuje každému bodu X, který neleží v nadrovině ϱ, bod X' tak, že spojnice XX' je na nadrovinu ϱ kolmá a střed úsečky XX' leží v nadrovině ϱ. Souměrnost podle nadroviny je jednoznačně určena buď tou nadrovinou, nebo též jednou dvojicí odpovídajících si a nesplývajících bodů. Přitom není třeba rozlišit, který z těchto bodů je vzorem a který obrazem, protože souměrnost je zobrazení involutorní (viz definice 1.6.2): Je-li bod B obrazem bodu A, je bod A obrazem bodu B.

Jsou-li tedy A, B dva různé body prostoru $\mathbf{E}_n$, existuje právě jedna souměrnost podle nadroviny, při které se bod A zobrazí na bod B, a tudíž i bod B na bod A. Nadrovinou ϱ samodružných bodů této souměrnosti je nadrovina souměrnosti

bodů A, B, tj. nadrovina kolmá na přímku AB, která prochází středem úsečky AB. Nadrovina ϱ je také množinou všech těch bodů, které mají od bodu A a bodu B stejné vzdálenosti.

Jelikož budeme v tomto odstavci mluvit pouze o souměrnostech podle nadroviny, budeme stručně psát jen souměrnost a rozumět tím vždy souměrnost podle nadroviny.

Zvolíme-li v $\mathbf{E}_n$ dvě uspořádané $(n + 1)$tice lineárně nezávislých bodů $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ a $(P'_0, P'_1, \dots, P'_n)$ tak, že $|P_iP_j| = |P'_iP'_j|$ pro $i, j = 0, 1, \dots, n$, pak existuje podle věty 2.1.5 právě jedna shodnost prostoru $\mathbf{E}_n$ zobrazující bod P_i na bod P'_i pro každé $i = 0, 1, \dots, n$, tedy $f(P_i) = P'_i$. Nechť je f_1 souměrnost, při které se bod P_0 zobrazí na bod P'_0, popřípadě identita, je-li $P'_0 = P_0$. Položme $f_1(P_i) = P_{1i}$ pro $i = 1, \dots, n$. Potom $|P_0P_1| = |f_1(P_0)f_1(P_1)| = |P'_0P_{11}|$. Kromě toho je $|P_0P_1| = |P'_0P'_1|$, proto je $|P'_0P_{11}| = |P'_0P'_1|$. Nechť je f_2 souměrnost převádějící bod P_{11} na bod P'_1, popřípadě identita, je-li $P_{11} = P'_1$. Pak je vždy $f_2(P'_0) = P'_0$. Položme ještě $f_2(P_{1i}) = P_{2i}$ pro $i = 2, 3, \dots, n$. Je pak $|P_0P_2| = |P'_0P_{12}| = |P'_0P_{22}|$ a také $|P_0P_2| = |P'_0P'_2|$, podobně $|P_1P_2| = |P'_1P_{22}|$ a $|P_1P_2| = |P'_1P'_2|$. Je-li $P_{22} = P'_2$, vezmeme za f_3 identitu, v opačném případě nechť je f_3 souměrnost zobrazující bod P_{22} na bod P'_2. Protože $|P'_jP_{22}| = |P'_jP'_2|$ pro $j = 0, 1$, jsou body P'_0 a P'_1 samodružné body shodnosti f_3. Dál postupujeme analogicky až k souměrnosti nebo identitě f_{n+1}; viz schéma:

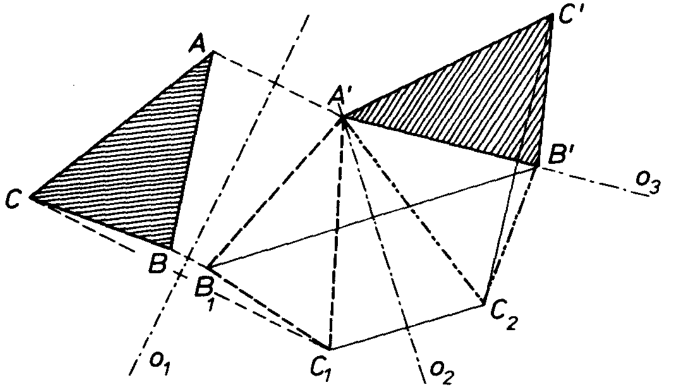
$$\begin{array}{ccccc l}
P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_n & \\
 & & & & & f_1 \\
P'_0 & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} & \\
 & & & & & f_2 \\
P'_0 & P'_1 & P_{22} & \dots & P_{2n} & \\
 & \dots & & & & f_{n+1} \\
P'_0 & P'_1 & P'_2 & \dots & P'_n &
\end{array}$$

Složením souměrností (identit) $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ dostaneme shodnost, která zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, \dots, n$, tedy shodnost f, tj. $f = f_{n+1} \circ f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$. Tím jsme způsobem velmi podobným důkazu věty 1.6.3 dokázali obdobné tvrzení pro shodnosti.

Věta 2.4.1. Ke každé shodnosti f n-rozměrného euklidovského prostoru existuje k souměrností podle nadrovin tak, že f je jejich složením a číslo k je menší než $n + 2$.

Uvedená věta ztrácí smysl v případě $n = 0$, kdy se vlastně nedá mluvit o nadrovině. V případě $n = 1$ je shodnost f buď sama již souměrností, nebo je f posunutí, které se dá složit ze dvou souměrností. Pro dobré pochopení obsahu věty je účelné důkladně si projít případ $n = 2$: Nechť jsou v euklidovské rovině dány dva shodné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ (obr. 18). Není-li $A = A'$, existuje právě jedna souměrnost podle přímky, při které se bod A zobrazí na bod A', označme osu této souměrnosti o_1 a obrazy bodů B, C označme B_1, C_1. Je

$|AB| = |A'B_1|$, $|AC| = |A'C_1|$, ze shodnosti trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ plyne $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, takže $|A'B_1| = |A'B'|$, $|A'C_1| = |A'C'|$. Není-li $B_1 = B'$, zobrazuje souměrnost podle osy o_2 úsečky B_1B' bod B_1 na bod B', bod A' je samodružný, obraz bodu C_1 označíme C_2. Je $|A'C_2| = |A'C_1| = |A'C'|$, podobně $|B'C_2| = |B_1C_1| = |BC| = |B'C'|$. Pokud body C_2 a C' nesplývají, existuje právě jedna souměrnost podle osy o_3 úsečky C_2C', při které jsou body A', B' samodružné. Složením souměrností podle os o_1, o_2, o_3 dostaneme shodnost, která zobrazuje trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$. Splývají-li body A, A' nebo B_1, B' nebo C_2, C', můžeme příslušnou osovou souměrnost vynechat.



Obr. 18

Nechť je v n-rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ zvolena kartézská soustava souřadnic, v níž má nadrovina ϱ rovnici

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c = 0$$

(alespoň jedno z čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$ je různé od nuly). Víme, že každá afinita a tedy i shodnost, která má body nadroviny ϱ za samodružné, má rovnice tvaru

$$x_i' = x_i + \lambda_i(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jde-li o souměrnost, musí být směr této základní afinity kolmý na nadrovinu ϱ, tzn. že přímka XX' musí být v případě nesamodružného bodu X kolmá na nadrovinu ϱ. Směr přímky XX' je dán vektorem $\mathbf{l} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Na nadrovinu ϱ je kolmý vektor $(c_1, \dots, c_n)$. Musí tedy existovat číslo λ tak, že $\lambda_i = \lambda c_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Dále musí střed úsečky XX' ležet v nadrovině ϱ, odkud plyne

$$(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c)(2 + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i^2) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že poslední rovnice platí pro každý bod X, musí být

$$\lambda_i = -\frac{2c_i}{\sum_{k=1}^{n} c_k^2} \qquad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Příklad 1. V euklidovské rovině je dána souměrnost podle přímky $3x - 4y + 1 = 0$. Napište rovnice této souměrnosti.

Řešení. Podle výše uvedených vztahů má souměrnost podle přímky $3x - 4y + 1 = 0$ rovnice

$$x' = x - \frac{6}{25}(3x - 4y + 1), \quad y' = y + \frac{8}{25}(3x - 4y + 1),$$

po úpravě

$$x' = \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{6}{25}, \quad y' = \frac{24}{25}x - \frac{7}{25}y + \frac{8}{25}.$$

Příklad 2. Napište rovnice souměrnosti podle roviny $x + 2y - z + 4 = 0$ v trojrozměrném euklidovském prostoru.

Řešení.

$$\begin{aligned} x' &= x - \tfrac{2}{6}(x + 2y - z + 4) \\ y' &= y - \tfrac{4}{6}(x + 2y - z + 4) \\ z' &= z + \tfrac{2}{6}(x + 2y - z + 4), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 3x' &= 2x - 2y + z - 4 \\ 3y' &= -2x - y + 2z - 8 \\ 3z' &= x + 2y + 2z + 4. \end{aligned}$$

Příklad 3. Napište rovnice souměrnosti podle roviny, při které se bod $[1, 0, -2]$ zobrazí na bod $[3, 2, 0]$.

Řešení. Rovnice roviny souměrnosti daných bodů je $x + y + z - 2 = 0$, rovnice souměrnosti jsou

$$\begin{aligned} x' &= x - \tfrac{2}{3}(x + y + z - 2) = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{2}{3}z + \tfrac{4}{3} \\ y' &= y - \tfrac{2}{3}(x + y + z - 2) = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{2}{3}z + \tfrac{4}{3} \\ z' &= z - \tfrac{2}{3}(x + y + z - 2) = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

Cvičení

1. Napište rovnice souměrnosti podle přímky $2x - 3y + 1 = 0$.
2. Napište rovnice osové souměrnosti, zobrazující počátek na bod $[1, 5]$.
3. Rovnicemi $x' = y$, $y' = -x + 1$ je dána shodnost. Rozložte ji v osové souměrnosti.

4. Napište rovnice souměrnosti podle roviny, při které se bod [1, 0, 5] zobrazí na bod [0, 5, 1].
5. Najděte samodružné body shodnosti složené ze souměrnosti podle roviny $z = 0$ a souměrnosti podle roviny $x - y + 2z - 1 = 0$.

2.5 Souměrnosti v euklidovském prostoru

V předcházejícím odstavci jsme se zabývali souměrnostmi podle nadroviny. Jsou to involutorní shodnosti, které mají za množinu všech svých samodružných bodů nadrovinu. Nyní se budeme zabývat všemi involutorními shodnostmi euklidovského prostoru.

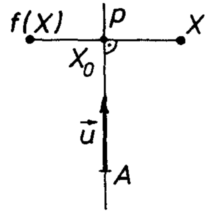
Nechť je f shodnost v euklidovském prostoru, která je involutorní. To znamená, že f není identita, ale složena sama se sebou dává identické zobrazení, $f \circ f =$ identita. Protože f není sama identita, existuje bod A tak, že $f(A) = B \neq A$. Pak je $f(B) = f(f(A)) = A$, při zobrazení f se bod A zobrazí na bod B a bod B na bod A. Z toho plyne, že střed S úsečky AB se zobrazí na střed úsečky BA, je tudíž střed S úsečky AB samodružný. Vidíme, že každá involutorní shodnost má aspoň jeden samodružný bod. Podívejme se teď na asociovaný homomorfismus $\bar{f}$ zobrazení f. Protože $f \circ f$ je identita na $\mathbf{E}_n$, je $\bar{f} \circ \bar{f}$ identita na zaměření $\mathbf{V}_n$ prostoru $\mathbf{E}_n$. Pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ je $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \bar{f}(\mathbf{u})) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \bar{f}(\mathbf{u}))$. Přitom pro $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \bar{f}(\mathbf{u})$ platí $\bar{f}(\mathbf{v}) = \bar{f}(\mathbf{u}) + \bar{f}(\bar{f}(\mathbf{u})) = \bar{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{v}$, pro $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \bar{f}(\mathbf{u})$ je $\bar{f}(\mathbf{w}) = \bar{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} = -\mathbf{w}$. To znamená, že každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ se dá napsat jako součet $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_1$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_{-1}$, $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n \mid \bar{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$, $\mathbf{V}_{-1} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{V}_n \mid \bar{f}(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}\}$. $\mathbf{V}_1$ je vektorový podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$ tvořený všemi vlastními vektory zobrazení $\bar{f}$, kterým odpovídá vlastní číslo 1, a vektorem nulovým, podobně se $\mathbf{V}_{-1}$ skládá ze všech vlastních vektorů zobrazení $\bar{f}$ s vlastním číslem -1 a z vektoru nulového. Průnikem prostorů $\mathbf{V}_1$ a $\mathbf{V}_{-1}$ je pouze nulový vektor. Podprostory $\mathbf{V}_1$ a $\mathbf{V}_{-1}$ jsou navzájem kolmé. Je-li totiž $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_1$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_{-1}$, je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \bar{f}(\mathbf{v}) \cdot \bar{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{w}) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, tedy $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Použili jsme přitom to, že zobrazení $\bar{f}$ zachovává skalární součin, neboť je to asociované zobrazení k zobrazení shodnému. Označme $\mathbf{P}_1$ podprostor prostoru $\mathbf{E}_n$ určený bodem S a vektorovým prostorem $\mathbf{V}_1$. Můžeme též říci, že $\mathbf{P}_1$ je podprostor všech samodružných bodů zobrazení f. Dále označme $\mathbf{P}_{-1}$ podprostor prostoru $\mathbf{E}_n$ určený bodem S a vektorovým prostorem $\mathbf{V}_{-1}$. Prostor $\mathbf{P}_{-1}$ závisí na volbě samodružného bodu S. Platí $X \in \mathbf{P}_1$ právě tehdy, když $X = S + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_1$ a každý bod X se dá právě jedním způsobem psát ve tvaru $X = S + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_1$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_{-1}$. Pro tento bod X je $f(X) = f(S) + \bar{f}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = S + \bar{f}(\mathbf{v}) + \bar{f}(\mathbf{w}) = S + \mathbf{v} - \mathbf{w}$. Je tudíž $f(X) = X$ právě tehdy, když je $\mathbf{w} = \mathbf{o}$, tj. $X \in \mathbf{P}_1$. Jinak je přímka $Xf(X)$ kolmá na prostor $\mathbf{P}_1$ a střed $S + \mathbf{v}$ úsečky $Xf(X)$ leží v $\mathbf{P}_1$. Prostor $\mathbf{P}_1$ nemůže být totožný s celým prostorem $\mathbf{E}_n$, to by byla shodnost f identitou. Prostor $\mathbf{P}_{-1}$ může být totožný s celým prostorem $\mathbf{E}_n$, v tom případě je

$\mathbf{V}_{-1} = \mathbf{V}_n$, $\mathbf{P}_1 = \{S\}$, pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ je $\bar{f}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$, každý bod $X = S + \mathbf{u}$ se zobrazí na bod $f(X) = S - \mathbf{u}$. Jde o středovou souměrnost podle středu S. Vše, co jsme si právě ukázali, shrneme do definice a věty.

Definice 2.5.1. Nechť je v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ dimenze n zvolen podprostor $\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}_k$ dimenze k, $0 \leqq k \leqq n - 1$. Souměrnost prostoru $\mathbf{E}_n$ podle podprostoru $\mathbf{E}_k$ je zobrazení f prostoru $\mathbf{E}_n$ na sebe, při kterém jsou všechny body prostoru $\mathbf{E}_k$ samodružné, pro ostatní body X je přímka $Xf(X)$ kolmá na prostor $\mathbf{E}_k$ a střed úsečky $Xf(X)$ leží v $\mathbf{E}_k$.

Věta 2.5.1. Každá involutorní shodnost euklidovského prostoru je souměrnost tohoto prostoru podle některého podprostoru.

V euklidovské rovině jsou involutorní shodnosti souměrnosti podle přímky (osové souměrnosti), studované v předcházejícím odstavci, neboť v rovině je nadrovinou přímka, a středové souměrnosti. V trojrozměrném prostoru přistupují k souměrnostem podle rovin (tj. nadrovin v $\mathbf{E}_3$) a středovým souměrnostem ještě souměrnosti podle přímek.



Obr. 19

Nechť je v trojrozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$ dána přímka p bodem A a nenulovým vektorem $\mathbf{u}$. Každý její bod X se dá psát ve tvaru $X = A + t\mathbf{u}$, $t \in \mathbf{R}$. Ten je v souměrnosti podle přímky p samodružný. Není-li bod X bodem přímky p, najdeme nejdříve na přímce p bod X_0, pro který je přímka XX_0 kolmá na přímku p (obr. 19). Bod X_0 je tzv. patou kolmice vedené bodem X na přímku p. Je $X_0 = A + t\mathbf{u}$ a vektor $X - X_0 = (X - A) - t\mathbf{u}$ je kolmý na vektor $\mathbf{u}$, tedy $(X - A)\mathbf{u} - t(\mathbf{uu}) = 0$, odkud

$$t = \frac{(X - A)\mathbf{u}}{\mathbf{uu}}, \quad X_0 = A + \frac{(X - A)\mathbf{u}}{\mathbf{uu}}\mathbf{u}.$$

V zlomcích je v čitateli skalární součin vektorů $X - A$, $\mathbf{u}$, není to součin dvou čísel, nedá se vektorem $\mathbf{u}$ krátit! Obraz $f(X)$ bodu X v souměrnosti f podle přímky p je bod souměrně sdružený k bodu X podle bodu X_0, tedy

$$f(X) = X_0 - (X - X_0) = 2X_0 - X = 2A - X + 2\frac{(X - A)\mathbf{u}}{\mathbf{uu}}\mathbf{u}.$$

Je dobře si uvědomit, že tento vzorec platí v euklidovském prostoru libovolné dimenze, nejen v trojrozměrném euklidovském prostoru. A platí i v případě, kdy je bod X bodem přímky p, kdy je $X = X_0 = f(X)$. Nahradíme-li v odvozeném vzorci vektor $\boldsymbol{u}$ jeho nenulovým násobkem $k\boldsymbol{u}$, dostaneme samozřejmě tentýž vzorec pro $f(X)$, vždyť bod A určuje spolu s vektorem $k\boldsymbol{u}$ tutéž přímku p. Ověřte si, že se vzorec pro $f(X)$ také nezmění, nahradíme-li bod A bodem $B = A + r\boldsymbol{u}$.

Příklad 1. Napište rovnice souměrnosti podle přímky o parametrickém vyjádření $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$.

Řešení. Je $A = [1, 2, 0]$, $\boldsymbol{u} = (1, -1, 3)$, takže $[x', y', z'] = [2 - x, 4 - y, -z] + 2\dfrac{(x - 1) - (y - 2) + 3z}{11}(1, -1, 3)$, po úpravě a rozepsání do souřadnic

$$\begin{aligned} x' &= 2 - x + \tfrac{2}{11}(x - y + 3z + 1) = -\tfrac{9}{11}x - \tfrac{2}{11}y + \tfrac{6}{11}z + \tfrac{24}{11} \\ y' &= 4 - y - \tfrac{2}{11}(x - y + 3z + 1) = -\tfrac{2}{11}x - \tfrac{9}{11}y - \tfrac{6}{11}z + \tfrac{42}{11} \\ z' &= \quad\; - z + \tfrac{6}{11}(x - y + 3z + 1) = \tfrac{6}{11}x - \tfrac{6}{11}y + \tfrac{7}{11}z + \tfrac{6}{11}. \end{aligned}$$

Cvičení

1. Napište rovnice souměrnosti $\mathbf{E}_2$ podle přímky $x - y - 1 = 0$ užitím výše uvedeného vzorce i jako souměrnost podle nadroviny.
2. Napište rovnice souměrnosti podle přímky o parametrickém vyjádření $x = 1 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = 1 + t$, $t \in \mathbf{R}$.

2.6 Klasifikace shodností roviny

Nechť je v euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$ zvolena kartézská soustava souřadnic, v níž má shodnost f rovnice

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q, \end{aligned}$$

v maticovém tvaru

$$(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} a, & c \\ b, & d \end{pmatrix} + (p, q).$$

Nutná a postačující podmínka pro to, aby byla těmito rovnicemi dána skutečně shodnost, je ortonormálnost matice

$$\begin{pmatrix} a, & c \\ b, & d \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} a, & c \\ b, & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

tedy podmínky $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$. Z rovnosti $a^2 + c^2 = 1$ plyne existence úhlu α, tak, že $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$. Omezíme-li se na $0 \leqq \alpha < 360°$, je α určeno jednoznačně. Pro b, d pak musí platit $b\cos\alpha + d\sin\alpha = 0$, proto

$d = \varepsilon\cos\alpha$, $b = -\varepsilon\sin\alpha$. Dosazením do rovnice $b^2 + d^2 = 1$ dostaneme $\varepsilon^2 = 1$, tedy $\varepsilon = 1$ nebo $\varepsilon = -1$. Má tudíž každá shodnost v rovině rovnice tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + q. \end{aligned}$$

V prvním případě jde o shodnost přímou, v druhém případě o shodnost nepřímou. Zkoumejme nejdříve shodnosti přímé. Souřadnice samodružných bodů jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} x(1 - \cos\alpha) + y\sin\alpha &= p \\ -x\sin\alpha + (1 - \cos\alpha)\,y &= q, \end{aligned}$$

determinant soustavy je $(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$. Je-li $\cos\alpha \neq 1$, má soustava právě jedno řešení, shodnost má právě jeden samodružný bod. Můžeme předpokládat, že jsme počátek P soustavy souřadnic zvolili právě v tomto samodružném bodě shodnosti, pak je $p = q = 0$. Dále je $(X - P)(X' - P) = (x^2 + y^2)\cos\alpha = \|X - P\|\,\|X' - P\|\cos\alpha$, svírají tudíž vektory $X - P$, $X' - P$ pro $X \neq P$ úhel α, uvažovaná shodnost je otočení o úhel α kolem bodu P. Přitom se bod o souřadnicích $[1, 0]$ zobrazí na bod $[\cos\alpha, \sin\alpha]$. Hledejme ještě samodružné směry naší shodnosti. Nejdříve musíme řešit příslušnou charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \lambda - \cos\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $(\lambda - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 0$. Ta má reálný kořen právě tehdy, je-li $\sin\alpha = 0$, a protože $\cos\alpha = 1$ jsme zatím vyloučili, musí být $\cos\alpha = -1$. Jde pak o otočení o úhel 180° neboli o středovou souměrnost, při které je každý směr samodružný. Je-li $\cos\alpha = 1$, je $\sin\alpha = 0$, shodnost je buď identita ($p = q = 0$) nebo neidentické posunutí (aspoň jedno z čísel p, q je nenulové).

V druhém případě (shodnost nepřímá) hledejme nejdříve samodružné směry. Příslušná charakteristická rovnice má tvar

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \lambda + \cos\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda^2 - 1 = 0$, kořeny jsou $\lambda = 1$ a $\lambda = -1$. V tomto případě má shodnost dva různé samodružné směry, přitom každý vektor prvního směru se při asociovaném zobrazení zobrazí přímo na sebe, každý vektor druhého směru se zobrazí na vektor opačný. Vzhledem k tomu, že se zachovávají úhly nenulových vektorů, musí být tyto samodružné směry navzájem kolmé. Můžeme tudíž předpokládat, že jsme kartézskou soustavu souřadnic zvolili tak, že směr osy x je totožný s prvním samodružným směrem, směr osy y je druhý samodružný směr. Musí pak platit $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, rovnice shodnosti jsou $x' = x + p$, $y' = -y + q$. Je-li $p = 0$, má shodnost celou přímku samodružných bodů. Jestliže předpokládáme, že jsme počátek soustavy souřadnic zvolili na této přímce, jsou rovnice shodnosti $x' = x$, $y' = -y$. Jde o osovou souměrnost podle přímky $y = 0$, podle osy x. Je-li $p \neq 0$, nemá shodnost žádný samodružný bod, přímka $2y = q$ je však samodružná, každý její bod se zobrazí opět do jejího bodu. Zvolíme-li počátek na této samodružné přímce, má uvažovaná shodnost rovnice $x' = x + p$, $y' = -y$, $p \neq 0$. Dá se složit z osové souměrnosti $x' = x$, $y' = -y$ a posunutí $x' = x + p$, $y' = y$ ve směru osy souměrnosti. Zobrazení se nazývá posunutá souměrnost.

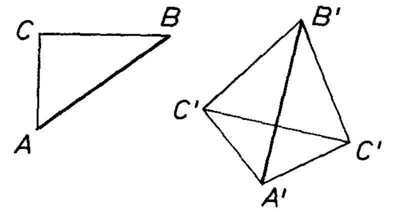
Tím jsme dostali následující přehled shodností euklidovské roviny:

	Žádný samodružný směr	Právě dva navzájem kolmé samodružné směry	Každý směr samodružný
Žádný samodružný bod	–	posunutá souměrnost $x' = x + p$ $y' = -y$ $p \neq 0$	posunutí, ne identita $x' = x + p$ $y' = y + q$ $(p, q) \neq (0, 0)$
Právě jeden samodružný bod	otočení o úhel α $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$	–	středová souměrnost $x' = -x$ $y' = -y$
Přímka samodružných bodů; ne identita	–	osová souměrnost $x' = x$ $y' = -y$	–
Každý bod je samodružný	–	–	identita $x' = x$ $y' = y$

U každého typu shodnosti jsou uvedeny rovnice, jaké má shodnost toho typu při vhodné volbě kartézské soustavy souřadnic. Shodnosti v prostředním sloupci (právě dva navzájem kolmé samodružné směry) jsou shodnosti nepřímé, ostatní jsou přímé.

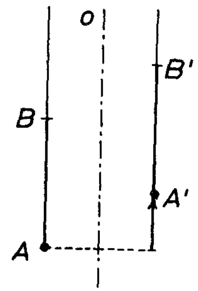
Přehled o všech shodnostech v rovině si můžeme udělat i bez užití souřadnic. Víme, že shodnost v rovině je jednoznačně určena, známe-li obrazy A', B', C' vrcholů A, B, C některého trojúhelníku ABC. Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou ovšem shodné; $|A'B'| = |AB|$, $|A'C'| = |AC|$, $|B'C'| = |BC|$. Známe-li jen k dvěma různým bodům A, B jejich obrazy A', B' (musí být $|A'B'| = |AB|$), není shodnost

jednoznačně určena. V tom případě existuje právě jedna přímá shodnost f a jedna nepřímá shodnost g zobrazující body A, B po řadě na body A', B'. To plyne ihned z toho, že k trojúhelníku ABC a daným bodům A', B' ($|A'B'| = |AB|$) existují v rovině právě dva trojúhelníky $A'B'C'$ shodné s trojúhelníkem ABC, jsou souměrně sdružené podle přímky $A'B'$ (obr. 20).

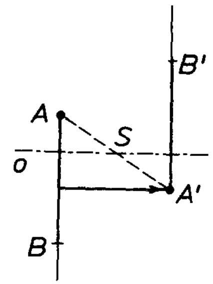


Obr. 20

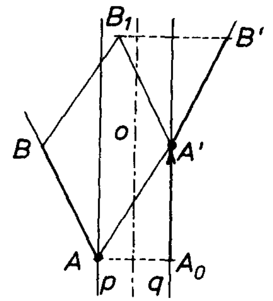
Nechť jsou tedy v rovině dány dvě shodné úsečky $A'B'$, AB a hledejme přímou shodnost f a nepřímou shodnost g zobrazující bod A na bod A' a bod B na bod B'. Je-li $A = A'$ a $B = B'$, je to identita a souměrnost podle přímky AB. Je-li $A = A'$, $B \neq B'$, je f otočení kolem bodu A zobrazující bod B na bod B' (může to být i středová souměrnost, jestliže leží bod B' na přímce AB), g je souměrnost podle osy úsečky BB'. Nechť je dále $A \neq A'$, $B \neq B'$. Vezmeme nejdříve případ, kdy jsou přímky AB, $A'B'$ navzájem rovnoběžné. Mají-li polopřímky AB, $A'B'$ tutéž orientaci, je f posunutí $A \to A'$. Nepřímá shodnost g je souměrnost podle přímky o procházející středem úsečky AA' rovnoběžně s AB, popřípadě ještě složená s posunutím ve směru osy o, není-li přímka AA' kolmá na AB (obr. 21).



Obr. 21



Obr. 22



Obr. 23

Jsou-li polopřímky AB, $A'B'$ orientovány opačně, je f středová souměrnost se středem S ve středu úsečky AA', g je osová souměrnost podle osy o procházející bodem S kolmo na AB, složená popřípadě ještě s posunutím ve směru osy o, jestliže jsou přímky AB, $A'B'$ různé (obr. 22). Jsou-li přímky AB, $A'B'$ různoběžné, musíme také ještě rozlišit dvě možnosti. Buď jsou osy úseček AA', BB' totožné, nebo různoběžné, nemohou být rovnoběžné a různé. Jsou-li totožné, je shodnost f otočení kolem průsečíku přímek AB, $A'B'$, nepřímá shodnost g je osová souměrnost podle osy úsečky AA'. Jsou-li osy úseček AA', BB' různoběžné, je f otočení kolem jejich průsečíku. Abychom nalezli nepřímou shodnost g, doplníme body A, B, A' na rovnoběžník ABB_1A' (obr. 23), bodem A vedeme přímku p rovnoběžnou s osou q úsečky B_1B' a označíme o osu dvojice přímek p, q. Souměrnost podle osy o zobrazí bod A na bod A_0, složíme-li ji s posunutím $A_0 \to A'$, dostaneme shodnost g. Tím jsme vyčerpali všechny možnosti.

2.7 Klasifikace shodností trojrozměrného euklidovského prostoru

Provedeme nyní klasifikaci shodností trojrozměrného euklidovského prostoru, opět budeme klasifikovat jednak podle samodružných bodů, jednak podle samodružných směrů. Při libovolně zvolené kartézské soustavě souřadnic v prostoru $\mathbf{E}_3$ je shodnost f dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + b_1 \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z + b_2 \\ z' &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3, \end{aligned}$$

matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je ortonormální. Hledáme-li samodružné směry této shodnosti, řešíme nejdříve příslušnou charakteristickou rovnici

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

To je pro λ algebraická rovnice třetího stupně s reálnými koeficienty, a má tudíž vždy aspoň jeden reálný kořen λ_0. K hodnotě λ_0 lze pak najít nenulový vektor $\mathbf{u}$ tak, že $\bar{f}(\mathbf{u}) = \lambda_0 \mathbf{u}$, kde $\bar{f}$ značí asociovaný homomorfismus k uvažované shodnosti f. Jelikož je f shodnost, zachovává zobrazení $\bar{f}$ velikost vektoru, tedy

$$\|\mathbf{u}\| = \|\bar{f}(\mathbf{u})\| = \|\lambda_0 \mathbf{u}\| = |\lambda_0|\,\|\mathbf{u}\|,$$

a jelikož je vektor $\mathbf{u}$ nenulový, musí být $|\lambda_0| = 1$, tj. $\lambda_0 = 1$ nebo $\lambda_0 = -1$. Můžeme předpokládat, že je vektor $\mathbf{u}$ jednotkový, v opačném případě stačí vynásobit vektor $\mathbf{u}$ převrácenou hodnotou jeho velikosti. Obdržený vektor je jednotkový a zobrazí se při zobrazení $\bar{f}$ také na svůj $\lambda_0$násobek. Dále můžeme předpokládat, že jsme kartézskou soustavu souřadnic zvolili tak, že poslední vektor odpovídajícího repéru je totožný s jednotkovým vektorem $\mathbf{u}$. Pak je $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$, při zobrazení $\bar{f}$ se zobrazí na svůj $\lambda_0$násobek, tedy na vektor $(0, 0, \lambda_0)$, $\lambda_0 = \pm 1$. Podle výše uvedených rovnic se zobrazí vektor $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ na vektor (a_{31}, a_{32}, a_{33}). Víme tedy, že $a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$ nebo $a_{33} = -1$. Z ortonormálnosti matice $\mathbf{A}$ plyne $(a_{13})^2 + (a_{23})^2 + (a_{33})^2 = 1$. Protože $a_{33} = \pm 1$,

musí být $a_{13} = a_{23} = 0$. Rovnice uvažované shodnosti mají tedy při zvolené soustavě souřadnic tvar

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{21}y && + b_1 \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y && + b_2 \\ z' &= && \pm z + b_3, \end{aligned}$$

matice

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & \pm 1 \end{pmatrix}$$

je ortonormální. To je splněno právě tehdy, když je ortonormální matice

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ a_{12}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Z klasifikace shodností roviny již víme, že vhodnou volbou soustavy souřadnic, v našem případě vhodnou volbou směrů os x, y (směr osy z jsme již zvolili), lze dosáhnout toho, že matice (1) má některý z těchto tvarů:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

tedy některý z tvarů

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}.$$
$$\sin\alpha \neq 0$$

Můžeme proto říci, že každá shodnost prostoru $\mathbf{E}_3$ je při vhodné volbě kartézské soustavy souřadnic dána některým z těchto systémů rovnic

(a) $x' = x + b_1$, $y' = y + b_2$, $z' = z + b_3$,

(b) $x' = x + b_1$, $y' = y + b_2$, $z' = -z + b_3$,

(c) $x' = -x + b_1$, $y' = -y + b_2$, $z' = z + b_3$,

(d) $x' = -x + b_1$, $y' = -y + b_2$, $z' = -z + b_3$,

(e) $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + b_1$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b_2$, $z' = z + b_3$, $\sin\alpha \neq 0$,

(f) $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + b_1$, $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b_2$, $z' = -z + b_3$, $\sin\alpha \neq 0$,

(g) $x' = x + b_1$, $y' = -y + b_2$, $z' = z + b_3$,

(h) $x' = x + b_1$, $y' = -y + b_2$, $z' = -z + b_3$.

	Pouze jeden samodružný směr	Jeden samodružný směr a dále je samodružný každý směr k němu kolmý	Každý směr samodružný
Žádný samodružný bod	otočení kolem přímky složené s posunutím ve směru té přímky $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z + r,\ r \neq 0,$ $\sin\alpha \neq 0$	souměrnost podle roviny složená s posunutím ve směru té roviny $x' = x + p$ $y' = y + q$ $z' = -z,\ (p, q) \neq (0, 0)$ nebo souměrnost podle přímky složená s posunutím ve směru té přímky $x' = -x,\ y' = -y$ $z' = z + r,\ r \neq 0$	posunutí (neidentické) $x' = x + p$ $y' = y + q$ $z' = z + r$ $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$
Pouze jeden samodružný bod	otočení kolem přímky složené se souměrností podle roviny kolmé na přímku $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = -z,\ \sin\alpha \neq 0$	–	středová souměrnost $x' = -x$ $y' = -y$ $z' = -z$
Přímka samodružných bodů, žádné další samodružné body	otočení kolem přímky $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z,\ \sin\alpha \neq 0$	souměrnost podle přímky $x' = -x,\ y' = -y$ $z' = z$	–
Rovina samodružných bodů, žádné další samodružné body	–	souměrnost podle roviny $x' = x,\ y' = y,$ $z' = -z$	–
Všechny body samodružné	–	–	identita $x' = x,\ y' = y,\ z' = z$

Hned vidíme, že stejného typu jsou soustavy (b), (g) — stačí zaměnit y, z, abychom z jedné dostali druhou. Dále dávají stejný typ shodnosti soustavy (c), (h), stačí zaměnit x, z.

Podívejme se teď na množinu samodružných bodů. V případě (a) je buď každý bod samodružný (je-li $b_1 = b_2 = b_3 = 0$), shodnost je identita, nebo není žádný samodružný bod, je-li aspoň jedno z čísel b_1, b_2, b_3 nenulové, zobrazení je posunutí, ne identita. V případě (b) má shodnost buď celou rovinu samodružných

bodů (je-li $b_1 = b_2 = 0$), nebo nemá shodnost žádný samodružný bod. Vždy je však rovina $z = \frac{1}{2}b_3$ samodružná. Můžeme předpokládat, že jsme počátek soustavy souřadnic zvolili v této rovině, pak je $b_3 = 0$. Jde buď o souměrnost podle roviny, nebo o souměrnost podle roviny složenou s neidentickým posunutím ve směru této roviny. Podobně můžeme vhodnou volbou počátku soustavy souřadnic dosáhnout toho, že je v (c) $b_1 = b_2 = 0$. Je-li také $b_3 = 0$, jde o souměrnost podle osy z, v případě $b_3 \neq 0$ jde o souměrnost podle osy z složenou s neidentickým posunutím ve směru osy z. Rovnice (d) vyjadřují středovou souměrnost podle středu $[\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \frac{1}{2}b_3]$. Zvolíme-li počátek soustavy souřadnic v tomto jediném samodružném bodě, je $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Rovnice (e) jsou v případě $b_3 = 0$ rovnicemi otočení kolem přímky o úhel α. Zvolíme-li počátek na této přímce, je $b_1 = b_2 = 0$. Není-li $b_3 = 0$, jedná se o otočení kolem přímky složené s neidentickým posunutím ve směru té přímky. Opět můžeme zvolit počátek soustavy souřadnic tak, že je $b_1 = b_2 = 0$. Shodnost, jež je dána rovnicemi (f), má vždy právě jeden samodružný bod. Když ho zvolíme za počátek soustavy souřadnic, je $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Jde o otočení kolem přímky složené se souměrností podle roviny kolmé k této přímce.

Tím jsme vyčerpali všechny případy, pro přehlednost si výsledek shrneme do tabulky, ke každé shodnosti jsou napsány její rovnice při vhodné volbě soustavy souřadnic.
V celé tabulce se posunutím rozumí vždy neidentické posunutí, otočením vždy otočení, které není identitou ani souměrností podle přímky (kterou můžeme považovat za otočení o 180°).

2.8 Podobné zobrazení. Grupa podobností

Definice 2.8.1. Zobrazení f euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$ se nazývá podobné, jestliže existuje kladné číslo k tak, že pro každé dva body $X, Y \in \mathbf{E}$ je

$$|f(X)f(Y)| = k\,|XY|.$$

Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.

Přímo z definice plyne, že každé shodné zobrazení je podobné zobrazení s koeficientem rovným jedné. Stejně jako u shodných zobrazení můžeme i v případě podobného zobrazení dokázat, že je prosté. Příkladem podobného zobrazení je stejnolehlost euklidovského prostoru na sebe. Je-li středem stejnolehlosti bod S a koeficientem číslo $\lambda \neq 0$, je stejnolehlost dána předpisem $X' = S + \lambda(X - S)$. Zobrazí-li se při téže stejnolehlosti bod Y na bod Y', je $Y' - X' = \lambda(Y - X)$, a proto je $|X'Y'| = |\lambda|\,|XY|$. Je tudíž každá stejnolehlost s koeficientem λ podobné zobrazení s koeficientem $|\lambda|$.

Nechť je f podobné zobrazení euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$ s koeficientem $k > 0$. Je-li $k = 1$, je f shodné zobrazení. Není-li f shodné zobrazení ($k \neq 1$), zvolme libovolnou stejnolehlost prostoru $\mathbf{E}$ s koeficientem $\frac{1}{k}$, označme ji h. Složené zobrazení $f \circ h$ je shodné zobrazení g prostoru $\mathbf{E}$ do prostoru $\mathbf{E}'$. K stejnolehlosti h existuje zobrazení inverzní, je to stejnolehlost s koeficientem k a s týmž středem, jaký má stejnolehlost h. Můžeme tudíž psát $f = g \circ h^{-1}$. Platí tedy věta 2.8.1.

Věta 2.8.1. Každé podobné zobrazení euklidovského prostoru $\mathbf{E}$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$ lze složit ze stejnolehlosti prostoru $\mathbf{E}$ a shodného zobrazení prostoru $\mathbf{E}$ do prostoru $\mathbf{E}'$.

Zcela obdobně jsme mohli dokázat, že každé podobné zobrazení lze složit ze shodného zobrazení a stejnolehlosti v prostoru, do kterého zobrazujeme. Nebudeme to již uvádět jako samostatnou větu, jde vlastně jen o obdobu věty 2.8.1. V ní bychom měli vyloučit ta podobná zobrazení, která jsou shodná, pak je totiž $\frac{1}{k} = 1$ a h i h^{-1} jsou identity. Identita se však také někdy počítá mezi stejnolehlosti, jak jsme si již uvedli, popřípadě bychom mohli za h zvolit středovou souměrnost, což je též stejnolehlost.

Věta 2.8.2. Každé podobné zobrazení je afinní.

Důkaz plyne ihned z předcházející věty, protože stejnolehlost a shodné zobrazení je afinní, rovněž zobrazení složené ze dvou afinních zobrazení je afinní.

Z rozkladu podobného zobrazení na stejnolehlost a zobrazení shodné plyne i platnost dalšího tvrzení.

Věta 2.8.3. Nechť jsou $P_0, P_1, \ldots, P_n$ lineárně nezávislé body n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ a $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n$ body euklidovského prostoru $\mathbf{E}'$. Afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_n$ do prostoru $\mathbf{E}'$, které zobrazuje bod P_i na bod P'_i pro $i = 0, 1, \ldots, n$, je právě tehdy podobné, existuje-li číslo $k > 0$ tak, že pro všechny dvojice $i, j = 0, 1, \ldots, n$ platí $|P'_iP'_j| = k\,|P_iP_j|$.

Nechť je v $\mathbf{E}_n$ zvolena kartézská soustava souřadnic a v m-rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}'_m$ rovněž. Nechť je f afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_n$ do prostoru $\mathbf{E}'_m$. Víme, že souřadnice bodu $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $X \in \mathbf{E}_n$, a souřadnice bodu $f(X) = [x'_1, \ldots, x'_m]$, $f(X) \in \mathbf{E}'_m$, jsou vázány vztahy

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j + b_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

koeficienty a_{rs}, b_r jsou konstanty. Dále víme, že zobrazení f je právě tehdy shodné, jestliže matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ splňuje podmínku $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$. Zobrazení f je podobné,

jestliže se dá složit ze stejnolehlosti (třeba se středem v počátku) a ze shodného zobrazení prostoru $\mathbf{E}_n$ do prostoru $\mathbf{E}'_m$. Stejnolehlost se středem v počátku a s koeficientem k přiřazuje bodu $X = [x_1, \ldots, x_n]$ bod $X' = [kx_1, \ldots, kx_n]$. Proto je zobrazení f podobné právě tehdy, když platí

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^T = k^2\mathbf{I}_n, \quad \text{tj.} \quad \sum_{r=1}^{m} a_{ir}a_{jr} = k^2\delta_{ij},$$

kde k je kladné číslo rovnající se koeficientu podobného zobrazení, $\delta_{ij} = 0$, když je $i \neq j$, a $\delta_{ij} = 1$, když je $i = j$.

Příklad 1. Zobrazení f euklidovské roviny do euklidovského trojrozměrného prostoru je vzhledem k zvoleným kartézským soustavám souřadnic dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= 2x + ay - 1 \\ y' &= x + by + 2 \\ z' &= y + 1. \end{aligned}$$

Určete koeficienty a, b tak, aby bylo zobrazení f podobné. Jaký je koeficient podobného zobrazení f?

Řešení. Rovnice můžeme psát maticově

$$(x', y', z') = (x, y)\begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ a, & b, & 1 \end{pmatrix} + (-1, 2, 1).$$

Aby bylo zobrazení f podobné, musí platit

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ a, & b, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2, & a \\ 1, & b \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2, & 0 \\ 0, & k^2 \end{pmatrix}, \qquad k > 0,$$

tedy $5 = k^2$, $2a + b = 0$, $a^2 + b^2 + 1 = k^2$. Je tudíž koeficient podobného zobrazení $k = \sqrt{5}$, $a = \pm 2\sqrt{5}/5$, $b = \mp 4\sqrt{5}/5$.

Mohli jsme postupovat též takto: V rovině zvolíme tři lineárně nezávislé body, třeba $P = [0, 0]$, $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$. Ty se zobrazí na základě uvedených rovnic zobrazení po řadě na body $P' = [-1, 2, 1]$, $A' = [1, 3, 1]$, $B' = [a - 1, b + 2, 2]$. Použijeme větu 2.8.3. Je $|P'A'| = \sqrt{5} = \sqrt{5}\,|PA|$, odkud $k = \sqrt{5}$. Dále musí platit $|A'B'| = \sqrt{5}\,|AB| = \sqrt{10}$, tedy $(a - 2)^2 + (b - 1)^2 + 1 = 10$, podobně $|P'B'| = \sqrt{5}\,|PB| = \sqrt{5}$, tj. $a^2 + b^2 + 1 = 5$. Z obdržených dvou rovnic vypočteme a, b.

Příklad 2. V euklidovské rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Existuje právě jedno podobné zobrazení roviny čtverce do sebe, při kterém se body A, B, S zobrazí po řadě na body D, B, C. Rozložte toto podobné zobrazení na stejnolehlost a zobrazení shodné.

Řešení. Protože bod B má být samodružný, je výhodné zvolit bod B za střed stejnolehlosti, koeficient stejnolehlosti je $\sqrt{2}$. Tuto stejnolehlost složíme s otočením kolem bodu B o 45° tak, aby se polopřímka BD zobrazila na polopřímku BC.

Příklad 3. Ukažte, že každé dvě paraboly jsou podobné, tzn. že existuje podobné zobrazení roviny jedné paraboly na rovinu druhé paraboly, při kterém se první parabola zobrazí na druhou.

Řešení. V první rovině můžeme zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že parabola má rovnici $y = ax^2$, $a \neq 0$. Musíme počátek soustavy souřadnic zvolit ve vrcholu paraboly a osu y totožnou s osou paraboly. V druhé rovině zvolíme stejným způsobem kartézskou soustavu souřadnic tak, že v ní má parabola rovnici $y = bx^2$, $b \neq 0$. Zobrazení, které bodu $[x, y]$ první roviny přiřadí bod $\left[\frac{a}{b}x, \frac{a}{b}y\right]$, je podobné s koeficientem $\left|\frac{a}{b}\right|$, a leží-li bod $[x, y]$ na parabole $y = ax^2$, leží bod $[x', y']$, $x' = \frac{a}{b}x$, $y' = \frac{a}{b}y$ na parabole $y = bx^2$, a obráceně. Leží-li obě paraboly v téže rovině a mají-li stejné vrcholy a osy, je sestrojené podobné zobrazení stejnolehlost, paraboly jsou stejnolehlé.

Přímo z definice podobného zobrazení plyne, že složení dvou podobných zobrazení je podobné zobrazení, jeho koeficient se rovná součinu koeficientů obou podobných zobrazení, ze kterých je výsledné zobrazení složeno. Podobné zobrazení n-rozměrného euklidovského prostoru do sebe je prosté afinní zobrazení, a tudíž je to zobrazení prostoru na sebe. Zobrazení k němu inverzní je opět podobné, koeficient podobného zobrazení f^{-1} se rovná převrácené hodnotě koeficientu podobného zobrazení f.

Definice 2.8.2. Podobnému zobrazení euklidovského prostoru na sebe říkáme stručně podobnost. Všechny podobnosti euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ tvoří při skládání grupu, tzv. grupu podobností prostoru $\mathbf{E}_n$.

V případě podobnosti můžeme stejně jako u afinity nebo shodnosti hledat její samodružné body a směry, a tím poznat všechny typy podobností, aspoň v prostorech nižší dimenze. Podobnost, která není shodnost, se nazývá vlastní podobnost. Platí:

Věta 2.8.4. Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

Důkaz. Dokážeme nejdříve, že vlastní podobnost f nemůže mít více než jeden samodružný bod. Kdyby měla dva různé samodružné body A, B, platilo by $|AB| = |f(A)f(B)| = k|AB|$, kde k je koeficient podobnosti, tedy $k = 1$. To je však spor s předpokladem, že f není shodnost. K této části důkazu jsme ani

nepotřebovali užít souřadnic. Pomocí souřadnic nyní dokážeme, že vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod. Maticové vyjádření podobnosti je $\mathbf{X}' = \mathbf{XA} + \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} . \mathbf{A}^T = k^2\mathbf{I}$. Její samodružné body jsou dány rovnicí $\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = -\mathbf{B}$. Tato rovnice má právě jedno řešení tehdy a jen tehdy, je-li $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \neq 0$. Kdyby bylo $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$, bylo by číslo $\lambda = 1$ kořenem charakteristické rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ a existoval by nenulový vektor $\mathbf{u}$, který by se při asociovaném homomorfismu $\bar{f}$ zobrazil na sebe. Zvolíme-li body C, B tak, že $\mathbf{u} = C - B$, muselo by platit $f(C) - f(B) = C - B$, a tedy $|f(B)f(C)| = |BC|$. Jelikož je $B \neq C$, muselo by opět být $k = 1$. To by byl spor, věta totiž mluví jen o vlastní podobnosti.

Samodružné směry podobnosti hledáme analyticky (pomocí souřadnic) stejně jako v případě shodnosti. Má-li podobnost koeficient k, mohou být kořeny příslušné charakteristické rovnice pouze čísla k a $-k$. Vyplývá to z toho, že asociované zobrazení k podobnosti f s koeficientem k zobrazí každý vektor $\mathbf{u} = C - B$ na vektor $\bar{f}(\mathbf{u}) = f(C) - f(B)$ a je $\|\bar{f}(\mathbf{u})\| = |f(B)f(C)| = k|BC| = k\|\mathbf{u}\|$. Nemusíme tedy kořeny charakteristické rovnice podobnosti počítat, stačí najít koeficient podobnosti k a zjistit, zda je k, resp. $-k$ kořenem charakteristické rovnice. V kladném případě pak hledat ty nenulové vektory, které se zobrazí na svůj $k$násobek, resp. $(-k)$násobek.

Příklad 4. Určete p, q, r tak, aby byla rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y + 2z + 4 \\ y' &= px + 2y + z - 2 \\ z' &= qx + ry + 2z - 2 \end{aligned}$$

dána vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic podobnost. Určete její samodružný bod a samodružné směry.

Řešení. Afinní zobrazení s uvedenými rovnicemi zobrazí bod $P = [0, 0, 0]$ na bod $P' = [4, -2, -2]$, bod $A = [1, 0, 0]$ na bod $A' = [5, p - 2, q - 2]$, obrazy bodů $B = [0, 1, 0]$ a $C = [0, 0, 1]$ jsou body $B' = [2, 0, r - 2]$, $C' = [6, -1, 0]$. Je $|PA| = |PB| = |PC| = 1$, $|AB| = |AC| = |BC| = \sqrt{2}$. Dále je $|P'C'| = 3$. Jestliže má úloha řešení, musí být koeficient hledané podobnosti $k = 3$, tudíž musí být $|P'B'|^2 = 8 + r^2 = 9$, $|B'C'|^2 = 17 + (r - 2)^2 = 9 . 2$, odkud plyne $r = 1$. Dále musí být $|A'B'|^2 = 9 + (p - 2)^2 + (q - 1)^2 = 18$, $|A'C'|^2 = 1 + (p - 1)^2 + (q - 2)^2 = 18$, $|P'A'|^2 = 1 + p^2 + q^2 = 9$. Poslední tři rovnice pro p, q mají jediné řešení $p = 2$, $q = -2$, rovnice podobnosti jsou

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y + 2z + 4 \\ y' &= 2x + 2y + z - 2 \\ z' &= -2x + y + 2z - 2. \end{aligned}$$

Jediným samodružným bodem je bod [0, 2, 0]. Charakteristické rovnici

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & -2, & 2 \\ 2, & 2-\lambda, & 1 \\ -2, & 1, & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

vyhovuje číslo 3, číslo -3 nevyhovuje. Nenulový vektor (u, v, w) se při asociovaném zobrazení zobrazí na svůj trojnásobek, jestliže

$$\begin{aligned} 3u &= u - 2v + 2w \\ 3v &= 2u + 2v + w \\ 3w &= -2u + v + 2w, \end{aligned}$$

až na nenulový násobek má soustava jediné řešení $u = 0$, $v = w = 1$. Podobnost má jediný samodružný směr určený vektorem $(0, 1, 1)$.

Dále se podívejme podrobněji na podobnosti euklidovské roviny. Víme, že každou podobnost s koeficientem k můžeme složit ze stejnolehlosti s koeficientem k a libovolným středem (třeba se středem v počátku soustavy souřadnic) a ze shodnosti. Stejnolehlost se středem v počátku a s koeficientem k je dána rovnicemi $x' = kx$, $y' = ky$, shodnost je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{aligned} \quad \text{nebo} \quad \begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + q. \end{aligned}$$

Proto je každá podobnost dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha - ky\sin\alpha + p = ax - by + p \quad &((a, b) \neq (0, 0), \\ y' &= kx\sin\alpha + ky\cos\alpha + q = bx + ay + q \quad &\text{podobnost přímá}) \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} x' &= kx\cos\alpha + ky\sin\alpha + p = ax + by + p \quad &((a, b) \neq (0, 0), \\ y' &= kx\sin\alpha - ky\cos\alpha + q = bx - ay + q \quad &\text{podobnost nepřímá}). \end{aligned}$$

Pro koeficient k platí $k = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$.

Zadáme-li v rovině dvě dvojice různých bodů (A, B), (A', B'), existuje právě jedna přímá a jedna nepřímá podobnost zobrazující bod A na bod A' a bod B na bod B'. Zdůvodnění je stejné jako v případě shodnosti, viz odstavec 2.6. Na rozdíl od shodnosti však nemusíme požadovat, aby $|A'B'| = |AB|$, nýbrž poměr $|A'B'| : |AB|$ je koeficient přímé i nepřímé podobnosti zobrazující body A, B na body A', B'.

Příklad 5. Najděte všechny podobnosti euklidovské roviny, při kterých se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[4, -2]$ a bod $[2, 3]$ na bod $[2, -8]$.

Řešení. Rovnice přímé podobnosti hledáme ve tvaru $x' = ax - by + p$, $y' = bx + ay + q$, bod $[1, 0]$ se zobrazí na $[4, -2]$, takže má platit $4 = a + p$, $-2 = b + q$. Z dané druhé dvojice bodu a jeho obrazu dostaneme rovnice $2 = 2a - 3b + p$, $-8 = 2b + 3a + q$. Máme tak soustavu čtyř lineárních rovnic pro čtyři neznámé a, b, p, q, která má jediné řešení $a = -2$, $b = 0$, $p = 6$, $q = -2$. Rovnice přímé podobnosti jsou $x' = -2x + 6$, $y' = -2y - 2$. Jsou to rovnice stejnolehlosti s koeficientem -2 a středem $[2, -\frac{2}{3}]$. V případě nepřímé podobnosti $x' = ax + by + p$, $y' = bx - ay + q$ má platit

$$\begin{aligned} 4 &= a + p \qquad & 2 &= 2a + 3b + p \\ -2 &= b + q \qquad & -8 &= 2b - 3a + q, \end{aligned}$$

odkud plyne $5a = 8$, $5b = -6$, $5p = 12$, $5q = -4$, rovnice nepřímé podobnosti požadovaných vlastností jsou

$$\begin{aligned} x' &= +\tfrac{8}{5}x - \tfrac{6}{5}y + \tfrac{12}{5} \\ y' &= -\tfrac{6}{5}x - \tfrac{8}{5}y - \tfrac{4}{5}. \end{aligned}$$

Samodružný bod je bod $[-\frac{12}{5}, \frac{4}{5}]$, koeficient je 2. Vlastnímu číslu 2 odpovídají vlastní vektory, které jsou nenulovým násobkem vektoru $(-3, 1)$, vlastnímu číslu -2 odpovídá vlastní vektor $(1, 3)$. Tyto dva vektory určují samodružné směry podobnosti.

Víme, že každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod. Zvolíme-li samodružný bod vlastní podobnosti euklidovské roviny za počátek soustavy souřadnic, má přímá podobnost rovnice $x' = ax - by$, $y' = bx + ay$, nepřímá podobnost má rovnice $x' = ax + by$, $y' = bx - ay$. V obou případech je $0 \neq a^2 + b^2 \neq 1$. Charakteristická rovnice $(a - \lambda)^2 + b^2 = 0$ přímé podobnosti nemá při $b \neq 0$ žádný reálný kořen, podobnost je složením stejnolehlosti se středem v samodružném bodě a otočení kolem tohoto bodu o úhel α, kde $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2 + b^2}$. Je-li $b = 0$, je přímá podobnost roviny stejnolehlost. Při nepřímé podobnosti je charakteristická rovnice $\lambda^2 - a^2 - b^2 = 0$, podobnost má dva na sebe kolmé samodružné směry. Zvolíme-li směry os x, y v těchto samodružných směrech, je $b = 0$, podobnost má při vhodné volbě pořadí os x, y rovnice $x' = ax$, $y' = -ay$, $0 \neq a \neq 1$. Jde o složení stejnolehlosti a osové souměrnosti, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti. Platí tedy věta 2.8.5.

Věta 2.8.5. Každá vlastní podobnost euklidovské roviny je buď stejnolehlost, nebo stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti, nebo stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.

Nechť jsou v euklidovské rovině dány dvě nestejně velké úsečky AB, $A'B'$. Víme, že existuje právě jedna přímá a jedna nepřímá podobnost zobrazující bod A na bod A' a bod B na bod B'. Protože úsečky AB, $A'B'$ nejsou stejně dlouhé, jsou to podobnosti vlastní, jejich společný koeficient $k = |A'B'| / |AB|$ je různý od jedné. Je-li bod X samodružným bodem některé z uvažovaných podobností, musí pro něj platit

$$|A'X|:|AX| = k \quad \text{a zároveň} \quad |B'X|:|BX| = k.$$

Musíme ovšem vyloučit body A, B, což můžeme. Stačí předpokládat, že je $A \neq A'$ a $B \neq B'$. V odstavci 3.1 v [G] jsme si dokázali, že množina všech bodů X, které splňují první rovnici, je tzv. Apolloniova kružnice, označme ji k_1. Podobně označíme k_2 kružnici, která je množinou všech bodů X, které splňuji rovnici $|B'X| = k|BX|$. Tyto dvě kružnice musí mít společný bod, protože víme, že každá vlastní podobnost má samodružný bod. Protínají-li se kružnice k_1, k_2 ve dvou bodech, je jeden samodružným bodem přímé a druhý nepřímé podobnosti, jež zobrazují body A, B po řadě na body A', B'.

Cvičení

1. Zvolte v rovině úsečky AB, $A'B'$ různých délek, $A \neq A'$, $B \neq B'$. Sestrojte výše popsané kružnice k_1, k_2.
2. Najděte podobnost euklidovské roviny, při které se zobrazí počátek na bod $[0, 2]$, bod $[1, 1]$ na počátek a bod $[2, 0]$ na bod $[2, p]$. Určete p a najděte samodružné body a směry nalezené podobnosti.
3. Najděte rovnice podobnosti, při které je počátek samodružný a obrazem bodu $[5, -3]$ je bod $[1, 1]$.
4. Určete všechny podobnosti, pro které jsou bod $[1, 1]$ a směr vektoru $(1, 1)$ samodružné.
5. V rovině je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Určete obraz bodu C v podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C. Určete samodružný bod této podobnosti.
6. Kolik existuje podobností roviny zobrazující danou úsečku na jinou danou úsečku?
7. Napište rovnice všech podobností zobrazujících body $[1, 2]$ a $[0, 1]$ po řadě na body $[3, -1]$, $[4, 2]$. Rozložte je na stejnolehlost a shodnost.
8. Určete čísla a, b tak, aby bylo rovnicemi $x' = x + ay$, $y' = x$, $z' = -x + by$ dáno podobné zobrazení roviny do trojrozměrného prostoru.

2.9 Přehled geometrických zobrazení

Udělejme si přehled zatím probraných vzájemně jednoznačných zobrazení euklidovského prostoru na sebe. Uvedeme si vždy název zobrazení, podmínky pro matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ v jeho maticové rovnici $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ a jeho geometrickou charakteristiku:

afinita	$\det \boldsymbol{A} \neq 0$	zachovává kolineárnost a dělicí poměr tří bodů
přímá afinita	$\det \boldsymbol{A} > 0$	zachovává kolineárnost a dělicí poměr tří bodů, zachovává orientaci repéru
nepřímá afinita	$\det \boldsymbol{A} < 0$	jako afinita, mění orientaci repéru
podobnost	$\boldsymbol{A} . \boldsymbol{A}^T = k^2\boldsymbol{I}$	zachovává poměr vzdáleností
přímá podobnost	$\boldsymbol{A} . \boldsymbol{A}^T = k^2\boldsymbol{I}$, $\det \boldsymbol{A} > 0$	zachovává poměr vzdáleností a orientaci repéru
nepřímá podobnost	$\det \boldsymbol{A} < 0$, $\boldsymbol{A} . \boldsymbol{A}^T = k^2\boldsymbol{I}$	jako podobnost, mění orientaci repéru
shodnost	$\boldsymbol{A} . \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$	zachovává vzdálenost
přímá shodnost	$\boldsymbol{A} . \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$, $\det \boldsymbol{A} = 1$	zachovává vzdálenost a orientaci repéru
nepřímá shodnost	$\boldsymbol{A} . \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$, $\det \boldsymbol{A} = -1$	jako shodnost, mění orientaci repéru
homotetie	$\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{I}$, $\lambda \neq 0$	všechny směry samodružné
středová souměrnost	$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I}$	každý vektor se zobrazí na vektor opačný
translace (posunutí)	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$	všechny vektory samodružné
ekviafinita	$\lvert\det \boldsymbol{A}\rvert = 1$	zachovává dělicí poměr a objem
identita	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$	každý bod je samodružný

(Mluvíme-li o obraze vektoru, míníme zobrazení asociované.)

Ekviafinitu jsme definovali již na afinním prostoru jako afinitu, jejíž modul se v absolutní hodnotě rovná jedné. Nepotřebovali jsme k tomu skalární součin, metriku. Nyní si ukážeme, jaký význam má modul afinity euklidovského prostoru a tím si zdůvodníme, proč jsme v přehledu uvedli, že ekviafinita zachovává objem.

Zvolme v n-rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ kartézskou soustavu souřadnic pomocí repéru $\langle P, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ a n lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$. Nechť je

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\boldsymbol{e}_k.$$

Absolutní hodnota z determinantu matice $\boldsymbol{U} = (u_{ik})$ nezávisí na volbě kartézské soustavy souřadnic (vzpomeňte si na zavedení vnějšího součinu vektorů) a rovná se objemu V rovnoběžnostěnu, jehož hranami jsou úsečky PQ_i, $Q_i = P + \boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Je-li f afinita prostoru $\mathbf{E}_n$, $\bar{f}$ asociované zobrazení a

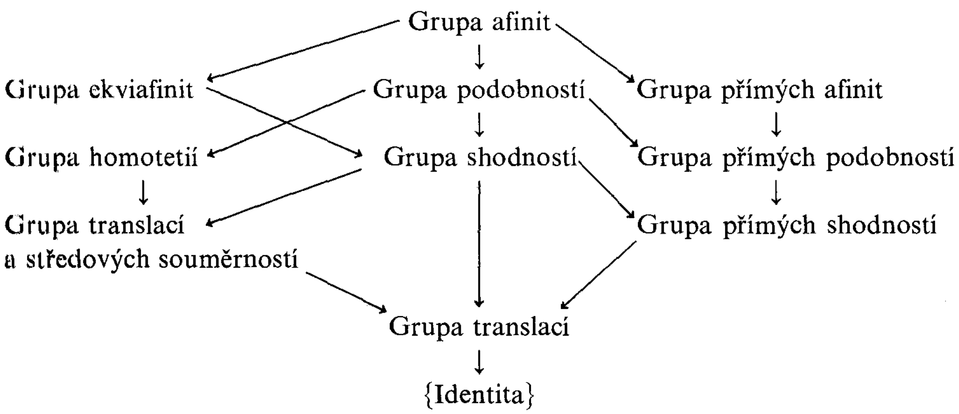
$$\bar{f}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_j,$$

zobrazí se vektor $\boldsymbol{u}_i$ na vektor

$$\bar{f}(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} u_{ik}a_{kr}\mathbf{e}_r.$$

Objem V' rovnoběžnostěnu, jehož hranami jsou úsečky $f(P)\,f(Q_i)$, se proto rovná absolutní hodnotě determinantu z matice $\boldsymbol{U}\,.\,\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, tedy $V' = V.\,|\operatorname{modul} f|$. To je geometrický význam modulu afinity na euklidovském prostoru. Ekviafinity jsou zřejmě ty afinity, při kterých se každý rovnoběžnostěn zobrazí na rovnoběžnostěn stejného objemu.

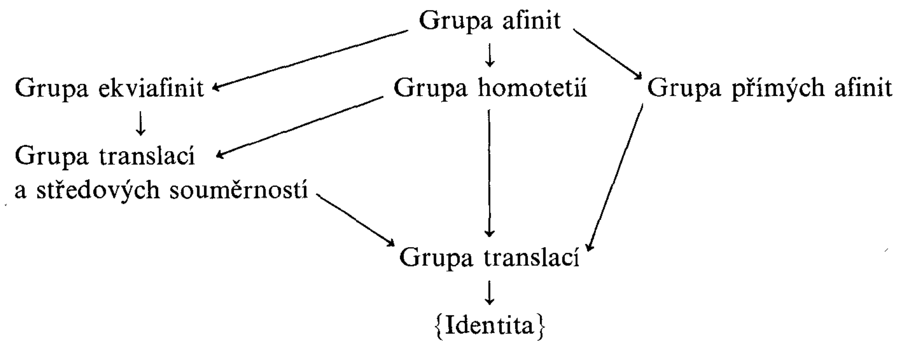
Středové souměrnosti nebo nepřímé shodnosti prostoru $\mathbf{E}_n$ netvoří grupu. Do následujícího grafu jsme zakreslili přehled podgrup grupy afinit na euklidovském prostoru (šipky směřují vždy k podgrupě).



Grupa translací a středových souměrností je průnikem grupy homotetií a grupy shodností. Ta je zase průnikem grupy ekviafinit a grupy podobností. Grupa přímých podobností je průnikem grupy podobností a grupy přímých afinit. Grupa podobností je nejmenší grupa, která obsahuje grupu shodností a grupu homotetií.

V případě grup transformací afinního prostoru musíme vynechat grupy podobností a shodností, které jsou definovány pouze v prostoru euklidovském. Pro

ostatní transformace platí vše stejně, rovnice ovšem bereme vzhledem k lineárním soustavám souřadnic. Přehled grup transformací afinního prostoru je následující:



Uvedené přehledy bychom mohli doplnit dalšími podgrupami grupy afinit a vztahy mezi nimi. Například v prostorech sudé dimenze je každá homotetie přímá afinita. Podgrupou grupy všech afinit je zřejmě množina všech těch afinit, které zachovávají daný geometrický objekt (v případě bodu dostaneme tzv. centroafinní grupu). Naproti tomu můžeme afinní prostor rozšířit na tzv. projektivní rozšíření afinního prostoru, v něm studovat tzv. grupu kolineací a chápat grupu afinit jako podgrupu grupy kolineací. O tom se něco dozvíte v dalších kapitolách.

2.10 Sférická inverze

Dříve než si povíme něco o inverzích, vrátíme se k pojmu stejnolehlosti. V afinním prostoru jsme definovali stejnolehlost jako homotetii (tj. afinitu, v níž je každý směr samodružný), která má právě jeden samodružný bod, tzv. střed S stejnolehlosti. K stejnolehlosti existuje číslo λ $(0 \neq \lambda \neq 1)$, tzv. *koeficient stejnolehlosti* tak, že každému bodu X přiřazuje stejnolehlost bod X' podle pravidla

$$X' - S = \lambda(X - S).$$

Bod S je tedy samodružný, pro $X \neq S$ leží body S, X, X' na přímce. Přitom při $\lambda > 0$ jsou polopřímky SX, SX' totožné, při $\lambda < 0$ jsou polopřímky SX, SX' opačné. Jsme-li v euklidovském prostoru, plyne z uvedené rovnice rovnost $|SX'| = |\lambda|\,|SX|$. Mohli bychom proto v euklidovském prostoru definovat stejnolehlost takto: Stejnolehlost se středem S a koeficientem λ $(\lambda \neq 0)$ je zobrazení euklidovského prostoru na sebe, při kterém

a) se bod $X \neq S$ zobrazí na bod X' tak, že polopřímky SX, SX' jsou při $\lambda > 0$ totožné, při $\lambda < 0$ opačné,

b) $|SX'| = |\lambda|\,|SX|$,

c) bod S je samodružný.

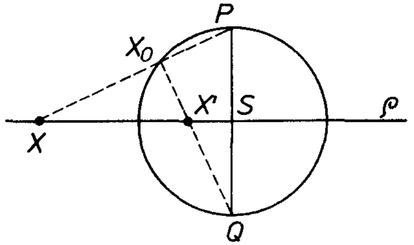
To je v podstatě definice, která se používá v středoškolských učebnicích. Obdobně se definuje v euklidovském prostoru zobrazení, které se nazývá inverze (v rovině mluvíme o kruhové inverzi, v prostoru o sférické inverzi).

Definice 2.10.1. Inverze v euklidovském prostoru $\mathbf{E}$ se středem S a koeficientem $\varkappa$ ($\varkappa \neq 0$) je zobrazení množiny $\mathbf{E} - \{S\}$ na sebe, které zobrazí každý bod X na bod X' tak, že

a) polopřímky SX, SX' jsou totožné při $\varkappa > 0$, opačné při $\varkappa < 0$,

b) $|SX'| = \dfrac{|\varkappa|}{|SX|}$.

Je ihned vidět, že inverze je jednoznačně určena svým středem S a jednou dvojicí A, A' ($A \neq S$) bodu A a jeho obrazu A'. Body S, A, A' musí být ovšem kolineární, $A' \neq S$.



Obr. 24

Ukážeme si ještě jiný přístup k pojmu inverze. Představme si v trojrozměrném euklidovském prostoru sféru o poloměru r a středu S (obr. 24), na ní dva diametrálně protilehlé body P, Q a rovinu ϱ, která prochází středem S a je kolmá na přímku PQ. Zobrazení, které každému bodu X_0 sféry ($X_0 \neq P$) přiřadí průsečík X přímky PX_0 a roviny ϱ, se nazývá stereografická projekce sféry na rovinu. Stereografická projekce se používá v kartografii, je to zobrazení konformní (zachovává velikost úhlů). Stejně tak můžeme každému bodu X_0 ($X_0 \neq Q$) přiřadit jeho stereografický průmět X' z bodu Q na rovinu ϱ. Je-li $X \in \varrho$, $X \neq S$, můžeme mu přiřadit bod X_0 na sféře tak, že X je stereografickým průmětem bodu X_0 z bodu P. Je pak $X_0 \neq Q$, $X_0 \neq P$ a můžeme k němu sestrojit jeho stereografický průmět X' z bodu Q, $X' \neq S$. Body X, X_0, X' leží v téže polorovině s hraniční přímkou PQ, proto jsou polopřímky SX, SX' totožné. Trojúhelníky XSP a QSX' jsou podobné, protože jsou pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu S a platí $|\sphericalangle SXP| = 90° - |\sphericalangle XPS| = |\sphericalangle SQX'|$. Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne $|SX| : |SP| = |SQ| : |SX'|$, tj. $|SX|\,|SX'| = r^2$. Vidíme, že bod X' je obrazem bodu X v kruhové inverzi roviny ϱ se středem S a koeficientem r^2. Tím jsme si ukázali, že každou kruhovou inverzi s kladným koeficientem můžeme dostat jako složení inverzního zobrazení

k stereografické projekci z bodu P a stereografické projekce z bodu Q diametrálně protilehlého k bodu P.

Uvedeme si některé rozdíly mezi stejnolehlostí a inverzí a některé analogie. S výjimkou středové souměrnosti není stejnolehlost zobrazení involutorní. Inverze je vždy zobrazení involutorní. Vyplývá to ihned z definice inverze, body X a X' v ní vystupují symetricky – podmínky v definici inverze se nezmění, zaměníme-li X a X'. Při stejnolehlosti se středem S je velikost $|SX'|$ přímo úměrná velikosti $|SX|$, v inverzi jde o úměrnost nepřímou. V stejnolehlosti je bod S samodružný, v inverzi není obraz středu inverze definován. Jestliže se bod X blíží ke středu S inverze, roste vzdálenost jeho obrazu X' od bodu S nade všechny meze. To nás vede k zavedení tzv. Möbiova prostoru.

Definice 2.10.2. K n-rozměrnému euklidovskému prostoru $\mathbf{E}_n$ přidáme jeden prvek, tzv. nevlastní bod, který označíme ∞. Množina $\mathbf{M}_n = \mathbf{E}_n \cup (\infty)$ se nazývá Möbiův n-rozměrný prostor. Každou inverzi euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ dodefinujeme tak, že obrazem středu inverze je bod ∞ a obrazem bodu ∞ je střed inverze. Bod ∞ považujeme za bod, který leží v každé nadrovině prostoru $\mathbf{E}_n$ a ve vnější oblasti každé sféry prostoru $\mathbf{E}_n$. Bodům prostoru $\mathbf{E}_n$ říkáme též vlastní body prostoru $\mathbf{M}_n$.

Poznámka 1. Sférou v $\mathbf{E}_n$ o středu S a poloměru r ($r > 0$) rozumíme množinu všech těch bodů X v $\mathbf{E}_n$, pro které je $|SX| = r$. V případě $n > 3$ se někdy používá pojem nadsféra (podobně jako nadrovina), zatímco pojem sféra je pak vyhrazen pro trojrozměrný prostor. V každém případě je sférou v rovině kružnice.

Poznámka 2. August Ferdinand Möbius (1790–1868) byl profesorem astronomie v Lipsku, systematicky vyšetřoval a porovnával všechna tehdy známá geometrická zobrazení.

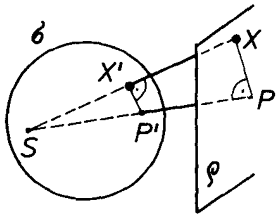
Odvodíme si několik základních vlastností inverzí. Přitom se někdy omezíme na inverze s kladným koeficientem, protože inverzi se záporným koeficientem $\varkappa$ a středem S můžeme složit z inverze s kladným koeficientem $|\varkappa|$ a středem S a středové souměrnosti podle středu S.

Věta 2.10.1. Sférická inverze se středem S a koeficientem $\varkappa$ zobrazuje vnitřní oblast sféry o středu S a poloměru $\sqrt{|\varkappa|}$ na její vnější oblast a vnější oblast na vnitřní. Popsaná sféra sama je samodružná: Při $\varkappa > 0$ je každý její bod samodružný, při $\varkappa < 0$ se každý její bod zobrazí na bod diametrálně protilehlý.

Důkaz plyne ihned z definice inverze, ze vztahu $|SX|\,|SX'| = |\varkappa|$. Je-li $|SX| < \sqrt{|\varkappa|}$, je $|SX'| > \sqrt{|\varkappa|}$, a obráceně.

Věta 2.10.2. Nadrovina procházející středem S inverze je samodružná. Obrazem nadroviny, která neprochází středem inverze, je sféra, která prochází středem inverze.

Důkaz. První část tvrzení je zřejmá, plyne přímo z definice inverze. Nechť je ϱ nadrovina, která neprochází středem S inverze. Označme P patu kolmice vedené bodem S k nadrovině ϱ a P' její obraz v uvažované inverzi. Dále označme σ sféru nad průměrem SP' (obr. 25). Zvolíme-li v nadrovině ϱ libovolný bod X, protne přímka SX sféru σ v bodě S a v dalším bodě, který označíme X'. Podle Thaletovy věty je trojúhelník $SX'P'$ pravoúhlý, a tudíž podobný trojúhelníku SPX.

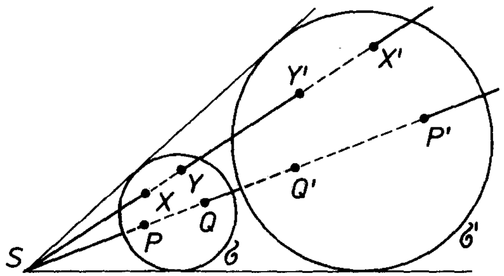


Obr. 25

Proto je $|SX||SX'| = |SP||SP'|$. Kromě toho jsou polopřímky SX, SX' totožné, resp. opačné právě tehdy, jsou-li totožné, resp. opačné polopřímky SP, SP'. Je tedy bod X' obrazem bodu X v uvažované inverzi, čímž je věta dokázána.

Z této věty ihned plyne, že inverze není afinní zobrazení, neboť se při ní mohou zobrazit kolineární body na nekolinaérní body. Poněkud složitější je důkaz druhé části další věty.

Věta 2.10.3. Obrazem sféry, která prochází středem inverze, je nadrovina, která neprochází středem inverze. Obrazem sféry, která neprochází středem inverze, je opět sféra, která neprochází středem inverze.



Obr. 26

Důkaz. První část tvrzení plyne ihned z předcházející věty a z toho, že inverze je zobrazení involutorní. Pro důkaz druhé části označme S střed inverze a P, Q krajní body toho průměru sféry σ, který prochází bodem S, dále P', Q' obrazy bodů P, Q v inverzi (obr. 26). Je tedy $|SP||SP'| = |SQ||SQ'|$. Můžeme předpokládat, že jde o inverzi s kladným koeficientem, takže polopřímky SP, SP' jsou totožné, stejně tak polopřímky SQ, SQ'. Označme σ' sféru nad průměrem $P'Q'$. Sféry σ a σ' jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem S, protože platí $|SP'| : |SQ| = |SQ'| : |SP|$. Proto přímka procházející bodem S buď obě sféry σ, σ' protíná, nebo je jejich společnou tečnou, nebo nemá s žádnou společný bod. Je-li X bod sféry σ, označíme Y její další průsečík s přímkou SX, popřípadě položíme $Y = X$, je-li přímka SX tečna sféry σ. Podobně označíme X', Y' průsečíky přímky SX se sférou σ', a to tak, aby bodu X odpovídal ve stejnolehlosti sfér σ, σ' bod Y' a bodu Y bod X'. Z mocnosti bodu S k sféře σ plyne $|SX||SY| = |SP||SQ|$. Ze stejnolehlosti sfér σ a σ' plyne $|SX'| : |SY| = |SP'| : |SQ|$. Vynásobením obou rovnic dostaneme $|SX||SX'| = |SP||SP'|$. Je tudíž bod X' obrazem bodu X v uvažované inverzi, neboť polopřímky SX, SX' jsou totožné. Tím jsme dokázali, že obrazem sféry σ je sféra σ'. Pro úplný důkaz si však promyslete též případ, kdy je bod S bod vnitřní oblasti sféry σ.

Při inverzi se středem S a koeficientem $\varkappa$ jsou stejně jako při stejnolehlosti bod S, bod $X \neq S$ a jeho obraz X' kolineární, tedy $X' - S = k(X - S)$, kde číslo k má stejné znaménko jako koeficient $\varkappa$. Protože je zároveň $|SX'| = \dfrac{|\varkappa|}{|SX|}$ a $|SX'| = |k||SX|$, musí být $k = \dfrac{\varkappa}{|SX|^2}$. Na rozdíl od stejnolehlosti není tedy číslo k konstantní, nýbrž závisí na X. Můžeme tedy v případě inverze se středem S a koeficientem $\varkappa$ psát

$$X' - S = \frac{\varkappa}{|XS|^2}(X - S). \tag{1}$$

Odpovídá-li dalšímu bodu Y v inverzi bod Y', je také

$$Y' - S = \frac{\varkappa}{|YS|^2}(Y - S),$$

odkud postupně plyne

$$\begin{aligned}|X'Y'|^2 &= \varkappa^2 \left\| \frac{1}{|XS|^2}(X - S) - \frac{1}{|YS|^2}(Y - S) \right\|^2 = \\ &= \varkappa^2 \left(\frac{1}{|XS|^2} + \frac{1}{|YS|^2} - \frac{2}{|XS|^2|YS|^2}(X - S)(Y - S) \right) = \\ &= \varkappa^2 \left(\frac{1}{|XS|^2} + \frac{1}{|YS|^2} - \frac{|XS|^2 + |YS|^2 - |XY|^2}{|XS|^2|YS|^2} \right) = \\ &= \varkappa^2 \frac{|XY|^2}{|XS|^2|YS|^2},\end{aligned}$$

takže

$$|X'Y'| = \frac{|\varkappa|}{|XS||YS|}|XY|. \tag{2}$$

Použili jsme při tom vztah $2\boldsymbol{uv} = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2$. Odvozený vzorec (2) platí samozřejmě jen pro vlastní body X, Y, různé od středu S inverze. Je z něho ihned vidět, že inverze není podobné zobrazení.

Poznamenejme ještě, že inverze je zobrazení *konformní*, tj. zobrazení zachovávající velikost úhlů. To se snadno dokáže prostředky diferenciální geometrie. Je to však možné nahlédnout také takto: Uvažujme dvě různé přímky a, b protínající se ve vlastním bodě P, různém od středu inverze S. Neprochází-li žádná z nich středem inverze, zobrazí se každá z nich na kružnici, procházející středem inverze. Dále procházejí tyto kružnice obrazem P' bodu P. Úhel jejich tečen v bodě P' se rovná úhlu jejich tečen v bodě S a ten se rovná úhlu přímek a, b, protože uvažované tečny v bodě S jsou s přímkami a, b rovnoběžné. Ještě jednodušší je důkaz v případě, kdy se některá z přímek a, b zobrazí na sebe.

Z rovnice (1) plyne okamžitě analytické vyjádření inverze, stačí ji rozepsat do souřadnic. Je-li v $\mathbf{E}_n$ zvolena kartézská soustava souřadnic, v níž je $S = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $X' = [x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$, je

$$x'_i = s_i + \frac{\varkappa}{\sum_{k=1}^{n} (x_k - s_k)^2} (x_i - s_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Věta 2.10.4 (*Ptolemaiova*). Nechť jsou v euklidovské rovině dány body A, B, C, D, které jsou navzájem různé a neleží na jedné přímce. Pak platí

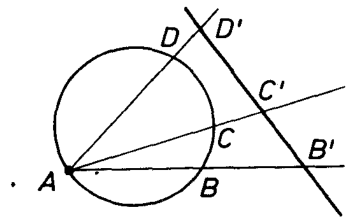
$$|AB|\,|CD| + |AD|\,|BC| \geqq |AC|\,|BD|,$$

přičemž rovnost platí právě tehdy, jestliže je $ABCD$ konvexní tětivový čtyřúhelník.

Důkaz. Body A, B, D nebo C, B, D neleží na přímce. Nechť jsou to body A, B, D. Inverze se středem v bodě A a koeficientem 1 zobrazí body B, C, D na body B', C', D', pro které platí trojúhelníková nerovnost

$$|B'C'| + |C'D'| \geqq |B'D'|,$$

v níž platí rovnost právě tehdy, když je bod C' bodem úsečky $B'D'$. To nastane právě tehdy, když leží bod C na vzoru přímky $B'D'$ v uvažované kruhové inverzi (tím je kružnice opsaná trojúhelníku ABD) a dvojice A, C a B, D se na této kružnici oddělují (obr. 27). Dosadíme-li do trojúhelníkové nerovnosti pro body B', C', D' podle vzorce (2), dostaneme právě dokazovanou nerovnost.



Obr. 27

Poznámka 3. Claudius Ptolemaios žil kolem roku 150 našeho letopočtu a zabýval se především astronomií. Vyslovená věta je obsažena v jeho Velké sbírce, tzv. Almagestu.

Cvičení

1. Ukažte, že pro inverzi není možné definovat asociované zobrazení.
2. Odpovídají-li si v kruhové inverzi se středem S a koeficientem $\varkappa > 0$ vlastní body X, X' a je-li X bodem vnitřní oblasti kružnice $k(S, \sqrt{\varkappa})$, leží bod X na spojnici bodů dotyku tečen vedených bodem X' ke kružnici k. Dokažte a využijte při konstrukci obrazu Y' libovolného bodu Y.
3. Dokažte věty 2.10.2 a 2.10.3 v případě kruhové inverze analyticky (počátek kartézské soustavy souřadnic zvolte ve středu inverze).
4. Ukažte, že složením dvou inverzí s týmž středem je stejnolehlost (identita je stejnolehlost s koeficientem 1).
5. V rovině je dán trojúhelník ABC. Najděte střed kruhové inverze zobrazující bod A na bod B, je-li bod C samodružný.
6. Určete střed kruhové inverze s koeficientem 2, při které se bod $[1, 0]$ zobrazí na bod $[2, 0]$.
7. Existuje kruhová inverze, při níž jsou body $[-1, 0]$, $[1, 0]$ samodružné a bod $[0, 0]$ se zobrazí na bod $[0, 1]$? Při kladné odpovědi určete střed této inverze, koeficient a analytické vyjádření.
8. Při kterých kruhových inverzích se zobrazí bod $[0, 1]$ na bod $[0, 9]$ a bod $[2, 0]$ do vlastního bodu na ose x? Určete vždy střed a koeficient inverze.

2.11 Grupa sférických transformací

Z cvičení 4 předcházejícího odstavce vyplývá, že složením dvou inverzí s týmž středem je stejnolehlost. Obdobně je možno dokázat, že složením inverze a stejnolehlosti s týmž středem je inverze. Odtud ihned plyne, že všechny inverze a stejnolehlosti s daným středem S tvoří grupu. Označíme-li $(1, \lambda)$ stejnolehlost se středem S a koeficientem λ, $(-1, \varkappa)$ inverzi se středem S a koeficientem $\varkappa$, platí

$$\begin{aligned}
(1, \varkappa) \circ (1, \lambda) &= (1, \varkappa\lambda) \\
(-1, \varkappa) \circ (1, \lambda) &= \left(-1, \frac{\varkappa}{\lambda}\right) \\
(1, \lambda) \circ (-1, \varkappa) &= (-1, \lambda\varkappa) \\
(-1, \lambda) \circ (-1, \varkappa) &= \left(1, \frac{\lambda}{\varkappa}\right).
\end{aligned}$$

Vidíme, že jde o nekomutativní grupu.

Co je však složením dvou inverzí s různými středy? Tuto otázku si musíme zodpovědět, chceme-li určit nejmenší grupu obsahující všechny inverze. Nechť je tedy I inverze Möbiova prostoru $\mathbf{M}_n$ se středem S a koeficientem $\varkappa$, K inverze se středem T a koeficientem λ, $S \neq T$. Označme ještě U obraz bodu S při inverzi K a L inverzi se středem U a koeficientem 1. Zjistíme, co je složením inverzí I, K, L, zajímá nás tedy zobrazení $L \circ K \circ I$. V následující tabulce si přehledně zapíšeme obrazy některých bodů při inverzích I, K, L:

$$\begin{array}{ccccccc} & I & & K & & L & \\ \infty & \to & S & \to & U & \to & \infty \\ S & \to & \infty & \to & T & \to & L(T) \\ I(T) & \to & T & \to & \infty & \to & U \end{array}$$

Je dobře si připomenout, že každá inverze je zobrazení involutorní, proto je $I^{-1}(T) = I(T)$. Označme ještě X, Y dva body různé od bodů S, $I(T)$ a X', Y', X'', Y'', X''', Y''' body tak, aby platilo

$$\begin{array}{ccccccc} & I & & K & & L & \\ X & \to & X' & \to & X'' & \to & X''' \\ Y & \to & Y' & \to & Y'' & \to & Y''' \end{array}$$

Použijeme-li několikrát vzorec (2) z předcházejícího odstavce, dostáváme

$$|X'''Y'''| = \frac{1}{|UX''|\,|UY''|}\,|X''Y''|, \qquad |UX''| = \frac{|\lambda|}{|TS|\,|TX'|}\,|SX'|,$$

$$|X''Y''| = \frac{|\lambda|}{|TX'|\,|TY'|}\,|X'Y'|, \qquad |UY''| = \frac{|\lambda|}{|TS|\,|TY'|}\,|SY'|,$$

$$|X'Y'| = \frac{|\varkappa|}{|SX|\,|SY|}\,|XY|, \text{ takže } |X'''Y'''| = \frac{|TS|^2}{|\lambda\varkappa|}\,|XY|.$$

Poslední vzorec platí i v případě, kdy je $X = S$ nebo $Y = I(T)$, a tedy X' nebo Y'' splývá s nevlastním bodem ∞, pouze odvození je trochu jiné. Je tudíž $L \circ K \circ I$ podobnost, označme ji f. Je $f(\infty) = \infty$. Proto je účelné rozšířit každou podobnost f euklidovského prostoru na celý Möbiův prostor tak, že položíme $f(\infty) = \infty$. Jelikož $L^{-1} = L$, je $K \circ I = L \circ f$. Tím jsme dokázali další větu.

Věta 2.11.1. Složením dvou inverzí s různými středy je zobrazení, které je složením podobnosti a inverze.

Věta 2.11.2. Nechť f je podobnost s koeficientem k, I inverze se středem S a koeficientem $\varkappa$. Pak je $f \circ I = L \circ f$, kde L je inverze se středem $f(S)$ a koeficientem $k^2\varkappa$.

Důkaz. Pro $X \neq S$ je

$$(L \circ f)(X) = L(f(X)) = f(S) + \frac{k^2\varkappa}{|f(S)\,f(X)|^2}(f(X) - f(S)),$$

$$(f \circ I)(X) = f(I(X)) = f\left(S + \frac{\varkappa}{|SX|^2}(X - S)\right) = $$
$$= f(S) + \frac{\varkappa}{|SX|^2}(f(X) - f(S)).$$

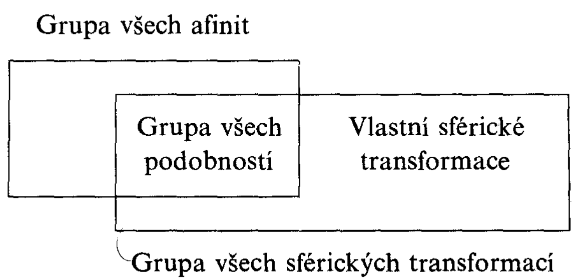
Poslední rovnost plyne z toho, že f je afinní zobrazení. Vzhledem k tomu, že $|f(S)\,f(X)| = k\,|SX|$, jsou oba výrazy stejné. Dále je $(L \circ f)(S) = L(f(S)) = \infty$, $(f \circ I)(S) = f(I(S)) = f(\infty) = \infty$, $(L \circ f)(\infty) = L(f(\infty)) = L(\infty) = f(S)$, $(f \circ I)(\infty) = f(I(\infty)) = f(S)$, čímž je důkaz celé věty ukončen.

Definice 2.11.1. Transformaci Möbiova prostoru $\mathbf{M}_n$, která je buď podobnost, nebo je složením podobnosti a sférické inverze, nazveme sférická transformace prostoru $\mathbf{M}_n$. Přitom zobrazení složené z inverze a podobnosti se nazývá též vlastní sférická transformace. V případě roviny ($n = 2$) mluvíme o kruhové a vlastní kruhové transformaci.

Věta 2.11.3. Všechny sférické transformace prostoru $\mathbf{M}_n$ tvoří vzhledem ke skládání grupu, tzv. grupu sférických transformací.

Důkaz. Jsou-li f, g podobnosti, I, K inverze prostoru $\mathbf{M}_n$, existují podle věty 2.11.2 inverze I', I'' tak, že $f^{-1} \circ I = I' \circ f^{-1}$, $g \circ I = I'' \circ g$, tedy $(I \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ I = I' \circ f^{-1}$, $(K \circ g) \circ (I \circ f) = K \circ I'' \circ g \circ f$. Mají-li inverze K, I'' stejný střed, je jejich složení stejnolehlost a $K \circ I'' \circ g \circ f$ je podobnost. Mají-li různý střed, existuje podobnost h a inverze L tak, že $K \circ I'' = L \circ h$, tudíž $K \circ I'' \circ g \circ f = L \circ k$, kde k je podobnost $h \circ g \circ f$. Tím je dokázáno, že složení dvou sférických transformací a inverzní zobrazení k sférické transformaci jsou opět sférické transformace.

Poznámka. Grupa sférických transformací je nejmenší grupa, která obsahuje všechny sférické inverze. Podobně jako jsme rozšířili na prostor $\mathbf{M}_n$ každou podobnost, rozšíříme na $\mathbf{M}_n$ také každou afinitu f prostoru $\mathbf{E}_n$, položíme prostě $f(\infty) = \infty$. Pak je průnikem grupy všech afinit prostoru $\mathbf{M}_n$ a grupy všech sférických transformací prostoru $\mathbf{M}_n$ grupa všech podobností prostoru $\mathbf{M}_n$ (viz schéma):



Mezi vlastní sférické transformace patří všechny sférické inverze prostoru $\mathbf{M}_n$. Každá vlastní sférická transformace se dá složit z podobnosti a sférické inverze. Tento rozklad není jednoznačný, stejně jako není jednoznačný rozklad vlastní podobnosti na shodnost a stejnolehlost.

2.12 Transformace roviny v komplexní souřadnici

Zvolíme-li v euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$ kartézskou soustavu souřadnic, máme vzájemně jednoznačné zobrazení roviny $\mathbf{E}_2$ na množinu $\mathbf{R}^2$ všech uspořádaných dvojic reálných čísel, každému bodu $X \in \mathbf{E}_2$ je přiřazena uspořádaná dvojice $[x, y]$ z $\mathbf{R}^2$. Každá taková dvojice určuje zase jednoznačně komplexní číslo $z = x + \mathrm{i}y$ z množiny všech komplexních čísel $\mathbf{C}$. Máme tedy vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{E}_2$ na množinu $\mathbf{C}$, přiřazující bodu $X = [x, y]$ komplexní číslo $z = x + \mathrm{i}y$. Říkáme, že číslo z je komplexní souřadnice bodu X a místo o bodě X mluvíme někdy o bodě z.

Je-li $z = x + \mathrm{i}y$, je $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$, tedy $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{\mathrm{i}(\bar{z} - z)}{2}$. Poslední dvě rovnice určují x, y pomocí z. Je-li $X = [x, y]$, tj. X má komplexní souřadnici $z = x + \mathrm{i}y$, $U = [u, v]$, tj. U má komplexní souřadnici $w = u + \mathrm{i}v$, je

$$|XU| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = |z - w|.$$

Vidíme, jak se jednoduše vyjádří vzdálenost dvou bodů pomocí jejich komplexních souřadnic.

V předcházejících odstavcích jsme studovali řadu geometrických zobrazení. Pokud se omezíme na případ roviny, můžeme si odvodit jejich analytické vyjádření v komplexní souřadnici. Začněme třeba u afinního zobrazení roviny do sebe. Víme, že je dáno rovnicemi

$$x' = ax + by + p,$$
$$y' = cx + dy + q,$$

přičemž bodu $X = [x, y]$ o komplexní souřadnici $z = x + \mathrm{i}y$ je přiřazen bod $X' = [x', y']$ o komplexní souřadnici $z' = x' + \mathrm{i}y'$. Je

$$\begin{aligned} z' &= x' + \mathrm{i}y' = (ax + by + p) + \mathrm{i}(cx + dy + q) = \\ &= (a + \mathrm{i}c)\,x + (b + \mathrm{i}d)\,y + p + \mathrm{i}q = \\ &= (a + \mathrm{i}c)\frac{z + \bar{z}}{2} + (b + \mathrm{i}d)\frac{\mathrm{i}(\bar{z} - z)}{2} + p + \mathrm{i}q = \\ &= \left(\frac{a + d}{2} + \mathrm{i}\frac{c - b}{2}\right)z + \left(\frac{a - d}{2} + \mathrm{i}\frac{c + b}{2}\right)\bar{z} + p + \mathrm{i}q = \\ &= \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma, \end{aligned}$$

kde α, β, γ jsou komplexní čísla,

$$\alpha = \frac{a + d}{2} + \mathrm{i}\frac{c - b}{2}, \quad \beta = \frac{a - d}{2} + \mathrm{i}\frac{c + b}{2}, \quad \gamma = p + \mathrm{i}q.$$

Známe-li komplexní čísla α, β, γ, můžeme z nich obráceně určit reálná čísla a, b, c, d, p, q:

$$a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \bar{\alpha} + \bar{\beta}), \quad b = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\beta - \alpha + \bar{\alpha} - \bar{\beta})$$
$$c = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\alpha + \beta - \bar{\alpha} - \bar{\beta}), \quad d = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \bar{\alpha} - \bar{\beta})$$
$$p = \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}), \qquad q = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\gamma - \bar{\gamma})$$

Dále je $ad - bc = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

Můžeme tudíž shrnout:

Věta 2.12.1. Každé afinní zobrazení euklidovské roviny do sebe je v komplexní souřadnici dáno rovnicí

$$z' = \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma,$$

α, β, γ jsou komplexní čísla. Zobrazení je afinita (vzájemně jednoznačné) právě tehdy, je-li $|\alpha| \neq |\beta|$. Zobrazení je ekviafinita právě tehdy, je-li $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ nebo $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = -1$.

Víme, že afinita o rovnicích $x' = ax + by + p$, $y' = cx + dy + q$, $ad - bc \neq 0$ je právě tehdy podobnost, je-li $d = a$, $c = -b$ nebo $d = -a$, $c = b$, tedy když je $\beta = 0$ nebo $\alpha = 0$. V prvním případě jde o podobnost přímou, v druhém případě o podobnost nepřímou. Je tudíž přímá, resp. nepřímá podobnost dána rovnicí

$$z' = \alpha z + \gamma, \quad \text{resp.} \quad z' = \beta\bar{z} + \gamma, \qquad \alpha\beta \neq 0.$$

Zobrazí-li se bod o komplexní souřadnici w v uvažované přímé, resp. nepřímé podobnosti na bod o komplexní souřadnici w', je

$$w' = \alpha w + \gamma, \quad \text{resp.} \quad w' = \beta\bar{w} + \gamma,$$

takže

$$|w' - z'| = |\alpha w - \alpha z| = |\alpha|\,|w - z|,$$

resp.

$$|w' - z'| = |\beta|\,|\bar{w} - \bar{z}| = |\beta|\,|w - z|.$$

Vidíme, že koeficientem přímé podobnosti $z' = \alpha z + \gamma$ je $|\alpha|$, koeficientem nepřímé podobnosti $z' = \beta\bar{z} + \gamma$ je $|\beta|$. Odtud ihned plyne, že přímá shodnost je dána rovnicí $z' = \alpha z + \gamma$, kde $|\alpha| = 1$, tj. $\alpha = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, nepřímá shodnost je dána rovnicí $z' = \beta\bar{z} + \gamma$, kde β je komplexní jednotka. Ve zvláštním případě $z' = \alpha z$, $\alpha = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ jde o otočení kolem počátku o úhel φ. To je v podstatě tvrzení tzv. Moivreovy věty, která říká, že součinem dvou komplexních jednotek $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi$ o amplitudách φ, ψ je komplexní jednotka o amplitudě $\varphi + \psi$. *Abraham de Moivre* (čti moavr) byl francouzský matematik, který žil v letech 1667–1754.

Podívejme se nyní na vyjádření kruhové inverze v komplexní souřadnici. Kruhová inverze se středem $S = [s_1, s_2]$ a koeficientem $\varkappa$ je v kartézských souřadnicích dána rovnicemi

$$x' = s_1 + \frac{\varkappa}{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2}(x - s_1)$$

$$y' = s_2 + \frac{\varkappa}{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2}(y - s_2),$$

střed S se zobrazí na bod ∞ a bod ∞ na bod S. Položíme-li $\sigma = s_1 + \mathrm{i}s_2$, násobíme-li druhou rovnici komplexní jednotkou i a pak rovnice sečteme, dostaneme

$$x' + \mathrm{i}y' = s_1 + \mathrm{i}s_2 + \frac{\varkappa}{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2}[(x - s_1) + \mathrm{i}(y - s_2)].$$

Jelikož $x' + \mathrm{i}y' = z'$, $x + \mathrm{i}y = z$ a

$$(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = |z - \sigma|^2 = (z - \sigma)(\bar{z} - \bar{\sigma}),$$

můžeme odvozenou rovnici přepsat do tvaru

$$z' = \sigma + \frac{\varkappa}{(z - \sigma)(\bar{z} - \bar{\sigma})}(z - \sigma) = \sigma + \frac{\varkappa}{\bar{z} - \bar{\sigma}},$$

$\varkappa$ je nenulové reálné číslo, obrazem bodu $z = \sigma$ je bod ∞, obrazem bodu ∞ je bod σ.

Každá kruhová transformace je buď podobnost, nebo je složením inverze a podobnosti. Každá kruhová transformace je proto v komplexní souřadnici popsána jednou z těchto rovnic:

$z' = \alpha z + \gamma,\ \alpha \neq 0$ $\infty \to \infty$	$z' = \beta\bar{z} + \gamma,\ \beta \neq 0$ $\infty \to \infty$
$z' = \alpha\sigma + \gamma + \frac{\alpha\varkappa}{\bar{z} - \bar{\sigma}} =$ $= \frac{\varrho\bar{z} + \tau}{\bar{z} - \bar{\sigma}},\ \varrho\bar{\sigma} + \tau \neq 0$ $\sigma \to \infty,\ \infty \to \alpha\sigma + \gamma = \varrho$	$z' = \beta\bar{\sigma} + \gamma + \frac{\beta\varkappa}{z - \sigma} =$ $= \frac{\varrho z + \tau}{z - \sigma},\ \varrho\sigma + \tau \neq 0$ $\sigma \to \infty,\ \infty \to \beta\bar{\sigma} + \gamma$

Můžeme také říci, že každá kruhová transformace je v komplexní souřadnici dána lineární lomenou funkcí v z nebo v $\bar{z}$, tedy rovnicí

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{nebo} \quad z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta},$$

v obou případech je $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Při $\gamma = 0$ je nevlastní bod samodružný, jde o přímou nebo nepřímou podobnost. Je-li $\gamma \neq 0$, zobrazí se bod ∞ vždy na bod $\frac{\alpha}{\gamma}$, na bod ∞ se zobrazí v prvním případě bod $-\frac{\delta}{\gamma}$, v druhém případě bod $-\frac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}}$.

Obráceně je vždy lineární lomenou funkcí v z nebo $\bar{z}$ dána kruhová transformace. Je-li totiž $\gamma = 0$, jde o přímou nebo nepřímou podobnost. Je-li $\gamma \neq 0$, můžeme zlomek číslem γ krátit, pak bude u z (nebo $\bar{z}$) koeficient 1. Můžeme tedy rovnou předpokládat $\gamma = 1$. Transformaci o rovnici $z' = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta} = \alpha + \frac{\beta - \alpha\delta}{z + \delta}$, $\alpha\delta - \beta \neq 0$ můžeme rozložit na kruhovou inverzi $z' = \frac{\varkappa}{\bar{z} - (-\bar{\delta})} - \delta$ a nepřímou podobnost $z' = \frac{\beta - \alpha\delta}{\varkappa}(\bar{z} + \bar{\delta}) + \alpha$. Stejně tak můžeme zobrazení dané rovnicí $z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\bar{z} + \delta} = \alpha + \frac{\beta - \alpha\delta}{\bar{z} + \delta}$, $(\alpha\delta - \beta \neq 0)$ rozložit na kruhovou inverzi $z' = \frac{\varkappa}{\bar{z} + \delta} - \bar{\delta}$ a přímou podobnost $z' = \frac{\beta - \alpha\delta}{\varkappa}(z + \bar{\delta}) + \alpha$.

Definice 2.12.1. Kruhová transformace daná rovnicí $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ se nazývá přímá. Kruhová transformace daná rovnicí $z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$ se nazývá nepřímá kruhová transformace.

Předcházející výsledky můžeme shrnout.

Věta 2.12.2. Každá přímá kruhová transformace je buď přímá podobnost, nebo je to vlastní kruhová transformace, jež se dá rozložit na kruhovou inverzi a nepřímou podobnost. Každá nepřímá kruhová transformace je buď nepřímá podobnost, nebo vlastní kruhová transformace, která se dá složit z kruhové inverze a přímé podobnosti.

Uvedeme si důležitou větu o určenosti kruhové transformace.

Věta 2.12.3. Jsou-li dány v Möbiově rovině dvě uspořádané trojice (z_1, z_2, z_3), (z'_1, z'_2, z'_3) navzájem různých bodů, pak existuje právě jedna přímá a jedna nepřímá kruhová transformace, která zobrazuje body z_1, z_2, z_3 po řadě na body z'_1, z'_2, z'_3. Přitom může být v každé trojici některý bod nevlastní.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že žádný z bodů z_i, z'_i ($i = 1, 2, 3$) není nevlastní. V případě přímé kruhové transformace hledáme k číslům z_i, z'_i až na společný nenulový násobek komplexní čísla α, β, γ, δ tak, aby platilo

$$(1) \qquad z'_k(\gamma z_k + \delta) = \alpha z_k + \beta \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, 3.$$

Je-li

$$\begin{vmatrix} z'_1, & z_1, & 1 \\ z'_2, & z_2, & 1 \\ z'_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

existuje až na nenulový násobek právě jedno řešení α, β, γ, δ soustavy (1). Můžeme totiž za γ zvolit libovolné nenulové číslo a α, β, δ vypočítat. Výsledkem bude vlastní přímá kruhová transformace. Je-li uvedený determinant nulový, je jeho první sloupec lineární kombinací zbývajících, existují tedy komplexní čísla α, β tak, že $z'_k = \alpha z_k + \beta$ pro $k = 1, 2, 3$. Řešením soustavy (1) je α, β, $\delta = 1$, $\gamma = 0$. Vzhledem k tomu, že čísla z_1, z_2, z_3 jsou navzájem různá, je to až na společný násobek jediné řešení, dává přímou podobnost. V obou případech je $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, jinak by totiž nebyla čísla z'_1, z'_2, z'_3 navzájem různá. Věnujme se ještě případu, kdy je některý daný bod nevlastní. Jsou-li například z_3 a z'_3 nevlastní, hledáme vlastně přímou podobnost zobrazující z_1, z_2 po řadě na z'_1, z'_2. Víme, že je právě jedna. Je-li $z_3 = \infty$, $z'_3 \neq \infty$, musí být kruhová transformace vlastní, $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{z + \delta}$. Obrazem bodu nevlastního je bod z'_3, tedy $\alpha = z'_3$, a pro β, δ musí platit $z_k z'_k + \delta z'_k - z'_3 z_k - \beta = 0$ pro $k = 1, 2$. Protože $z'_1 \neq z'_2$, má tato soustava dvou rovnic právě jedno řešení β, δ. Obdobně bychom postupovali v případě $z_3 \neq \infty$, $z'_3 = \infty$. V případě nepřímé kruhové transformace je celý postup obdobný, je však třeba rozlišit, zda je determinant

$$\begin{vmatrix} z'_1, & \bar{z}_1, & 1 \\ z'_2, & \bar{z}_2, & 1 \\ z'_3, & \bar{z}_3, & 1 \end{vmatrix}$$

nulový nebo nenulový. Podle toho bude výsledná kruhová transformace nepřímá podobnost nebo nepřímá a vlastní. To ovšem za předpokladu, že žádný z bodů z_k, z'_k ($k = 1, 2, 3$) není nevlastní. Jinak jde o nepřímou podobnost, je-li $z_k = z'_k = \infty$ pro některé $k = 1, 2, 3$, ve všech ostatních případech o nepřímou vlastní kruhovou transformaci.

Než si uvedeme několik příkladů, udělejme si malý přehled transformací roviny na základě jejich rovnic v komplexní souřadnici – viz tabulku str. 97.

Příklad 1. Najděte všechny kruhové transformace zobrazující body 0, 1, i po řadě na body 1, i, 0. Určete obraz a vzor nevlastního bodu.

<table>
<tr><th>Afinita</th><th colspan="4">Kruhová transformace</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$z' = \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma$,
$\infty \to \infty$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0$

Přímá afinita
$|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$

Ekviafinita
$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \pm 1$

Podobnost přímá
$\beta = 0$

Podobnost nepřímá
$\alpha = 0$

Shodnost přímá
$\beta = 0$, $|\alpha| = 1$

Shodnost nepřímá
$\alpha = 0$, $|\beta| = 1$</td><td colspan="2">přímá
$z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$
$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$</td><td colspan="2">nepřímá
$z' = \dfrac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$
$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$</td></tr>
<tr><td>Přímá podobnost
$\gamma = 0$

$\infty \to \infty$

Stejnolehlost
$z' = \alpha z + \beta$,
α reálné,
$0 \neq \alpha \neq 1$

Středová souměrnost
$z' = -z + \beta$

Posunutí
$z' = z + \beta$</td><td>Přímá a vlastní
$\gamma \neq 0$
$-\dfrac{\delta}{\gamma} \to \infty$
$\infty \to \dfrac{\alpha}{\gamma}$</td><td>Nepřímá podobnost
$\gamma = 0$

$\infty \to \infty$</td><td>Nepřímá a vlastní
$\gamma \neq 0$
$-\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\gamma}} \to \infty$
$\infty \to \dfrac{\alpha}{\gamma}$
Kruhová inverze
$z' = \dfrac{\sigma\bar{z} + r}{\bar{z} - \bar{\sigma}}$
r reálné,
$r + \sigma\bar{\sigma} \neq 0$</td></tr>
</table>

Řešení. V žádném případě se nemůže jednat o podobnost, neboť trojúhelník s vrcholy v bodech 0, 1, i není podobný trojúhelníku s vrcholy 1, i, 0 (záleží zde na pořadí vrcholů). Půjde tedy vždy o vlastní kruhovou transformaci. Přímá kruhová transformace, která je navíc vlastní, má rovnici tvaru $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{z + \delta}$. Protože bod 0 se má zobrazit na bod 1, musí platit $\delta = \beta$. Aby obrazem bodu 1 byl bod i, musí platit $\mathrm{i}(1 + \delta) = \alpha + \beta$. Konečně se má bod i zobrazit na bod 0, tedy $0 = \alpha\mathrm{i} + \beta$. Z těchto tří rovnic plyne $\beta = \delta = \mathrm{i}$, $\alpha = -1$, transformace má rovnici $z' = \dfrac{-z + \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$. Obrazem nevlastního bodu ∞ je bod -1, vzorem bodu ∞ je bod $z = -\mathrm{i}$. Obdobně postupujeme v případě nepřímé vlastní kruhové transformace, vyjde nám rovnice

$$z' = \frac{(1 + 2\mathrm{i})\,\bar{z} - 2 + \mathrm{i}}{5\bar{z} - 2 + \mathrm{i}}.$$

Obrazem bodu ∞ je bod $\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{5}$, vzorem bodu ∞ je bod $\dfrac{2 + \mathrm{i}}{5}$.

Příklad 2. Napište rovnice všech vlastních kruhových transformací, při kterých jsou body 1 a i samodružné.

Řešení. Pro přímé a vlastní kruhové transformace vychází obdobně jako v předcházejícím příkladu $\alpha + \beta = 1 + \delta$, $\alpha\mathrm{i} + \beta = \mathrm{i}(\mathrm{i} + \delta)$, takže

$$z' = \frac{\alpha z - \mathrm{i}}{z + \alpha - \mathrm{i} - 1}, \qquad \alpha \neq \mathrm{i},\ \alpha \neq 1.$$

V případě nepřímé kruhové transformace vyjde $\alpha + \beta = 1 + \delta$, $-\alpha\mathrm{i} + \beta = \mathrm{i}(-\mathrm{i} + \delta)$, takže je

$$z' = \frac{(1 - \mathrm{i})\,\delta\bar{z} + 1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}\delta}{(1 + \mathrm{i})(\bar{z} + \delta)}, \qquad \delta \neq \mathrm{i},\ \delta \neq -1.$$

Příklad 3. Pro kruhové transformace z předcházejícího příkladu vypočtěte samodružné body.

Řešení. Bod z je při první kruhové transformaci samodružný právě tehdy, je-li $z(z + \alpha - \mathrm{i} - 1) = \alpha z - \mathrm{i}$, po úpravě máme pro z rovnici $z^2 - (1 + \mathrm{i})\,z + \mathrm{i} = 0$, tj. $(z - 1)(z - \mathrm{i}) = 0$. Jsou tedy body 1 a i jedinými samodružnými body. Pro samodružný bod z druhé, nepřímé kruhové transformace musí platit

$$(1 + \mathrm{i})(z\bar{z} + \delta z) = (1 - \mathrm{i})\,\delta\bar{z} + 1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{i}\delta,$$

po úpravě $z\bar{z} + \delta z + \mathrm{i}\delta\bar{z} - 1 - \delta(1 + \mathrm{i}) = 0$. Položíme-li $\delta = d_1 + \mathrm{i}d_2$ a rozepíšeme-li předcházející rovnici do reálné a imaginární části, dostaneme rovnice

$$(d_1 + d_2)(x + y - 1) = 0$$
$$x^2 + y^2 + (d_1 - d_2)(x + y - 1) - 1 = 0.$$

Je-li $d_1 + d_2 \neq 0$, jsou opět jediné samodružné body body 1 a i. Je-li $d_2 = -d_1$, vytvoří samodružné body $z = x + \mathrm{i}y$ kružnici o rovnici $(x + d_1)^2 + (y + d_1)^2 = (1 + d_1)^2 + d_1^2$, která má střed v bodě $-d_1(1 + \mathrm{i})$ a prochází body 1, i.

Příklad 4. Vlastní kruhovou transformaci o rovnici $z' = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$ rozložte na kruhovou inverzi a podobnost. Určete obrazy bodů 0, 1, -1, i, $-\mathrm{i}$, ∞, obrazy přímek $x = 0$, $y = 0$ a obraz kružnice $x^2 + y^2 = 1$, tj. $|z| = 1$.

Řešení. Obrazy bodů 0, 1, -1, i, $-\mathrm{i}$, ∞ jsou po řadě body -1, $-\mathrm{i}$, i, 0, ∞, 1. Protože na nevlastní bod ∞ se zobrazí bod $-\mathrm{i}$, musí být středem hledané inverze bod $-\mathrm{i}$. Koeficient $\varkappa$ může být jakékoli nenulové reálné číslo, inverze bude mít rovnici

$$z' = -\mathrm{i} + \frac{\varkappa}{\bar{z} - \mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}\bar{z} - 1 + \varkappa}{\bar{z} - \mathrm{i}}.$$

Hledanou podobnost pak obdržíme složením této inverze a dané kruhové transformace, je to nepřímá podobnost

$$z' = -\frac{2\mathrm{i}}{\varkappa}\bar{z} + \frac{\varkappa - 2}{\varkappa}.$$

Zvolíme-li například $\varkappa = 2$, má inverze rovnici $z' = \dfrac{1 - \mathrm{i}\bar{z}}{\bar{z} - \mathrm{i}}$, podobnost má rovnici $z' = -\mathrm{i}\bar{z}$ (je to souměrnost podle přímky $x + y = 0$). Obrazy daných přímek a dané kružnice dostaneme buď přímým výpočtem, nebo pomocí zvoleného rozkladu na kruhovou inverzi a podobnost. Například osa y ($x = 0$) se v zvolené inverzi zobrazí na sebe, v uvažované souměrnosti na osu x. Osa x se zobrazí ve zvolené inverzi na kružnici k o rovnici $x^2 + y^2 = 1$. Ta je v uvažované souměrnosti podle přímky $x + y = 0$ samodružná. Obrazem kružnice k v uvažované inverzi je osa x. V dané kruhové transformaci je tedy obrazem kružnice k osa y. V dalších dvou řádcích jsou vždy pod sebou napsány vzor a jeho obraz v dané kruhové transformaci.

0	1	-1	i	$-\mathrm{i}$	∞	$x = 0$	$y = 0$	$x^2 + y^2 = 1$
-1	$-\mathrm{i}$	i	0	∞	1	$y = 0$	$x^2 + y^2 = 1$	$x = 0$

Ještě si ukážeme, jak dospějeme k těmto výsledkům přímým výpočtem. Souřadnice z' obrazu bodu z je dána rovnicí $z' = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$, z ní vyjádříme souřadnici z vzoru bodu z':

$$z = \frac{-\mathrm{i}(z' + 1)}{z' - 1}$$

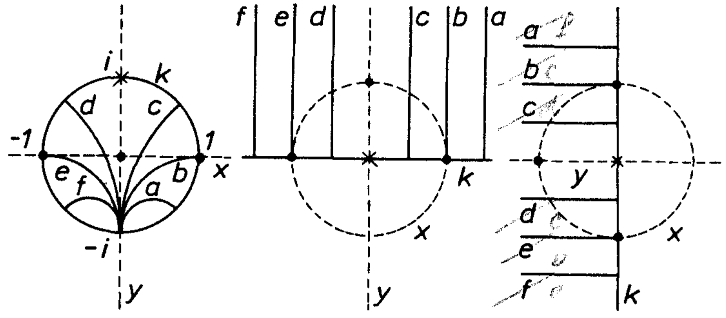
Rozepíšeme-li tuto rovnici do reálné a imaginární části, dostaneme rovnice

$$x = \frac{-2y'}{(x' - 1)^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{(x' - 1)^2 + y'^2}.$$

Rozepíšeme-li do reálné a imaginární části výchozí rovnici kruhové transformace, dostaneme rovnice

$$x' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2}, \qquad y' = \frac{-2x}{x^2 + (y + 1)^2}.$$

Z těchto čtyř rovnic pak již snadno vidíme, že obrazem kružnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ je přímka $x = 0$, vzorem této kružnice je přímka $y = 0$, a že obrazem přímky $x = 0$ je přímka $y = 0$. Částečně je naše kruhová transformace také popsána obrázkem 28, na němž jsou v části b) zakresleny obrazy objektů vyznačené v části a) ve zvolené



Obr. 28

inverzi – obraz je vždy označen stejně jako vzor. V části c) jsou pak zakresleny obrazy objektů z části a) v dané kruhové transformaci. Dostaneme tedy část c) z části b) souměrností podle přímky $x + y = 0$.

Cvičení

1. Určete samodružné body kruhové transformace z příkladu 4.
2. Rozložte transformaci z příkladu 4 na podobnost a inverzi.
3. Napište rovnice všech kruhových transformací, při kterých se body 0, 1, 2 zobrazí po řadě na body 0, 1, 3.
4. Rozložte transformaci $z' = \dfrac{3z}{4 - z}$ na kruhovou inverzi a podobnost.
5. Rozložte transformaci z předcházejícího cvičení na podobnost a kruhovou inverzi.
6. Ukažte, že množina všech samodružných bodů přímé a vlastní kruhové transformace je jednobodová nebo dvoubodová.
7. Ukažte, že množina všech samodružných bodů nepřímé vlastní kruhové transformace je buď prázdná, nebo jednobodová, nebo dvoubodová, nebo tvoří samodružné body kružnici.
8. Kruhová transformace, jejíž samodružné body tvoří kružnici, je kruhová inverze se středem ve středu kružnice a kladným koeficientem. Dokažte.

KAPITOLA 3

ROZŠIŘOVÁNÍ AFINNÍHO PROSTORU

3.1 Motivace k rozšiřování afinního prostoru

Zatím jsme pracovali v tzv. reálném afinním prostoru, což byla trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$, kde $\mathbf{A}$ byla množina, $\mathbf{V}_n$ byl vektorový prostor nad tělesem reálných čísel a f bylo zobrazení množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ do vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ splňující dva axiomy (viz definice 1.1.1. v [G]). Jak již bylo řečeno v kapitole 1 v [G], lze téměř celou teorii budovat úplně stejně, vezmeme-li místo reálného vektorového prostoru vektorový prostor nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$. Ve všech odstavcích kapitoly 1 v [G] se zdůrazňovalo, kde je podstatné to, že pracujeme s tělesem reálných čísel a kde by bylo možné dělat úvahy úplně stejně nad libovolným tělesem. Nadále budeme pracovat jak s reálnými afinními prostory, tak s afinními prostory nad tělesem komplexních čísel – komplexními afinními prostory. Oba tyto prostory jsou zvláštní případy afinního prostoru nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$.

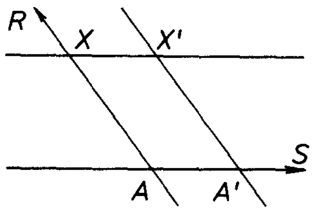
Nutnost použití komplexního afinního prostoru je zřejmá z následující úvahy: V kapitole 3 v [G] jsme studovali kuželosečky v reálné euklidovské rovině. Přitom např. kuželosečky, které v dané lineární soustavě souřadnic mají rovnice

(1) $$x^2 + y^2 = 0,$$

(2) $$2x^2 + 3y^2 = 0,$$

byly vlastně stejné, neboť obě obsahovaly právě jeden bod – počátek lineární soustavy souřadnic. Přitom rovnice (2) není násobkem rovnice (1). Protože v analytické geometrii pracujeme s kuželosečkami pomocí jejich rovnic, potřebujeme, aby nulová množina polynomu 2. stupně ve dvou proměnných x, y určovala tento polynom jednoznačně až na nenulový násobek. Reálný prostor, jak je vidět, tomuto požadavku nevyhovuje. Kdybychom rovnice (1) a (2) považovali za rovnice kuželoseček v komplexní afinní rovině, snadno bychom se přesvědčili, že tyto kuželosečky jsou různé. Např. bod $[1, \mathrm{i}]$ (i je imaginární jednotka) vyhovuje rovnici (1) a nevyhovuje rovnici (2). Protože však reálný afinní prostor nejlépe odpovídá fyzikálnímu prostoru (prostoru kolem nás), nebudeme pracovat rovnou v komplexním afinním prostoru, ale budeme se snažit reálný afinní prostor rozšířit tak, aby vznikl komplexní afinní prostor. Přitom budeme postupovat stejným způsobem, jakým se na střední škole rozšiřuje těleso reálných

Nechť je nakonec ϱ nevlastní nadrovina a S nevlastní bod určený vektorem $\mathbf{s} \in \mathbf{V}_n$. Konstrukci bodu X' k danému bodu X sledujeme na obr. 40. Pomocný bod R je nevlastní bod přímky AX. Vidíme, že homologie φ je v tomto případě translace.



Obr. 40

Výsledek zkoumání možností C a D jsme pochopitelně už mohli rovnou dostat z toho, že každý bod nevlastní nadroviny (tj. každý směr) je při naší transformaci samodružný (viz kapitola 1).

KAPITOLA 4

KVADRIKY

V knize Geometrie I jsme se seznámili s kuželosečkami v euklidovské rovině a s kvadratickými plochami v trojrozměrném euklidovském prostoru. Zjistili jsme, že ke každé kuželosečce existuje kvadratický polynom dvou proměnných tak, že daná kuželosečka je jeho nulovou množinou, tzn. je to množina těch bodů X z euklidovské roviny $\mathbf{E}_2$, pro něž v dané kartézské soustavě souřadnic (píšeme-li $X = [x, y]$) platí

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. Můžeme se přidržet názvu „kuželosečka" a mezi kuželosečky zahrnout nejen elipsu, parabolu a hyperbolu, ale všechny rovinné řezy kuželových ploch, tj. i přímky, dvojice přímek a jednobodové množiny. Poslední množiny dostaneme jako průniky kuželových ploch a rovin procházejících vrcholy těchto kuželových ploch. Přidáme-li pak ke kuželosečkám ještě prázdnou množinu, bude obráceně platit, že každá rovnice (1) je rovnicí kuželosečky. Podobná tvrzení platí i pro kvadratické plochy v trojrozměrném euklidovském prostoru. Můžeme tedy kuželosečku obecně definovat jako nulovou množinu kvadratického polynomu. Hlavní potíž při použití této definice kuželosečky, že totiž rovnice (1) není v některých případech kuželosečkou určena až na nenulový násobek jednoznačně, odstraníme tím, že budeme pracovat v komplexním rozšíření afinního prostoru (viz odstavec 3.3.). Další nesnáz plynoucí z definice kuželosečky vztahem (1) je, že rovnice (1) je napsána v dané kartézské soustavě souřadnic. Kdybychom proto zavedli nějaký nový pojem pomocí této rovnice, tj. pomocí čísel a, b, c, d, e, f, museli bychom vždy ukázat, že zavedený pojem nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Např. střed kuželosečky (1) lze definovat jako bod $S = [(be - dc)/(ac - b^2), (db - ae)/(ac - b^2)]$ (pokud ovšem je $ac - b^2 \neq 0$). Lze se přesvědčit, že popsaný bod S je opravdu střed kuželosečky, jak ho známe z kapitoly 3 v [G]. Přesvědčit se ovšem přímo, že bod S zavedený pomocí čísel $a, \ldots, f$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic, není vůbec snadné. Tuto potíž odstraníme tak, že levou stranu rovnice (1) budeme brát jako funkci na $\mathbf{E}_2$ a zadefinujeme ji bez pomoci soustavy souřadnic — pomocí jejích vlastností. Navíc ještě nebudeme pracovat v afinním nebo euklidovském prostoru, ale v jeho projektivním rozšíření. Použití nevlastních bodů nám totiž velmi usnadní práci. Např. elipsu, parabolu a hyperbolu budeme moci pomocí nevlastních bodů definovat tak, že elipsa je kuželosečka, která nemá žádný reálný nevlastní bod, parabola má takový bod jeden a hyperbola dva.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že budeme muset pracovat střídavě s reálnými a komplexními vektory. Vyřešíme to tak, že budeme pracovat s vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbf{T}$. Můžeme si přitom představovat, že $\mathbf{T}$ je buď těleso reálných, nebo komplexních čísel.

4.1 Bilineární formy

V prvním díle jsme poznali skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ (viz odstavec 2.1 v [G]). Bilineární formy jsou jednoduchým zobecněním skalárního součinu. Zavedeme je však na rozdíl od skalárního součinu ve vektorovém prostoru nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$. V celém tomto odstavci budeme tedy předpokládat, že $\mathbf{V}$ je daný vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Dále budeme předpokládat, že těleso $\mathbf{T}$ není charakteristiky dvě (tj. platí v něm $1 + 1 \neq 0$). Bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je jako skalární součin zobrazení f množiny $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ do tělesa $\mathbf{T}$, přičemž požadujeme, aby zobrazení f mělo jen některé z vlastností, které má skalární součin.

Definice 4.1.1. Zobrazení f množiny $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ do tělesa $\mathbf{T}$ se nazývá *bilineární forma* na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$, jestliže pro každé vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ a pro každé číslo $c \in \mathbf{T}$ platí

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\ f(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= cf(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, c\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Vidíme, že kdybychom zobrazení f psali jako součin (podobně jako u skalárního součinu), tj. místo $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bychom psali např. $\mathbf{x} * \mathbf{y}$, mohli bychom vlastnosti bilineární formy zformulovat též tak, že pro násobení $*$ a obvyklé sčítání vektorů platí distributivní zákony (pro násobení zleva i zprava) a že násobení vektoru číslem je s násobením $*$ asociativní, tj. platí $(c\mathbf{x}) * \mathbf{y} = c(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = \mathbf{x} * (c\mathbf{y})$ pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ a pro každé $c \in \mathbf{T}$.

Bilineární formy můžeme též dostat jako zobecnění lineárních forem. Řekneme, že bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je takové zobrazení f množiny $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ do $\mathbf{T}$, kde pro každý vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí: Zobrazení přiřazující každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ číslo $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, resp. $f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ jsou lineární formy. Nebo ještě trochu jinak: Zvolíme-li ze dvou proměnných vektorů jeden pevně, dostáváme funkci druhého proměnného vektoru a tato funkce je lineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$.

Vnější součin na orientovaném dvojrozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem (viz odstavec 2.2 v [G]) je dalším příkladem bilineární formy, který jsme poznali již dříve.

Poznámka 1. Z vlastnosti bilineární formy uvedené jako první v definici 4.1.1 vyplývá, že pro každé vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ je

$$f(\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \ldots + f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}).$$

Poznámka 2. Přímo z definice bilineární formy vyplývá, že je-li $\mathbf{V}'$ podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$ a omezíme-li bilineární formu f na vektorový prostor $\mathbf{V}'$ (přesněji na množinu $\mathbf{V}' \times \mathbf{V}'$), dostáváme bilineární formu na prostoru $\mathbf{V}'$.

Nejjednodušším příkladem bilineární formy je zobrazení, které každým dvěma vektorům $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ přiřadí číslo $0 \in \mathbf{T}$. Toto zobrazení se nazývá *nulová bilineární forma.*

Příklad 1. Buď $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ (vektorový prostor dvojic reálných čísel s obvyklými operacemi), $\mathbf{T} = \mathbf{R}$. Nechť zobrazení f přiřazuje vektorům $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, kde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, číslo

a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - 2x_2 y_1$,
b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 + y_2$,
c) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 y_1|$.

Zjistěte, zda zobrazení f je bilineární forma.

Řešení. Snadno ověříme, že v případě a) je zobrazení f bilineární forma, i když to není skalární součin, protože položíme-li např. $\mathbf{x} = (1, 1)$, je $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$. Zobrazení f uvedená pod b) a c) nejsou bilineární formy.

Definice 4.1.2. Říkáme, že *bilineární forma* f na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je *symetrická*, resp. *antisymetrická*, jestliže pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, resp. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Vidíme, že skalární součin je symetrická bilineární forma a vnější součin na dvojrozměrném vektorovém prostoru je antisymetrická bilineární forma. Samozřejmě existují i bilineární formy, které nejsou ani symetrické, ani antisymetrické.

Na množině všech bilineárních forem definujeme operace sčítání a násobení číslem z $\mathbf{T}$ obvyklým způsobem, tj. stejně jako pro funkce na libovolné množině.

Definice 4.1.3. *Součtem bilineárních forem* f, g na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$, resp. *násobkem bilineární formy* f *číslem* $c \in \mathbf{T}$ nazýváme zobrazení h množiny $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ do $\mathbf{T}$, kde pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

resp.

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = cf(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Snadno se přesvědčíme, že součet dvou bilineárních forem i násobek bilineární formy číslem c jsou opět bilineární formy. Důkaz tohoto tvrzení ponecháme jako cvičení. Bilineární formu h, která je součtem bilineárních forem f a g, resp. násobkem bilineární formy f číslem c, budeme označovat symbolem $f + g$, resp. cf.

Věta 4.1.1. Ke každé bilineární formě f na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ existuje právě jedna symetrická bilineární forma f_s a právě jedna antisymetrická bilineární forma f_a tak, že

$$f = f_s + f_a.$$

Důkaz. Pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ položme

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})),$$
$$f_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})).$$

Je zřejmé, že f_s, resp. f_a je symetrická, resp. antisymetrická bilineární forma a že $f = f_s + f_a$. Buď nyní obráceně f'_s, resp. f'_a symetrická, resp. antisymetrická bilineární forma. Nechť pro tyto formy platí $f = f'_s + f'_a$, tj.

$$(1) \qquad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f'_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f'_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Potom je také

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f'_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f'_a(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

a protože bilineární forma f'_s je symetrická, je $f'_s(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f'_s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Podobně je $f'_a(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -f'_a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, a proto

$$(2) \qquad f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f'_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f'_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Sečteme-li rovnosti (1) a (2), snadno zjistíme, že je $f'_s = f_s$ a $f'_a = f_a$. Bilineární formy f_s a f_a jsou tedy určeny jednoznačně.

Podobně jako lze ve zvolené bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}$ získat analytické vyjádření lineární formy, obdržíme i analytické vyjádření bilineární formy. Buď tedy $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Potom vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n,$$
$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_n\mathbf{u}_n,$$

kde $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{T}$. Podle poznámky 1 dostáváme

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{u}_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{u}_i, y_j\mathbf{u}_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j).$$

Označíme nyní $f_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$. Výslednou rovnost nyní můžeme psát ve tvaru

$$(3) \qquad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_iy_j.$$

Této rovnosti říkáme *analytické vyjádření bilineární formy* f. Matice

$$(4) \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11}, & \ldots, & f_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}, & \ldots, & f_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice bilineární formy* f v bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Poznámka 3. Ze zavedení symbolů f_{ij} a ze vzorce (3) je zřejmé, že bilineární forma f je symetrická právě tehdy, je-li symetrická její matice v libovolné bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Poznámka 4. Vidíme, že rovnost (3) můžeme snadno napsat pomocí násobení matic. Označme $\mathbf{X}$, resp. $\mathbf{Y}$ matici $(x_1, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, \ldots, y_n)$. Potom můžeme psát

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{X} \, . \, \mathbf{F} \, . \, \mathbf{Y}^T.$$

Obdrželi jsme zápis rovnosti (3) v maticovém tvaru. Přitom $\mathbf{Y}^T$ označujeme transponovanou matici k matici $\mathbf{Y}$.

Zvláštní význam pro symetrické bilineární formy má jejich vrchol, což bude pojem, který nyní zavedeme. Vrchol symetrické bilineární formy souvisí např. s vrcholem kuželové plochy, o čemž se později přesvědčíme.

Definice 4.1.4. Buď f symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. *Vrcholem formy* f nazýváme množinu

$$\{\mathbf{y} \in \mathbf{V};\ f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}\}.$$

Jinými slovy: Vektor $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ leží ve vrcholu symetrické bilineární formy f právě tehdy, jestliže platí: Dosadíme-li vektor $\mathbf{z}$ za jeden ze dvou proměnných vektorů, potom funkce $f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ je jako funkce druhého proměnného vektoru $\mathbf{x}$ nulová lineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$.

Nyní určíme vrchol symetrické bilineární formy f, máme-li ji dánu pomocí vzorce (3). Vztah (3) můžeme snadno upravit na tvar

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} f_{ij}y_j) \, x_i.$$

K tomu, aby platilo $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, je nutné a stačí, aby bylo

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}y_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Vrchol formy f je tedy řešením následující soustavy lineárních homogenních rovnic:

$$(5)\qquad \begin{aligned} f_{11}y_1 + f_{12}y_2 + \ldots + f_{1n}y_n &= 0\\ f_{21}y_1 + f_{22}y_2 + \ldots + f_{2n}y_n &= 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ f_{n1}y_1 + f_{n2}y_2 + \ldots + f_{nn}y_n &= 0 \end{aligned}$$

Z teorie homogenních lineárních rovnic (viz [3]) vyplývá, že vrchol symetrické bilineární formy je podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$ (to lze ovšem též snadno dokázat přímo z definice 4.1.4) a má-li matice $\mathbf{F}$ (viz (4)) hodnost h, má vrchol dimenzi $n - h$. Protože však vrchol byl zaveden bez pomoci báze, dostáváme obráceně, že hodnost matice $\mathbf{F}$ nezávisí na volbě báze prostoru $\mathbf{V}$. Speciálně tedy na volbě báze nezávisí, je-li matice $\mathbf{F}$ regulární (tj. má hodnost n).

Definice 4.1.5. Říkáme, že symetrická bilineární forma f je *regulární*, je-li jejím vrcholem $\{\mathbf{o}\}$ (tj. obsahuje-li její vrchol pouze nulový vektor). Není-li symetrická bilineární forma regulární, říkáme, že je *singulární*.

Vidíme, že symetrická bilineární forma je regulární právě tehdy, je-li regulární její matice $\mathbf{F}$.

Poznámka 5. Při definici vrcholu symetrické bilineární formy bychom mohli požadavek symetričnosti vynechat. Museli bychom potom rozlišovat, zda má platit rovnost $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ nebo $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Dostali bychom dva pojmy — *pravý a levý vrchol* — a pro ně by šly dělat všechny úvahy, které jsme dělali pro vrchol symetrické bilineární formy. Nadále však budeme používat pouze vrchol symetrické bilineární formy.

Na závěr odstavce ještě ukážeme, že je možné bilineární formu na reálném vektorovém prostoru rozšířit na bilineární formu na prostoru $\mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$ — komplexním rozšíření prostoru $\mathbf{V}_n$.

Věta 4.1.2. Buď $\mathbf{V}_n$ reálný vektorový prostor. Ke každé bilineární formě f na prostoru $\mathbf{V}_n$ existuje právě jedna bilineární forma f^{C} na prostoru $\mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$ tak, že $f^{\mathrm{C}} \mid \mathbf{V}_n = f$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že bilineární forma f^{C} popsaných vlastností existuje nejvýše jedna. Buď $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$. Potom můžeme psát $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathrm{i}\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathrm{i}\mathbf{y}_2$, kde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}_n$ a i je imaginární jednotka. Pro bilineární formu f^{C} musí platit

$$f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}_1 + \mathrm{i}\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 + \mathrm{i}\mathbf{y}_2).$$

Použitím vlastností bilineární formy z definice 4.1.1 dokážeme, že

$$f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) - f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) + \mathrm{i}(f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)),$$

a tedy (protože $f^{\mathrm{C}} \mid \mathbf{V}_n = f$)

$$(6)\qquad f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) - f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) + \mathrm{i}(f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)).$$

Bilineární forma f^{C} je tedy jednoznačně určena bilineární formou f. Existence bilineární formy f^{C} popsaných vlastností se dokáže snadno. Stačí obráceně definovat zobrazení f^{C} vztahem (6) a jednoduchým ověřením vlastností bilineární formy (viz definice 4.1.1) dokážeme, že zobrazení f^{C} je bilineární forma.

Nechť $\mathscr{B} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je báze reálného vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$. Víme, že bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ má v bázi $\mathscr{B}$ analytické vyjádření (3), přičemž $f_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$. Dále víme, že báze $\mathscr{B}$ je i bází vektorového prostoru $\mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$. Protože platí $f^{\mathrm{C}}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, dostáváme analytické vyjádření bilineární formy f^{C} v bázi $\mathscr{B}$ ve tvaru

$$(7)\qquad f^{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_i y_j.$$

Rozdíl mezi analytickým vyjádřením bilineární formy f a analytickým vyjádřením bilineární formy f^{C} je jen v tom, že do vztahu (3) dosazujeme za x_i a y_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ reálná čísla a do vztahu (7) dosazujeme za stejné symboly komplexní čísla.

Cvičení

Ve všech cvičeních je $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T} = \mathbf{R}$ a $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

1. Zjistěte, zda zobrazení f je bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Přitom pro každé vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí
   a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_2$,
   b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1x_2 + 3y_1y_2$,
   c) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2}$,
   d) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - x_2)\,y_1$.
2. Určete analytické vyjádření symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ v kanonické bázi prostoru $\mathbf{V}$, víte-li, že $f((1, 1), (0, 1)) = 5$, $f((1, 2), (1, -1)) = 0$, $f((1, 0), (-1, 2)) = -10$.
3. Určete vrchol symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Přitom platí:
   a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$
   b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2$

4.2 Kvadratické formy

Podobně jako v předešlém odstavci budeme předpokládat, že $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a že veškerá vyšetřování provádíme v tomto vektorovém prostoru — speciálně budeme předpokládat, že všechny bilineární a kvadratické formy (pojem, který nyní zavedeme) jsou formy na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Dále budeme ještě předpokládat, že těleso $\mathbf{T}$ je buď těleso reálných, nebo těleso komplexních čísel. Ke konci tohoto odstavce se pak omezíme jen na těleso reálných čísel. Přitom řada zkoumání by šla dělat daleko obecněji — např. pouze za předpokladu, že těleso $\mathbf{T}$ není charakteristiky 2.

Definice 4.2.1. Zobrazení f_2 vektorového prostoru $\mathbf{V}$ do tělesa $\mathbf{T}$ nazýváme *kvadratická forma* na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$, jestliže existuje bilineární forma f na prostoru $\mathbf{V}$ tak, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je $f_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Říkáme přitom, že bilineární forma f určuje kvadratickou formu f_2.

Nejjednodušším příkladem kvadratické formy je *nulová kvadratická forma* — zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ přiřadí číslo $0 \in \mathbf{T}$. Nulová kvadratická forma je určena nulovou bilineární formou.

Poznámka 1. Každá antisymetrická bilineární forma určuje zřejmě nulovou kvadratickou formu. Z definice 4.1.2 totiž vyplývá, že pro antisymetrickou bilineární formu f je $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x}$.

Na vektorovém prostoru se skalárním součinem je příkladem kvadratické formy zobrazení, které každému vektoru přiřadí druhou mocninu jeho velikosti.

Poznámka 2. Přímo z definice 4.2.1 vyplývá, že restrikce kvadratické formy na podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je kvadratická forma na tomto podprostoru.

Na množině všech kvadratických forem na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ můžeme zřejmým způsobem definovat operace sčítání kvadratických forem a násobení kvadratické formy číslem z tělesa $\mathbf{T}$. *Součtem kvadratických forem* f_2 a g_2 nazýváme zobrazení h_2 prostoru $\mathbf{V}$ do tělesa $\mathbf{T}$ definované předpisem

$$h_2(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x}).$$

Zřejmě h_2 je kvadratická forma. Píšeme $h_2 = f_2 + g_2$. Podobně *násobení kvadratické formy* f_2 *číslem* $c \in \mathbf{T}$ je definováno předpisem

$$(cf_2)(\mathbf{x}) = cf_2(\mathbf{x}).$$

Věta 4.2.1. Ke každé kvadratické formě f_2 existuje právě jedna symetrická bilineární forma f, která ji určuje.

Důkaz. Nechť kvadratická forma f_2 je určena bilineární formou f'. Podle věty 4.1.1 můžeme bilineární formu f' rozložit na součet symetrické a antisymetrické bilineární formy: $f' = f'_s + f'_a$. Podle poznámky 1 určuje též symetrická bilineární forma f'_s kvadratickou formu f_2. Buď nyní obráceně f symetrická bilineární forma určující kvadratickou formu f_2. Potom pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dostáváme podle definice 4.1.1 a definice 4.1.2.

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Protože bilineární forma f je symetrická, plyne odtud, že

$$(1) \qquad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}(f_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{y})).$$

Tudíž bilineární forma f je skutečně určena jednoznačně kvadratickou formou f_2.

Definice 4.2.2. Symetrickou bilineární formu f určující kvadratickou formu f_2 nazýváme *polární bilineární forma* ke kvadratické formě f_2.

Vidíme, že je-li $\mathbf{V}_n$ vektorový prostor se skalárním součinem a vezmeme-li za bilineární formu skalární součin, dává nám vzorec (1) známé vyjádření skalárního součinu pomocí velikostí vektorů, používané např. při důkazu kosinové věty.

Z analytického vyjádření bilineární formy (vztah (3) z odstavce 4.1) dostaneme *analytické vyjádření kvadratické formy:*

$$(2) \qquad f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j$$

Přitom $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i$ a $f_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, kde f je bilineární forma určující kvadratickou formu f_2.

Příklad 1. Na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_3$ v bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ má kvadratická forma f_2 analytické vyjádření

$$f_2(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + x_3^2.$$

Napište analytické vyjádření její polární bilineární formy f ve stejné bázi a určete matici formy f.

Řešení. Musíme si uvědomit, že má-li libovolná bilineární forma f' na $\mathbf{V}_3$ matici

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} f'_{11}, & f'_{12}, & f'_{13} \\ f'_{21}, & f'_{22}, & f'_{23} \\ f'_{31}, & f'_{32}, & f'_{33} \end{pmatrix},$$

určuje kvadratickou formu f'_2, která má analytické vyjádření

$$f'_2(\mathbf{x}) = f'_{11}x_1^2 + f'_{12}x_1x_2 + f'_{13}x_1x_3 + f'_{21}x_2x_1 + f'_{22}x_2^2 + \\ + f'_{23}x_2x_3 + f'_{31}x_3x_1 + f'_{32}x_3x_2 + f'_{33}x_3^2$$

nebo po úpravě

$$f'_2(\mathbf{x}) = f'_{11}x_1^2 + (f'_{12} + f'_{21})\,x_1x_2 + (f'_{13} + f'_{31})\,x_1x_3 + \\ + f'_{22}x_2^2 + (f'_{23} + f'_{32})\,x_2x_3 + f'_{33}x_3^2.$$

Hledáme-li polární bilineární formu f k dané kvadratické formě f_2, musí tedy být $f_{ij} = f_{ji}$ pro $i, j = 1, 2, 3$ a $f_{11} = 3, f_{12} + f_{21} = 2, f_{13} + f_{31} = 0, f_{22} = 0, f_{23} + f_{32} = -1, f_{33} = 1$. Matice $\mathbf{F}$ bilineární formy f má tudíž tvar

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & -\frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2}, & 1 \end{pmatrix}$$

a bilineární forma f má analytické vyjádření

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - \tfrac{1}{2}x_2y_3 - \tfrac{1}{2}x_3y_2 + x_3y_3.$$

Definice 4.2.3. *Vrcholem kvadratické formy* f_2 nazýváme vrchol její polární bilineární formy f. Říkáme, že kvadratická forma je *regulární*, obsahuje-li její vrchol jen nulový vektor. Není-li kvadratická forma regulární, říkáme, že je *singulární*.

Úmluva. Nadále budeme používat jen symetrické bilineární formy. Předpokládejme proto, že polární bilineární formy ke kvadratickým formám $f_2, g_2, h_2, \ldots$ označujeme po řadě $f, g, h, \ldots$.

Víme, že ve vektorových prostorech se skalárním součinem je nejvhodnější pro výpočty ortogonální nebo ortonormální báze. Jednoduchým zobecněním ortogonální báze je tzv. polární báze kvadratické formy.

Definice 4.2.4. Bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nazýváme *polární bází* kvadratické formy f_2, jestliže pro každá $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ platí $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$.

Vidíme, že analytické vyjádření kvadratické formy f_2 v polární bázi má tvar (viz (2))

$$f_2(\mathbf{x}) = f_{11}x_1^2 + \ldots + f_{nn}x_n^2. \tag{3}$$

Věta 4.2.2. Každá kvadratická forma f_2 má polární bázi.

Důkaz. Je-li kvadratická forma f_2 nulová, je tvrzení zřejmé, protože každá báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je polární báze kvadratické formy f_2. Můžeme proto

předpokládat, že kvadratická forma f_2 je nenulová. Důkaz provedeme úplnou indukcí podle dimenze n vektorového prostoru $\mathbf{V}$:

1. Nechť $n = 1$. V tom případě je tvrzení zřejmé, protože každá báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je polární báze kvadratické formy f_2.

2. Nechť tvrzení platí pro všechny kvadratické formy na všech vektorových prostorech dimenze $n - 1$. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ zvolme vektor $\mathbf{u}_1$ tak, aby bylo $f_2(\mathbf{u}_1) \neq 0$. Dále položme $\mathbf{V}' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n;\ f(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}) = 0\}$. Protože zobrazení f', které každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ přiřadí číslo $f(\mathbf{u}_1, \mathbf{x})$ (tj. $f'(\mathbf{x}) = f(\mathbf{u}_1, \mathbf{x})$) je nenulová lineární forma (je $f'(\mathbf{u}_1) = f_2(\mathbf{u}_1) \neq 0$), je $\mathbf{V}'$ vektorový prostor dimenze $n - 1$. Podle indukčního předpokladu v něm tedy existuje polární báze kvadratické formy $f_2 \mid \mathbf{V}'$. Označme ji $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Protože $\mathbf{u}_1 \notin \mathbf{V}'$, jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi prostoru $\mathbf{V}'$. Tato báze je zřejmě polární bází kvadratické formy f_2.

Příklad 2. Nechť kvadratická forma f_2 na vektorovém prostoru $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ přiřazuje každému vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ číslo $f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$. Určete její polární bázi a napište její analytické vyjádření v této bázi.

Řešení. Zvolíme vektor $\mathbf{u}_1$ tak, aby bylo $f_2(\mathbf{u}_1) \neq 0$. Např. $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, potom $f_2(\mathbf{u}_1) = 1$. Napíšeme matici $\mathbf{F}$ polární bilineární formy f (viz příklad 1):

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0 \end{pmatrix}$$

Podle důkazu věty 4.2.2 musíme určit podprostor $\mathbf{V}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V};\ f(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}) = 0\}$. Podle poznámky 4 z odstavce 4.1 je $\mathbf{V}^1$ množina těch vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, pro něž platí

$$(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

tj. $x_1 - x_2 = 0$. Uděláme podruhé indukční krok z důkazu věty 4.2.2. Budeme zkoumat kvadratickou formu f_2 na podprostoru $\mathbf{V}^1$ a hledat takový vektor $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}^1$, aby $f_2(\mathbf{u}_2) \neq 0$. Zvolme např. $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)$. Zřejmě skutečně $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}^1$, ale přitom, vypočteme-li hodnotu $f_2(\mathbf{u}_2)$, dostaneme $f_2(\mathbf{u}_2) = 0$. Vidíme, že zvolený vektor $\mathbf{u}_2$ neumožňuje pokračovat dále podle důkazu věty 4.2.2, a musíme ho proto zvolit znovu. Položme tedy $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$. Potom dostaneme $f_2(\mathbf{u}_2) = -1$. Položme $\mathbf{V}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}^1; f(\mathbf{u}_2, \mathbf{x}) = 0\}$. Pomocí matice $\mathbf{F}$ dostaneme, že $\mathbf{V}^2$ je množina všech $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^1$, pro něž $-x_2 + 2x_3 = 0$, tj. $\mathbf{V}^2$ je množina vektorů $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, jejichž složky vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0, \\ -x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Zřejmě $\dim(\mathbf{V}^2) = 1$. Za vektor $\boldsymbol{u}_3$ proto můžeme vzít jakékoli řešení soustavy (4), např. $\boldsymbol{u}_3 = (2, 2, 1)$. Pomocí matice $\mathbf{F}$ můžeme snadno udělat zkoušku a přesvědčit se, že skutečně $f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3) = f(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 0$. Pišme $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + x'_3\boldsymbol{u}_3$. Analytické vyjádření kvadratické formy f_2 v bázi $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ má potom tvar

$$f_2(\mathbf{x}) = f_2(\boldsymbol{u}_1)\,x_1'^2 + f_2(\boldsymbol{u}_2)\,x_2'^2 + f_2(\boldsymbol{u}_3)\,x_3'^2,$$

tj.

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1'^2 - x_2'^2 + 4x_3'^2.$$

Máme-li kvadratickou formu vyjádřenou v polární bázi, určíme snadno její vrchol. Vidíme, že soustava (5) z odstavce 4.1, jejímž řešením vrchol je, má v tomto případě tvar $f_{11}y_1 = 0, f_{22}y_2 = 0, \ldots, f_{nn}y_n = 0$. Vidíme, že dimenze vrcholu kvadratické formy f_2 je rovna počtu nulových koeficientů f_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ při jejím vyjádření v polární bázi. Kvadratická forma f_2 je regulární právě tehdy, jsou-li všechny koeficienty $f_{11}, \ldots, f_{nn}$ nenulové (samozřejmě při vyjádření kvadratické formy v polární bázi).

Úmluva. Od této chvíle až do konce odstavce budeme předpokládat, že vektorový prostor $\mathbf{V}_n$, ve kterém pracujeme, je reálný, tj. že $\mathbf{T} = \mathbf{R}$.

Definice 4.2.5. Říkáme, že kvadratická forma f_2 na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ je
a) *pozitivně definitní*, jestliže pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n$ platí $f_2(\mathbf{x}) > 0$;
b) *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n$ platí $f_2(\mathbf{x}) \geqq 0$;
c) *negativně definitní*, jestliže pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n$ platí $f_2(\mathbf{x}) < 0$;
d) *negativně semidefinitní*, jestliže pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n$ platí $f_2(\mathbf{x}) \leqq 0$.

Jestliže existují vektory $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}_n$ tak, že $f_2(\mathbf{y}) > 0$ a $f_2(\mathbf{z}) < 0$, říkáme, že kvadratická forma f_2 je *indefinitní.*

Přímo z definice 4.2.5 vyplývá, že každá pozitivně definitní kvadratická forma je i pozitivně semidefinitní a každá negativně definitní kvadratická forma je i negativně semidefinitní.

Jestliže kvadratickou formu f_2 vyjádříme v polární bázi vztahem (3), můžeme zřejmě říci, že kvadratická forma f_2 je pozitivně definitní, resp. pozitivně semidefinitní, resp. negativně definitní, resp. negativně semidefinitní právě tehdy, jsou-li všechny koeficienty $f_{11}, \ldots, f_{nn}$ kladné, resp. nezáporné, resp. záporné, resp. nekladné. Kvadratická forma f_2 je indefinitní, je-li alespoň jeden z koeficientů $f_{11}, \ldots, f_{nn}$ kladný a alespoň jeden je záporný.

Dále je zřejmé, že omezíme-li definiční obor kvadratické formy f_2 na podprostor $\mathbf{V}'_k$ prostoru $\mathbf{V}_n$ (tj. sestrojíme kvadratickou formu $f_2 \mid \mathbf{V}'_k$), tak v případě, že kvadratická forma f_2 byla pozitivně definitní nebo pozitivně semidefinitní nebo negativně definitní nebo negativně semidefinitní, je kvadratická forma $f_2 \mid \mathbf{V}'_k$ stejného druhu jako kvadratická forma f_2.

Věta 4.2.3. Nechť ve vyjádření (3) kvadratické formy f_2 v polární bázi $\mathscr{B} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ z koeficientů $f_{11}, \ldots, f_{nn}$ právě p koeficientů je kladných a právě q záporných. Potom existují podprostory $\mathbf{V}'_p$ a $\mathbf{V}''_q$ prostoru $\mathbf{V}_n$ tak, že kvadratická forma $f_2 \mid \mathbf{V}'_p$ je pozitivně definitní, kvadratická forma $f_2 \mid \mathbf{V}''_q$ je negativně definitní a pro každé podprostory $\bar{\mathbf{V}}'_r$, $\bar{\mathbf{V}}''_s$ prostoru $\mathbf{V}_n$, pro které $r > p$, $s > q$, platí: Kvadratická forma $f_2 \mid \bar{\mathbf{V}}'_r$ není pozitivně definitní a kvadratická forma $f_2 \mid \bar{\mathbf{V}}''_s$ není negativně definitní.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti důkazu můžeme předpokládat, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ v bázi $\mathscr{B}$ jsou uspořádány tak, že $f_{ii} > 0$ pro $i = 1, \ldots, p$, $f_{ii} < 0$ pro $i = p + 1, \ldots, p + q$ a $f_{ii} = 0$ pro $i > p + q$ a $i \leqq n$. Zřejmě $\mathbf{V}'_p = [\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}]$, $\mathbf{V}''_q = [\{\boldsymbol{u}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{p+q}\}]$ jsou hledané podprostory. Buď nyní $\bar{\mathbf{V}}'_r$ podprostor $\mathbf{V}_n$, pro který platí $r > p$. Položme $\mathbf{V}^1_{n-p} = [\{\boldsymbol{u}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}]$. Podle I. dílu (Úvod — odstavec 5)

$$r + (n - p) = \dim(\bar{\mathbf{V}}'_r \cap \mathbf{V}^1_{n-p}) + \dim[\bar{\mathbf{V}}'_r \cup \mathbf{V}^1_{n-p}],$$

a tedy

$$r + n - p \leqq \dim(\bar{\mathbf{V}}'_r \cap \mathbf{V}^1_{n-p}) + n,$$
$$r - p \leqq \dim(\bar{\mathbf{V}}'_r \cap \mathbf{V}^1_{n-p}).$$

Protože je $r > p$, platí $\bar{\mathbf{V}}'_r \cap \mathbf{V}^1_{n-p} \neq \emptyset$ a existuje tedy nenulový vektor $\mathbf{y} \in \bar{\mathbf{V}}'_r \cap \mathbf{V}^1_{n-p}$. Z $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^1_{n-p}$ vyplývá, že $f_2(\mathbf{y}) \leqq 0$. Tudíž kvadratická forma $f_2 \mid \bar{\mathbf{V}}'_r$ není pozitivně definitní ($\mathbf{y} \in \bar{\mathbf{V}}'_r$). Pro každý podprostor $\bar{\mathbf{V}}''_s$, pro který $s > q$, lze podobně dokázat, že kvadratická forma $f_2 \mid \bar{\mathbf{V}}''_s$ není negativně definitní. Důkaz tohoto tvrzení necháme čtenáři jako cvičení.

Právě dokázaná věta nám říká, že čísla p, q nezávisí na volbě polární báze kvadratické formy f_2. V této větě jsou totiž čísla p, q popsána bez pomoci polární báze. Jinak bychom větu 4.2.3 mohli též zformulovat tak, že p je maximum z dimenzí všech podprostorů $\mathbf{W}$ prostoru $\mathbf{V}_n$, na nichž je kvadratická forma $f_2 \mid \mathbf{W}$ pozitivně definitní, a q je maximum z dimenzí všech podprostorů $\mathbf{W}'$ prostoru $\mathbf{V}_n$, na nichž je kvadratická forma $f_2 \mid \mathbf{W}'$ negativně definitní.

Definice 4.2.6. Nechť jsou splněny předpoklady věty 4.2.3. Potom uspořádanou dvojici (p, q) nazýváme *signatura kvadratické formy* f_2.

Poznámka 3. Z věty 4.2.3 vyplývá, že máme-li kvadratickou formu f_2 vyjádřenu ve dvou polárních bázích, jsou počty kladných koeficientů v obou vyjádřeních stejné a právě tak počty záporných koeficientů jsou v obou vyjádřeních stejné. Větě 4.2.3 vyjádřené tímto způsobem se obvykle říká zákon setrvačnosti kvadratických forem.

Věta 4.2.4. Buď f_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}_n$. Nechť $\mathbf{V}^*_{n-1}$ je podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$. Položme $f_2^* = f_2 \,|\, \mathbf{V}^*_{n-1}$. Označme (p, q), resp. (p^*, q^*) signaturu kvadratické formy f_2, resp. f_2^*. Potom platí

$$p \geqq p^* \geqq p - 1,$$
$$q \geqq q^* \geqq q - 1.$$

Důkaz. Větu snadno dokážeme z předešlé věty. Podle této věty existuje v prostoru $\mathbf{V}^*_{n-1}$ jeho podprostor dimenze p^*, na němž je kvadratická forma f_2^* pozitivně definitní. Tento podprostor je však též podprostorem prostoru $\mathbf{V}_n$. Tudíž $p \geqq p^*$. Je-li obráceně $\mathbf{V}'_p$ podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$, na němž je kvadratická forma f_2 pozitivně definitní, pak $\mathbf{V}'_p \cap \mathbf{V}^*_{n-1}$ je podprostor prostoru $\mathbf{V}^*_{n-1}$, na němž je kvadratická forma f_2^* pozitivně definitní a $\dim(\mathbf{V}'_p \cap \mathbf{V}^*_{n-1}) \geqq p - 1$ (viz I. díl, Úvod – odstavec 5). Tudíž $p^* \geqq p - 1$. Nerovnosti pro q^* lze dokázat obdobně.

Věta 4.2.5. Nechť jsou splněny předpoklady věty 4.2.4. Označme ještě v, resp. v^* dimenzi vrcholu kvadratické formy f_2, resp. f_2^*. Potom

$$v + 1 \geqq v^* \geqq v - 1. \tag{5}$$

Důkaz. Protože p je počet kladných, q počet záporných a v počet nulových koeficientů ve vyjádření kvadratické formy f_2 v polární bázi, je

$$p + q + v = n \tag{6}$$

a

$$p^* + q^* + v^* = n - 1. \tag{7}$$

Podle věty 4.2.4 je $p^* = p$ nebo $p^* = p - 1$, $q^* = q$ nebo $q^* = q - 1$. Probereme-li všechny možnosti a vypočítáme-li v^* ze vztahu (7), pak s použitím vztahu (6) dostáváme, že mohou nastat jen tyto možnosti:

$$\begin{aligned} &p^* = p, &&q^* = q &&\Rightarrow v^* = v - 1\\ &p^* = p, &&q^* = q - 1 &&\Rightarrow v^* = v\\ &p^* = p - 1, &&q^* = q &&\Rightarrow v^* = v\\ &p^* = p - 1, &&q^* = q - 1 &&\Rightarrow v^* = v + 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Tím je vztah (5) dokázán.

Poznámka 4. Větu 4.2.5 bychom mohli též dokázat bez použití věty 4.2.4. Dokonce lze větu 4.2.5 (na rozdíl od věty 4.2.4) dokázat ve všech vektorových prostorech nad tělesem $\mathbf{T}$, kde $\mathbf{T}$ je libovolné těleso, které nemá charakteristiku 2. Protože však větu 4.2.5 budeme používat jen pro reálné kvadratické formy, spokojíme se s jejím důkazem pomocí věty 4.2.4.

Jako u bilineárních forem prozkoumáme i u kvadratických forem možnosti rozšíření reálné kvadratické formy na komplexní kvadratickou formu.

Věta 4.2.6. Ke každé kvadratické formě f_2 na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ existuje právě jedna kvadratická forma f_2^C na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n^C$ ($\mathbf{V}_n^C$ je komplexní rozšíření prostoru $\mathbf{V}_n$, viz odstavec 3.1) tak, že $f_2^C \,|\, \mathbf{V}_n = f_2$.

Důkaz. Ke kvadratické formě f_2 sestrojíme její polární bilineární formu f a k té její komplexní rozšíření f^C podle věty 4.1.2. Kvadratická forma f_2^C určená bilineární formou f^C je zřejmě hledané rozšíření. Tím je dokázána existence kvadratické formy f_2^C. Dokážeme ještě, že taková forma existuje právě jedna. Buď F_2 další kvadratická forma na prostoru $\mathbf{V}_n^C$, pro niž platí $F_2 \,|\, \mathbf{V}_n = f_2$. Z věty 4.2.1 vyplývá, že pro její polární bilineární formu F platí $F \,|\, \mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n = f$. Odtud podle věty 4.1.2 dostáváme, že $F = f^C$, a tudíž $F_2 = f_2^C$. Tím je věta dokázána.

Cvičení

1. V dané bázi $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ reálného vektorového prostoru $\mathbf{V}_3$ má kvadratická forma f_2 analytické vyjádření:

   a) $f_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_3^2$
   b) $f_2(\boldsymbol{x}) = (x_1 - x_3)\,x_2$
   Napište matici její polární bilineární formy f v téže bázi.
2. Napište analytické vyjádření kvadratických forem ze cvičení 1 v bázi $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3$. Přitom $\boldsymbol{u}'_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}'_2 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}'_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$.
3. Určete polární bázi $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3$ kvadratických forem ze cvičení 1. Bázi určete tak, aby v případě a) bylo $\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}'_2 = c\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$, kde $c \in \mathbf{R}$, a aby v případě b) bylo $\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}'_2 = \boldsymbol{u}_2 + d\boldsymbol{u}_3$, kde $d \in \mathbf{R}$. V případech a) i b) napište analytické vyjádření kvadratické formy f_2 v polární bázi $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3$.

4.3 Základní vlastnosti kvadrik

Nyní již můžeme definovat kvadriku tak, jak to bylo naznačeno na počátku kapitoly. Až do konce kapitoly budeme předpokládat, že $\mathbf{A}_n$ je daný reálný n-rozměrný afinní prostor se zaměřením $\mathbf{V}_n$. Symbol $\mathbf{A}_n^C$ bude označovat komplexní rozšíření afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ a $\bar{\mathbf{A}}_n$, resp. $\overline{\mathbf{A}_n^C}$ bude označovat projektivní rozšíření afinního prostoru $\mathbf{A}_n$, resp. $\mathbf{A}_n^C$. Aritmetický základ prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n$, resp. $\overline{\mathbf{A}_n^C}$ budeme označovat $\mathbf{W}_{n+1}$, resp. $\mathbf{W}_{n+1}^C$. Toto označení můžeme používat, protože podle věty 3.4.7 je možné prostor $\mathbf{W}_{n+1}^C$ považovat za komplexní rozšíření prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$. Dále budeme předpokládat, že všechny lineární, bilineární a kvadratické formy jsou formy na $\mathbf{W}_{n+1}^C$, které jsme obdrželi rozšířením forem stejného typu na prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$. Protože jiné formy nebudeme používat, budeme v jejich označování vynechávat symbol $\mathbf{C}$, který jsme psali jako index vpravo nahoře. Při označování bodů z prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ a vektorů z prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ budeme používat úmluvu zavedenou v odstavci 3.4.

Definice 4.3.1. Množinu $\mathbf{Q} \subset \overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ nazýváme *kvadrikou* v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$, jestliže existuje nenulová kvadratická forma f_2 na $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ tak, že $X \in \mathbf{Q}$ právě tehdy, když $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Kvadriky v $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathrm{C}}$ nazýváme *kuželosečky*.

Poznámka 1. Při definici kvadriky bychom se nemuseli omezovat na kvadratické formy, které jsme dostali komplexním rozšířením reálných kvadratických forem (kvadratických forem na vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$), tak jak jsme to podle předcházející úmluvy učinili, ale mohli bychom použít libovolné kvadratické formy na prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$. Kvadrikám z definice 4.3.1 bychom pak říkali *formálně reálné kvadriky*.

Zvolme bázi $\mathscr{B} = (\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ (to je též báze vektorového prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$). Nechť pro $X \in \overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ je v této bázi $X = (x_0, \ldots, x_n)$. Nechť kvadrika $\mathbf{Q}$ je určena kvadratickou formou f_2 podle definice 4.3.1. Použijeme-li analytické vyjádření kvadratické formy f_2 (viz (2) odstavec 4.2), dostaneme, že $X \in \mathbf{Q}$ právě tehdy, je-li

$$(1) \qquad \sum_{i,j=0}^{n} f_{ij} x_i x_j = 0.$$

Vztah (1) nazýváme *rovnicí kvadriky* $\mathbf{Q}$. Rovnici (1) rozepíšeme zvlášť pro případy $n = 1$ a $n = 2$. Pro $n = 1$ dostáváme rovnici kvadriky na přímce:

$$(2) \qquad f_{00}x_0^2 + 2f_{01}x_0x_1 + f_{11}x_1^2 = 0$$

Pro $n = 2$ dostáváme rovnici kuželosečky v rovině:

$$(3) \qquad f_{00}x_0^2 + 2f_{01}x_0x_1 + 2f_{02}x_0x_2 + f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = 0$$

Předpokládejme nyní, že $n = 2$ a že báze $\mathscr{B}$ je určena repérem afinního prostoru $\mathbf{A}_2$, tj. že existuje bod $P \in \mathbf{A}_2$ tak, že $\boldsymbol{u}_0 = (1, P)$, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{V}_2$. Nechť v lineární soustavě souřadnic určené repérem $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$, pro $X \in \mathbf{A}_2$ platí $X = [x, y]$. Potom můžeme v bázi $\mathscr{B}$ psát $X = (1, x, y)$ (viz odstavec 3.4). Dosazením do vztahu (3) zjistíme, že je $X \in \mathbf{Q}$ právě tehdy, je-li

$$(4) \qquad f_{00} + 2f_{01}x + 2f_{02}y + f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 = 0.$$

Tím jsme vlastně dostali známou rovnici, kterou jsme vyšetřovali již v odstavci 3.2 v [G].

Viděli jsme, že kvadriku v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ jsme mohli definovat pomocí kvadratické formy, protože k prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ máme sestrojen vektorový prostor $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ tak, že každému nenulovému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ odpovídá nějaký bod $X \in \overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$. Přitom dvěma nenulovým vektorům z $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ odpovídá stejný bod právě tehdy, jsou-li tyto

vektory lineárně závislé. Stejná situace je však i u podprostorů prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$. Definici 4.3.1 můžeme tedy rozšířit následujícím způsobem.

Definice 4.3.2. Buď $\mathbf{P}'_k$ podprostor prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ s aritmetickým základem $\mathbf{W}'_{k+1}$. Množinu $\mathbf{Q}' \subset \mathbf{P}'_k$ nazýváme *kvadrikou v podprostoru* $\mathbf{P}'_k$, jestliže existuje nenulová kvadratická forma f'_2 na $\mathbf{W}'_{k+1}$ tak, že $X \in \mathbf{Q}'$ právě tehdy, když $f'_2(\mathbf{x}) = 0$.

Víme, že tzv. vlastní podprostory prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ dostaneme projektivním rozšířením podprostorů prostoru $\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}$. V tomto případě je definice 4.3.2 téměř zbytečná. V prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$ máme však ještě nevlastní podprostory a definici kvadriky v těchto podprostorech nemůžeme dostat z definice 4.3.1.

Následující věta má základní význam pro zkoumání kvadrik a umožňuje zkoumat kvadriku prostřednictvím kvadratické formy, která tuto kvadriku určuje, tj. zkoumat kvadriku prostřednictvím její rovnice.

Věta 4.3.1. Nechť kvadratické formy f_2 a f'_2 na vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ určují obě stejnou kvadriku $\mathbf{Q}$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathrm{C}}$. Potom existuje nenulové číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že $f'_2 = cf_2$.

Důkaz. Zvolme bod $A \in \mathbf{A}_n$, $A \notin \mathbf{Q}$. Potom pro aritmetického zástupce $\boldsymbol{a}$ bodu A platí $f_2(\boldsymbol{a}) \neq 0$, a tedy i $f'_2(\boldsymbol{a}) \neq 0$. Označme $c = f'_2(\boldsymbol{a})/f_2(\boldsymbol{a})$. Buď $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$. Položme $\mathbf{x} = t\boldsymbol{a} + \mathbf{y}$. Potom $f_2(\mathbf{x}) = f(t\boldsymbol{a} + \mathbf{y}, t\boldsymbol{a} + \mathbf{y})$. Použijeme-li vlastnosti bilineární formy z definice 4.1.1, dostáváme

$$f_2(\mathbf{x}) = t^2 f_2(\boldsymbol{a}) + 2tf(\boldsymbol{a}, \mathbf{y}) + f_2(\mathbf{y})$$

a podobné vyjádření dostaneme i pro kvadratickou formu f'_2. Protože obě kvadratické formy f_2 a f'_2 určují stejnou kvadriku $\mathbf{Q}$, platí $f_2(\mathbf{x}) = 0$, právě když $f'_2(\mathbf{x}) = 0$, tj.

$$(5) \qquad t^2 f_2(\boldsymbol{a}) + 2tf(\boldsymbol{a}, \mathbf{y}) + f_2(\mathbf{y}) = 0,$$

právě když

$$(6) \qquad t^2 f'_2(\boldsymbol{a}) + 2tf'(\boldsymbol{a}, \mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) = 0.$$

Protože kvadratické rovnice (5) a (6) mají stejné kořeny, je rovnice (6) nenulovým násobkem rovnice (5). Tudíž musí být i $f'_2(\mathbf{y}) = cf_2(\mathbf{y})$. Protože $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$ byl libovolný vektor, je tím věta dokázána.

Poznámka 2. Při důkazu předešlé věty jsme použili tvrzení, že kořeny určují kvadratickou rovnici až na nenulový násobek jednoznačně. Toto tvrzení je však správné jen tehdy, bereme-li kořeny v tělese komplexních čísel, tj. pracujeme-li v prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$.

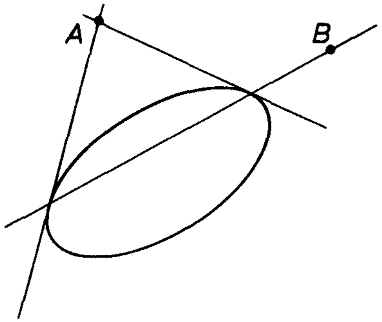
Následující věta je zřejmá. Vyplývá z toho, že omezením definičního oboru kvadratické formy na podprostor dostáváme kvadratickou formu na tomto podprostoru.

Věta 4.3.2. Nechť $\mathbf{Q}$ je kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$ a $\mathbf{P}'_k$ je podprostor prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$. Potom buď $\mathbf{Q} \supset \mathbf{P}'_k$, nebo $\mathbf{P}'_k \cap \mathbf{Q}$ je kvadrika v podprostoru $\mathbf{P}'_k$.

Rovnici kvadriky v podprostoru $\mathbf{P}'_k$ dostaneme stejným způsobem, jakým jsme dostali rovnici kvadriky v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$. Musíme přitom pochopitelně používat aritmetické báze prostoru $\mathbf{P}'_k$. Speciálně rovnice kvadriky na přímce, resp. v rovině prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$ bude opět rovnice (2), resp. (3).

4.4 Polární vlastnosti kvadrik

V celém odstavci budeme používat symboly a pojmy v souladu s předpoklady, které jsme udělali v předešlém odstavci. Dále budeme v celém odstavci předpokládat, že $\mathbf{Q}$ je daná kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$ určená kvadratickou formou f_2. Polární bilineární formu ke kvadratické formě f_2 budeme, jak bylo řečeno v odstavci 4.2, označovat symbolem f. Základní pojem při zkoumání kvadrik je pojem konjugovanosti bodů. Názorný význam konjugovanosti bodů je patrný z obr. 41. Body A, B jsou konjugované vzhledem ke kvadrice, jestliže z jednoho z nich, např. bodu A, můžeme vést tečny ke kvadrice tak, že druhý bod, bod B, leží na spojnici bodů dotyku. Konjugovanost bodů budeme však definovat jinak – vhodněji – a o uvedeném geometrickém významu konjugovanosti se přesvědčíme později.



Obr. 41

Definice 4.4.1. Říkáme, že dva body A, $B \in \overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$ jsou *konjugované* vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$, jestliže pro jejich aritmetické zástupce $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ platí $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Přímo z definice konjugovanosti bodů vyplývá, že relace konjugovanosti je symetrická, tj. jsou-li konjugované body A, B, jsou konjugované i body B, A. Jenom mimochodem – při definici konjugovanosti bodů podle obr. 41 bychom tuto vlastnost nedokazovali právě snadno. Místo abychom říkali, že body A, B jsou konjugované, budeme někdy říkat, že *bod A je konjugovaný s bodem B* nebo obráceně, že *bod B je konjugovaný s bodem A*. Vidíme též, že kvadrika $\mathbf{Q}$ je

množina všech bodů, které jsou konjugovány samy se sebou. Buď A, B, $C \in \overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$, nechť $B \neq C$. Potom je-li bod A konjugovaný s oběma body B, C, je konjugovaný i s každým bodem X přímky BC. Toto tvrzení je opět zřejmé, vyjádříme-li aritmetického zástupce $\boldsymbol{x}$ bodu X vztahem $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b} + x_2\boldsymbol{c}$ a použijeme-li definici konjugovanosti bodů a definici bilineární formy. Analogickým způsobem můžeme dokázat následující větu, její důkaz ponecháme jako cvičení.

Věta 4.4.1. Buďte $A, B_1, \ldots, B_k \in \overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$. Je-li bod A konjugován s každým bodem B_i, $i = 1, \ldots, k$, je konjugován i s každým bodem podprostoru určeného body $B_1, \ldots, B_k$.

Věta 4.4.2. Bod A kvadriky $\mathbf{Q}$ je konjugován s bodem $B \in \overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$, $B \neq A$ právě tehdy, je-li buď $\overleftrightarrow{AB} \subset \mathbf{Q}$, nebo $\overleftrightarrow{AB} \cap \mathbf{Q} = \{A\}$. Uvažované body A, B nejsou konjugované právě tehdy, když množina $\overleftrightarrow{AB} \cap \mathbf{Q}$ je dvoubodová.

Důkaz. Počítejme průsečíky přímky AB s kvadrikou $\mathbf{Q}$. $X \in \overleftrightarrow{AB}$ právě tehdy, jestliže existují čísla $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ tak, že $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{b}$ (viz odstavec 3.4). Potom $X \in \mathbf{Q}$, právě když $f_2(\boldsymbol{x}) = 0$, tj.

$$x_1^2 f_2(\boldsymbol{a}) + 2x_1x_2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + x_2^2 f_2(\boldsymbol{b}) = 0.$$

Protože $A \in \mathbf{Q}$, a tedy $f_2(\boldsymbol{a}) = 0$, je $X \in \mathbf{Q}$ právě tehdy, je-li buď $x_2 = 0$, a tedy $X = A$ ($\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}$), nebo

$$2x_1 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + x_2 f_2(\boldsymbol{b}) = 0. \quad (1)$$

Víme, že jsou dvě možnosti:

1. $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$, potom řešení rovnice (1) je určeno jednoznačně až na násobek (můžeme položit např. $x_1 = f_2(\boldsymbol{b})$, $x_2 = -2f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$) a přímka AB má s kvadrikou právě dva různé společné body. Kromě bodu A je to bod mající aritmetického zástupce $f_2(\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a} - 2f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}$.

2. $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, potom buď $f_2(\boldsymbol{b}) = 0$ a v tom případě je $\overleftrightarrow{AB} \subset \mathbf{Q}$ (rovnici (1) řeší každá dvojice čísel $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$), nebo $f_2(\boldsymbol{b}) \neq 0$ a v tom případě musí být $x_2 = 0$ a z řešení rovnice (1) opět dostáváme bod A.

Odtud již plyne tvrzení věty.

Nyní zavedeme vrchol kvadriky. To bude pojem, jehož speciálním případem bude např. vrchol kuželové plochy.

Definice 4.4.2. *Singulárním bodem* kvadriky $\mathbf{Q}$ nazýváme takový bod $Y \in \overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$, který je konjugovaný s každým bodem $X \in \overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$. Množinu všech singulárních bodů kvadriky nazýváme *vrchol* kvadriky. Body kvadriky, které nejsou singulární, se nazývají *regulární*.

Je zřejmé, že vrchol kvadriky $\mathbf{Q}$ je podprostor prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$, který má za aritmetický základ vrchol příslušné kvadratické formy f_2.

Je-li Y singulární bod kvadriky $\mathbf{Q}$, je konjugován s každým bodem prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$, tedy i sám se sebou, a proto $Y \in \mathbf{Q}$. Proto vrchol kvadriky leží na kvadrice.

Následující věta charakterizuje singulární body kvadriky geometrickým způsobem.

Věta 4.4.3. Bod $Y \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ je singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}$ právě tehdy, jestliže pro každý bod $Z \in \mathbf{Q}$, $Z \neq Y$ platí $\overline{ZY} \subset \mathbf{Q}$.

Důkaz. Nechť bod Y je singulární a nechť $Z \in \mathbf{Q}$, $Z \neq Y$. Potom $Y \in \mathbf{Q}$, a tedy $\{Y, Z\} \subset \overline{ZY} \cap \mathbf{Q}$. Protože body Y a Z jsou konjugované, musí podle věty 4.4.2 být $\overline{YZ} \subset \mathbf{Q}$. Nechť nyní obráceně $\overline{YZ} \subset \mathbf{Q}$ pro každý bod $Z \in \mathbf{Q}$. Potom zřejmě $Y \in \mathbf{Q}$. Nechť $X \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$. Podle věty 4.4.2 buď platí $\overline{XY} \cap \mathbf{Q} = \{Y\}$, a potom jsou body X a Y konjugované, nebo existuje bod $Z' \in \overline{XY} \cap \mathbf{Q}$, $Z' \neq Y$. Potom $\overline{YX} = \overline{Z'X} \subset \mathbf{Q}$ a opět podle věty 4.4.2 jsou body X a Y konjugované. Provedená úvaha platí pro každý bod $X \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$. Bod Y je tedy singulární.

Vyšetříme ještě kvadriky na přímce v prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$. Jak bylo řečeno, kvadrika $\mathbf{Q}$ na přímce má rovnici (2) z odstavce 4.3. Snadno zjistíme, že rovnice (2) má alespoň jedno řešení, tj. že existuje alespoň jeden bod kvadriky $\mathbf{Q}$. Z vět 4.4.2 a 4.4.3 nyní vyplývá následující věta.

Věta 4.4.4. Kvadrika $\mathbf{Q}$ na přímce v prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ je buď množina dvoubodová a v tom případě je kvadrika $\mathbf{Q}$ regulární, nebo množina jednobodová a v tom případě je kvadrika $\mathbf{Q}$ singulární a její jediný bod je též jejím vrcholem.

Větu 4.4.4 bychom též mohli snadno dokázat přímo z rovnice (2) z odstavce 4.3 bez použití vět 4.4.2 a 4.4.3.

Množina všech bodů $X \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ konjugovaných s daným bodem $A \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$ je podle definice 4.4.1 množina těch bodů X, pro něž platí $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$. Vidíme, že není-li bod A singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}$, je lineární forma přiřazující každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbf{W}^C_{n+1}$ číslo $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ nenulová; její nulovou množinou je proto vektorový podprostor dimenze n. Tento podprostor je aritmetickým základem nadroviny prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$.

Definice 4.4.3. Nechť bod A není singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$. Nadrovinu všech bodů prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ konjugovaných s bodem A vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$ nazýváme *polární nadrovina* bodu A vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$. Je-li navíc $A \in \mathbf{Q}$, nazýváme jeho polární nadrovinu vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$ *tečnou nadrovinou* kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A a bod A nazýváme *bod dotyku* zmíněné tečné nadroviny.

Přímo z definice polární nadroviny a z definice vrcholu kvadriky vyplývá, že polární nadrovina každého bodu (a tedy i každá tečná nadrovina) obsahuje vrchol kvadriky.

Definice 4.4.4. Přímka p v prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ se nazývá *tečna* kvadriky $\mathbf{Q}$, jestliže přímka p obsahuje alespoň jeden regulární bod kvadriky $\mathbf{Q}$ a přitom buď $p \subset \mathbf{Q}$, nebo množina $p \cap \mathbf{Q}$ je jednobodová.

Přímo z definic 4.4.3 a 4.4.4 a z věty 4.4.2 vyplývá následující věta.

Věta 4.4.5. Nechť A je regulární bod kvadriky $\mathbf{Q}$. Potom bod $Y \neq A$ je bodem tečné nadroviny kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A právě tehdy, je-li přímka AY tečna kvadriky $\mathbf{Q}$.

Příklad 1. V prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_3$ je dána kvadrika $\mathbf{Q}$ svou rovnicí v dané aritmetické bázi

$$x_0x_1 + x_0x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0.$$

Určete její vrchol.

Řešení. Levá strana rovnice kvadriky je analytické vyjádření kvadratické formy f_2 určující danou kvadriku. Jako v příkladu 1 z odstavce 4.2 určíme matici $\mathbf{F}$ polární bilineární formy f:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0 \\ \frac{1}{2}, & 2, & 1, & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & 1, & 0, & -\frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 0 \end{pmatrix}$$

Víme, že vrchol kvadriky má za aritmetický základ vrchol kvadratické formy f_2, což je zároveň vrchol bilineární formy f (viz definice 4.3.3). Vrchol bilineární formy f získáme řešením soustavy lineárních homogenních rovnic, přičemž matice soustavy je matice $\mathbf{F}$ (viz (5) z odstavce 4.1):

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \phantom{{}- \tfrac{1}{2}x_3} &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_0 + 2x_1 + x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\
\tfrac{1}{2}x_0 + x_1 \phantom{{}+ x_2} - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\
-\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \phantom{{}- \tfrac{1}{2}x_3} &= 0
\end{aligned}$$

Snadno se přesvědčíme, že hodnost matice $\mathbf{F}$ je rovna dvěma. Tudíž můžeme řešit např. jen první dvě rovnice (zbývající dvě jsou lineární kombinací prvních dvou). Snadno zjistíme, že řešením těchto rovnic je dvojrozměrný vektorový prostor generovaný např. vektory $\boldsymbol{u} = (0, 1, -1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (-2, 1, -1, 0)$. Vrchol kvadriky $\mathbf{Q}$ je pak podprostor mající za aritmetický základ vektorový prostor generovaný vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Příklad 2. V prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_3$ je dána kvadrika $\mathbf{Q}$ svou rovnicí v dané aritmetické bázi

$$x_0^2 + 2x_0x_3 - x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 = 0.$$

Přesvědčte se, že bod $A = (-3, 1, -2, 1)$ je bod kvadriky $\mathbf{Q}$, a určete rovnici tečné nadroviny kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A.

Řešení. Přesvědčíme se, že souřadnice bodu A vyhovují rovnici kvadriky:

$$(-3)^2 + 2(-3)\,1 - 1^2 + 6\,.\,1(-2) - 4(-2)\,1 + 2\,.\,1^2 = 0$$

Podobně jako v předchozím příkladu určíme matici $\mathbf{F}$ polární bilineární formy f:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 3, & 0 \\ 0, & 3, & 0, & -2 \\ 1, & 0, & -2, & 2 \end{pmatrix}$$

Polární nadrovina bodu A vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$ (to je i tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A) má podle poznámky 4 z odstavce 4.1 rovnici

$$(-3, 1, -2, 1)\,\mathbf{F}(x_0, x_1, x_2, x_3)^T = 0$$

(symbolem T označujeme transponování matice). Po vynásobení matic dostáváme hledanou rovnici

$$-2x_0 - 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 0.$$

Příklad 3. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ v rovině $\overline{\mathbf{A}}{}_2^{\mathbf{C}}$ má v dané aritmetické bázi rovnici

$$-x_0^2 + 4x_0x_1 + 2x_0x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Napište rovnice jejích tečen procházejících bodem $A = (1, 0, 1)$.

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že $A \notin \mathbf{Q}$. Stejně jako v předchozích příkladech napíšeme matici $\mathbf{F}$ polární bilineární formy f:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -1, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & 0 \end{pmatrix}$$

Polární nadrovina a bodu A, nebo stručněji *polára* bodu A, má potom podle poznámky 4 z odstavce 4.1 rovnici

$$(1, 0, 1)\,\mathbf{F}(x_0, x_1, x_2)^T = 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Určíme průsečíky přímky a s kuželosečkou $\mathbf{Q}$. Bude-li T takový průsečík, bude konjugovaný s bodem A, protože leží na jeho poláře. Jestliže bod T není singulárním bodem kuželosečky $\mathbf{Q}$, musí tedy tečna kuželosečky $\mathbf{Q}$ v bodě T procházet bodem A (protože body A, T jsou konjugované). Poznamenejme ještě, že v rovině je podle

věty 4.4.5 tečna totéž co tečná nadrovina. Abychom určili průsečíky přímky a s kuželosečkou $\mathbf{Q}$, vyjádříme přímku a parametricky. Zvolíme dva libovolné body $B, C \in a$, např. $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, -1)$. Potom aritmetického zástupce $\mathbf{x}$ každého bodu $X \in \overleftrightarrow{BC}$ můžeme psát ve tvaru

(2) $$\mathbf{x} = r\mathbf{b} + s\mathbf{c},$$

kde $r, s \in \mathbf{C}$. K tomu, aby pro zvolený bod $X \in a$ platilo ještě $X \in \mathbf{Q}$, je nutné a stačí, aby $f_2(\mathbf{x}) = 0$, tj.

(3) $$f_2(r\mathbf{b} + s\mathbf{c}) = 0.$$

Rozepíšeme-li obdrženou rovnici pomocí polární bilineární formy f a použijeme vlastnosti z definice bilineární formy, snadno rovnici (3) upravíme na tvar

(4) $$r^2 f_2(\mathbf{b}) + 2rsf(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + s^2 f_2(\mathbf{c}) = 0.$$

Pomocí matice $\mathbf{F}$ dostaneme

$$f_2(\mathbf{b}) = (1, 0, 0)\,\mathbf{F}(1, 0, 0)^T = -1$$

a podobně $f(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1, f_2(\mathbf{c}) = 3$. Vidíme, že pro každé řešení $(r, s) \neq (0, 0)$ rovnice (4) je $s \neq 0$. Proto můžeme rovnici (4) vydělit číslem s^2:

(5) $$-\left(\frac{r}{s}\right)^2 + 2\frac{r}{s} + 3 = 0$$

Kvadratická rovnice pro r/s, kterou jsme obdrželi, má dva kořeny 3 a -1. Např. rovnicí $r/s = 3$ je dvojice (r, s) určena jednoznačně až na násobek a všechny tyto dvojice určují jediný bod – označme ho T_1. Podobně kořen -1 rovnice (5) určuje bod T_2. Bod T_1 můžeme tedy určit např. čísly $r = 3$, $s = 1$, bod T_2 čísly $r = -1$, $s = 1$. Aritmetické zástupce $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ bodů T_1, T_2 obdržíme dosazením do rovnosti (2):

$$\mathbf{t}_1 = 3(1, 0, 0) + 1(0, 1, -1) = (3, 1, -1),$$
$$\mathbf{t}_2 = (-1)(1, 0, 0) + 1(0, 1, -1) = (-1, 1, -1)$$

Tudíž hledané tečny kuželosečky $\mathbf{Q}$ procházející bodem A jsou přímky $\overleftrightarrow{AT_1}$, $\overleftrightarrow{AT_2}$, kde $T_1 = (3, 1, -1)$, $T_2 = (-1, 1, -1)$. Snadno lze též určit rovnice těchto přímek. Dostaneme

$$\overleftrightarrow{AT_1}: \quad x_0 - 4x_1 - x_2 = 0,$$
$$\overleftrightarrow{AT_2}: \quad x_0 + x_2 = 0.$$

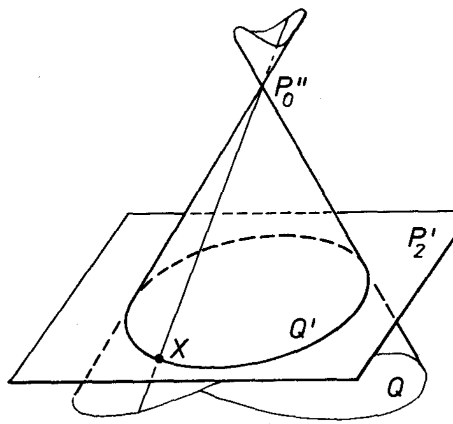
Definice 4.4.5. Kvadrika, jejímž vrcholem je prázdná množina, se nazývá *regulární*. Kvadrika, která není regulární, se nazývá *singulární*.

Příklady regulárních kvadrik jsou, jak se dále ukáže, známé kuželosečky – elipsa, parabola, hyperbola. Dále se ukáže, jak můžeme singulární kvadriky zkoumat pomocí regulárních kvadrik. Singulární kvadriky jsou podle definice 4.4.5 právě ty kvadriky, které mají neprázdný vrchol. Dříve než vyslovíme příslušnou větu, uvedeme ještě jedno tvrzení.

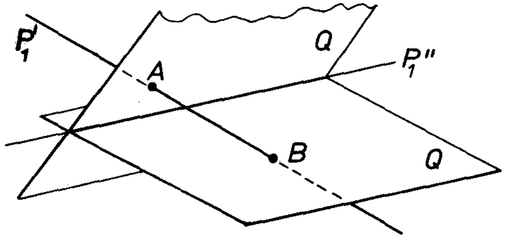
Mějme dány dva podprostory $\mathbf{P}'_r$, $\mathbf{P}''_s$ prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$. Přímo z definice 4.4.1 vyplývá, že je-li bod $Y \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ konjugován s každým bodem $X' \in \mathbf{P}'_r$ i s každým bodem $X'' \in \mathbf{P}''_s$ vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q} \subset \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$, je konjugován i s každým bodem $X \in \mathbf{P}'_r \vee \mathbf{P}''_s$.

Věta 4.4.6. Buď $\mathbf{Q}$ kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$, $\mathbf{P}''_r$ její vrchol a $\mathbf{P}'_s$ takový podprostor prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$, že $\mathbf{P}''_r \cap \mathbf{P}'_s = \emptyset$ a $\mathbf{P}''_r \vee \mathbf{P}'_s = \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$. Potom $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}'_s$ je regulární kvadrika v prostoru $\mathbf{P}'_s$ a

$$\mathbf{Q} = \bigcup_{X' \in \mathbf{Q}'} \mathbf{P}''_r \vee \{X'\}. \tag{6}$$



Obr. 42



Obr. 43

Názorný význam věty 4.4.6 můžeme sledovat na obr. 42 a obr. 43. Na obr. 42 je příklad kvadriky $\mathbf{Q}$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_3$, která má za vrchol bod P''_0. Věta 4.4.6 pak říká, že rovina $\mathbf{P}'_2$ neprocházející vrcholem protne kvadriku $\mathbf{Q}$ v regulární kuželosečce $\mathbf{Q}'$ a kvadriku $\mathbf{Q}$ dostaneme jako sjednocení všech přímek $\overline{P''_0X}$, kde bod X probíhá kuželosečku $\mathbf{Q}'$. Podobně na obr. 43 je nakreslen případ kvadriky $\mathbf{Q}$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_3$ o vrcholu $\mathbf{P}''_1$. Kvadrika $\mathbf{Q}$ je pak proťata přímkou $\mathbf{P}'_1$ mimoběžnou

s $\mathbf{P}''_1$. Potom $\mathbf{Q}' = \{A, B\}$ (viz věta 4.4.4) a kvadrika $\mathbf{Q}$ je tedy sjednocením dvou rovin $\varrho_A = \{A\} \vee \mathbf{P}''_1$ a $\varrho_B = \{B\} \vee \mathbf{P}''_1$.

Podotkněme ještě, že z předpokladů $\mathbf{P}''_r \cap \mathbf{P}'_s = \emptyset$ a $\mathbf{P}''_r \vee \mathbf{P}'_s = \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$ z věty 4.4.6 vyplývá podle věty 3.4.3, že $r + s = n - 1$. Tudíž dimenze s podprostoru $\mathbf{P}'_s$ je již určena dimenzí vrcholu $\mathbf{P}''_r$ kvadriky $\mathbf{Q}$.

Důkaz věty 4.4.6. Nejdříve ověříme, že kvadrika $\mathbf{Q}'$ je regulární. Důkaz provedeme sporem. Nechť bod Y je singulární bod kvadriky $\mathbf{Q}'$, tj. bod Y je konjugován s každým bodem $X' \in \mathbf{P}'_s$ vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}'$. Je-li kvadrika $\mathbf{Q}$ určena kvadratickou formou f_2 a je-li $\mathbf{W}'_{s+1}$ aritmetický základ podprostoru $\mathbf{P}'_s$, víme, že kvadrika $\mathbf{Q}'$ je určena kvadratickou formou $f'_2 = f_2 \mid \mathbf{W}'_{s+1}$. Tudíž bod Y je konjugován s každým bodem $X' \in \mathbf{P}'_s$ i vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$. Protože bod Y je též konjugován s každým bodem $X'' \in \mathbf{P}''_r$ ($\mathbf{P}''_r$ je vrchol kvadriky $\mathbf{Q}$), je, jak bylo konstatováno před větou 4.4.6, též konjugován s každým bodem $X \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$, a tudíž Y je singulární bod kvadriky $\mathbf{Q}$. Proto platí $Y \in \mathbf{P}''_r$, což je spor s předpokladem $\mathbf{P}''_r \cap \mathbf{P}'_s = \emptyset$. Zbývá dokázat rovnost (6). Z věty 4.4.3 vyplývá, že pro každý bod $X' \in \mathbf{Q}'$ je $\mathbf{P}''_r \vee \{X\} \subset \mathbf{Q}$. Odtud plyne, že

$$\mathbf{Q} \supset \bigcup_{X' \in \mathbf{Q}'} \mathbf{P}''_r \vee \{X'\}. \tag{7}$$

Nechť nyní $X \in \mathbf{Q}$ a $X \notin \mathbf{P}''_r$. Potom $\dim \mathbf{P}''_r \vee \{X\} = r + 1$ a z věty 3.4.3 snadno dokážeme, že $(\mathbf{P}''_r \vee \{X\}) \cap \mathbf{P}'_s \neq \emptyset$. Buď $Y' \in (\mathbf{P}''_r \vee \{X\}) \cap \mathbf{P}'_s$. Stejně jako u bodu X' plyne z věty 4.4.3, že $\mathbf{P}''_r \vee \{X\} \subset \mathbf{Q}$. Tudíž $Y' \in \mathbf{Q}'$ a zřejmě $\mathbf{P}''_r \vee \{X\} = \mathbf{P}''_r \vee \{Y'\}$. Proto $X \in \bigcup_{X' \in \mathbf{Q}'} \mathbf{P}''_r \vee \{X'\}$ a

$$\mathbf{Q} \subset \bigcup_{X' \in \mathbf{Q}'} \mathbf{P}''_r \vee \{X'\}. \tag{8}$$

Ze vztahů (7) a (8) vyplývá dokazovaná rovnost (6).

Všimněme si ještě zobrazení, které každému bodu $Y \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n$, který není singulárním bodem kvadriky $\mathbf{Q}$, přiřadí jeho polární nadrovinu vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$. Toto zobrazení se nazývá *polarita*. Označme $\mathbf{P}''_r$ vrchol kvadriky $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{M}$ množinu všech nadrovin prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n$. Polarita je tedy zobrazení množiny $\overline{\mathbf{A}}{}^C_n \setminus \mathbf{P}''_r$ do množiny $\mathbf{M}$. Zjistíme, kdy je toto zobrazení prosté. Dvěma bodům $Y, Z \in \overline{\mathbf{A}}{}^C_n \setminus \mathbf{P}''_r$ odpovídají nadroviny ϱ_Y a ϱ_z o rovnicích $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ a $f(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = 0$ (f_2 je kvadratická forma určující kvadriku $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{y}$, resp. $\mathbf{z}$ je aritmetický zástupce bodu Y, resp. Z). Platí $\varrho_Y = \varrho_z$ právě tehdy, existuje-li číslo $c \neq 0$, $c \in \mathbf{C}$ tak, že

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = cf(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tag{9}$$

pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{W}^C_{n+1}$. Rovnost (9) je zřejmě ekvivalentní rovnosti $f(\mathbf{z} - c\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$. Tudíž vektor $\mathbf{u} = \mathbf{z} - c\mathbf{y}$ určuje bod U z vrcholu kvadriky. Odtud již snadno vyplývá věta 4.4.7.

Věta 4.4.7. Dvěma bodům Y, Z neležícím ve vrcholu $\mathbf{P}_r''$ kvadriky $\mathbf{Q}$ je přiřazena stejná polární nadrovina právě tehdy, je-li přímka YZ různoběžná s vrcholem $\mathbf{P}_r''$.

Je zřejmé, že polární nadrovina každého bodu obsahuje vrchol kvadriky $\mathbf{Q}$. Odtud vyplývá, že je-li kvadrika $\mathbf{Q}$ singulární, polarita nezobrazí množinu $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}} \setminus \mathbf{P}_r''$ na množinu $\mathbf{M}$. Nechť tedy nyní je kvadrika $\mathbf{Q}$ regulární. Zvolme bázi $\mathscr{B}$ prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathrm{C}}$. Je-li v této bázi $Y = (y_0, \ldots, y_n)$, polární nadrovina bodu Y má rovnici

$$\sum_{i,j=0}^{n} f_{ij} y_i x_j = 0$$

nebo, což je totéž,

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} f_{ij} y_i \right) x_j = 0.$$

Buď nyní $\varrho \in \mathbf{M}$ libovolná nadrovina. Nechť

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_j = 0$$

je její rovnice. K tomu, aby ϱ byla polární nadrovina bodu Y, zřejmě stačí, aby platilo

$$(10) \qquad \sum_{i=0}^{n} f_{ij} y_i = a_j, \qquad j = 0, \ldots, n.$$

Zapíšeme-li rovnosti (10) v maticovém tvaru, dostaneme

$$(11) \qquad (y_0, \ldots, y_n)\, \mathbf{F} = (a_0, \ldots, a_n),$$

kde $\mathbf{F}$ je matice bilineární formy f. Máme-li nadrovinu ϱ, určíme snadno bod Y z rovnice (11)

$$(12) \qquad (y_0, \ldots, y_n) = (a_0, \ldots, a_n)\, \mathbf{F}^{-1}.$$

Tudíž platí následující věta.

Věta 4.4.8. Je-li $\mathbf{Q}$ regulární kvadrika, je polarita vzhledem ke kvadrice $\mathbf{Q}$ vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ na množinu $\mathbf{M}$ všech nadrovin tohoto prostoru.

Důkaz. Že polarita je zobrazení prosté, plyne z věty 4.4.7, že je to zobrazení na $\mathbf{M}$, vyplývá z rovnosti (12).

To, že v případě regulární kvadriky $\mathbf{Q}$ je polarita zobrazení na $\mathbf{M}$, jsme mohli snadno dokázat též přímo bez použití soustavy souřadnic. Právě tak obráceně větu 4.4.7 lze dokázat ze vztahu (11).

Cvičení

1. V prostoru $\overline{\mathbf{A}_3^{\mathrm{C}}}$ je dána kvadrika rovnicí
   a) $x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$,
   b) $x_0^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_0x_3 = 0$,
   c) $x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 2x_3^2 = 0$.
   Určete její vrchol $\mathbf{P}'$.
2. Ověřte, že bod $A = (4, 4, -4, -1)$ leží na kvadrice $\mathbf{Q}$: $x_0^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_3 + 2x_2^2 = 0$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}_3^{\mathrm{C}}}$ a určete rovnici tečné nadroviny kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A.
3. V rovině $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ napište rovnice tečen t_1, t_2 vedených z bodu $A = (0, 1, -1)$ ke kuželosečce $2x_0^2 - 2x_1x_2 - x_1^2 - 4x_2x_0 + 3x_2^2 = 0$. Na tečnách t_1, t_2 určete body dotyku T_1, T_2.
4. V prostoru $\overline{\mathbf{A}_3^{\mathrm{C}}}$ je dána kvadrika $\mathbf{Q}$ rovnicí $-x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 = 0$. Určete rovnice tečných rovin τ_1, τ_2 kvadriky $\mathbf{Q}$ procházejících přímkou PQ, kde $P = (-3, 1, -2, -4)$, $Q = (22, 0, 7, 34)$. V tečných rovinách τ_1, τ_2 nalezněte body dotyku T_1, T_2.

4.5 Afinní vlastnosti kvadrik

V tomto odstavci si budeme všímat souvislostí mezi teorií kuželoseček a kvadratických ploch vyloženou v kapitole 3 v [G] a teorií kvadrik, kterou se zabýváme nyní.

Mějme tedy v reálné afinní rovině $\mathbf{A}_2$ zvolenu lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}$ danou repérem $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$. Nechť v této lineární soustavě souřadnic je kuželosečka k daná rovnicí

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

tj. bod $X = [x, y]$ leží na kuželosečce k právě tehdy, je-li splněna rovnice (1). Utvoříme komplexní rozšíření $\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ roviny $\mathbf{A}_2$ a projektivní rozšíření $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ afinní roviny $\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$. V aritmetické bázi $\mathscr{B} = \langle (1, P), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ má každý bod $X \in \mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ homogenní souřadnice x_0, x_1, x_2, přičemž $x_0 \neq 0$. Potom jeho lineární souřadnice jsou $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$. Tudíž $X \in k$ právě tehdy, když

$$a(x_1/x_0)^2 + 2b(x_1/x_0)(x_2/x_0) + c(x_2/x_0)^2 + 2d(x_1/x_0) + 2e(x_2/x_0) + f = 0.$$

Po vynásobení výsledné rovnice číslem x_0^2 dostaneme

$$(2) \qquad ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_0 + 2ex_2x_0 + fx_0^2 = 0.$$

Ukázali jsme, jak z rovnice (1) můžeme dostat rovnici (2). Snadno uděláme obrácený postup. Nejdříve si uvědomíme, že má-li bod $X \in \mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ souřadnice x, y v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, má homogenní souřadnice $1, x, y$ v aritmetické bázi $\mathscr{B}$. Je-li tedy kuželosečka $\bar{k}$ dána v rovině $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ rovnicí (2), dostaneme rovnici (1) kuželosečky $k \cap \mathbf{A}_2^{\mathbf{C}}$ (kuželosečka v $\mathbf{A}_2^{\mathbf{C}}$) tak, že do rovnice (2) místo trojice (x_0, x_1, x_2) dosadíme trojici $(1, x, y)$. Stejný postup bychom zřejmě mohli provést v afinním prostoru libovolné dimenze a v jeho projektivním rozšíření. Speciálně z rovnice kvadratické plochy v prostoru $\mathbf{A}_3$ nebo $\mathbf{E}_3$ uvedené v kapitole 3 v [G] dostaneme uvedeným postupem rovnici kvadriky v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_3^{\mathbf{C}}$ a obráceně.

V prostoru $\overline{\mathbf{A}}_3^{\mathbf{C}}$ jsme zjišťovali, do jaké míry je rovnice kvadriky určena touto kvadrikou (věta 4.3.1). Stejnou otázku si položíme i v prostoru $\mathbf{A}_n$. Již v úvodu kapitoly 3 jsme zjistili, že v reálném prostoru dvě rovnice téže kvadriky spolu nemusí téměř vůbec souviset (např. rovnice kuželoseček $x^2 + y^2 = 0$ a $3x^2 + 2y^2 = 0$). Tímto zjištěním jsme motivovali zavedení komplexního rozšíření afinního prostoru. Proto i nadále budeme pracovat v prostoru $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$. Protože od rovnice (1) můžeme přejít k rovnici (2) a obráceně od rovnice (2) zase k rovnici (1), stačí zjišťovat, do jaké míry je rovnice (2) určena jen vlastními body kvadriky v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$.

Věta 4.5.1. Nechť kvadratická forma f_2, resp. f'_2 na vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}}$ určuje kvadriku $\mathbf{Q}$, resp. $\mathbf{Q}'$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$. Nechť pro nevlastní nadrovinu v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ platí $v \not\subset \mathbf{Q}$ a $v \not\subset \mathbf{Q}'$ a nechť $\mathbf{Q} \cap \mathbf{A}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}' \cap \mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$. Potom existuje nenulové číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že $f'_2 = cf_2$.

Důkaz. Protože $v \not\subset \mathbf{Q}$, resp. $v \not\subset \mathbf{Q}'$, existuje bod $B \in v$, resp. $B' \in v$ tak, že $B \notin \mathbf{Q}$, resp. $B' \notin \mathbf{Q}'$. Podle věty 4.4.4 má přímka $\overleftrightarrow{BB'}$ s každou z kvadrik $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$ společné nejvýše dva body. Tudíž existuje bod $A \in \overleftrightarrow{BB'}$ tak, že $A \notin \mathbf{Q}$ i $A \notin \mathbf{Q}'$. Dále postupujeme jako při důkazu věty 4.3.1. Pro aritmetického zástupce $\boldsymbol{a}$ bodu A platí $f_2(\boldsymbol{a}) \neq 0$ i $f'_2(\boldsymbol{a}) \neq 0$. Označme $c = f'_2(\boldsymbol{a})/f_2(\boldsymbol{a})$. Buď $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$ ($\mathbf{V}_n$ je zaměření afinního prostoru $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$, a tudíž i aritmetický základ nevlastní nadroviny v). Jako při důkazu věty 4.3.1 položme $\mathbf{x} = t\boldsymbol{a} + \mathbf{y}$ a dosaďme do kvadratických forem f_2 a f'_2. Pro průsečíky přímky $\overleftrightarrow{AY}$ s kvadrikou $\mathbf{Q}$, resp. $\mathbf{Q}'$ dostaneme rovnice

$$t^2 f_2(\boldsymbol{a}) + 2tf(\boldsymbol{a}, \mathbf{y}) + f_2(\mathbf{y}) = 0, \tag{3}$$

resp.

$$t^2 f'_2(\boldsymbol{a}) + 2tf'(\boldsymbol{a}, \mathbf{y}) + f'_2(\mathbf{y}) = 0. \tag{4}$$

Protože $A \notin \mathbf{Q}$ i $A \notin \mathbf{Q}'$ a $\overleftrightarrow{AY} \cap v = \{A\}$, leží průsečíky přímky AY s oběma kvadrikami v prostoru $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$, a tudíž $\overleftrightarrow{AY} \cap \mathbf{Q} = \overleftrightarrow{AY} \cap \mathbf{Q}'$ (platí $\mathbf{Q} \cap \mathbf{A}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}' \cap \mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$). Rovnice (3) a (4) mají proto stejné kořeny a jedna je nenulovým násobkem druhé. Proto platí i $f'_2(\mathbf{y}) = cf_2(\mathbf{y})$. Zbývá dokázat, že platí $f'_2(\mathbf{x}) = cf_2(\mathbf{x})$ i pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$. Vektor $\mathbf{x}$ můžeme psát ve tvaru $\mathbf{x} = C - D$, kde $C, D \in \mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$, a tedy $\mathbf{x} = (1, C) - (1, D)$, kde $(1, C), (1, D) \in \mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}}$. Označme $\mathbf{c} = (1, C)$, $\mathbf{d} = (1, D)$. Podobně jako u vzorce (1) z odstavce 4.2 platí

$$f_2(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = f_2(\mathbf{c}) - 2f(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + f_2(\mathbf{d}),$$
$$f_2(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = f_2(\mathbf{c}) + 2f(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + f_2(\mathbf{d}).$$

Sečtením obou rovností a jednoduchou úpravou dostaneme

$$f_2(\mathbf{x}) = 2f_2(\mathbf{c}) + 2f_2(\mathbf{d}) - f_2(\mathbf{c} + \mathbf{d}).$$

Vidíme, že $\mathbf{c} + \mathbf{d} = (1, C) + (1, D) = (2, \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D) \in \mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$. Vyjádříme-li stejným způsobem i hodnotu $f'_2(\mathbf{x})$ a použijeme-li rovnost $f'_2(\mathbf{y}) = cf_2(\mathbf{y})$ (platí pro každý vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}} \setminus \mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$), dostaneme i rovnost $f'_2(\mathbf{x}) = cf_2(\mathbf{x})$. Tím je věta dokázána.

Všimněme si nyní kvadrik obsahujících nevlastní nadrovinu v. Nechť pro kvadriku $\mathbf{Q}$ platí $v \subset \mathbf{Q}$. V afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ zvolíme repér $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$. Ten určuje bázi $\mathscr{B} = \langle (1, P), \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}}$. Protože $v \subset \mathbf{Q}$, musí být kvadratická forma f_2 určující kvadriku $\mathbf{Q}$ nulová na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n^{\mathbf{C}}$. Tudíž i $f(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = 0$ pro $i, j = 1, \ldots, n$ a rovnice kvadriky $\mathbf{Q}$ má nyní tvar (viz (1) z odstavce 4.3)

$$f_{00}x_0^2 + 2f_{01}x_0x_1 + \ldots + 2f_{0n}x_0x_n = 0 \tag{5}$$

neboli

$$x_0(f_{00}x_0 + 2f_{01}x_1 + \ldots + 2f_{0n}x_n) = 0.$$

Vidíme, že kvadrika $\mathbf{Q}$ se v tomto případě skládá z nevlastní nadroviny v a z další nadroviny o rovnici

$$f_{00}x_0 + 2f_{01}x_1 + \ldots + 2f_{0n}x_n = 0.$$

Buď nyní $\mathbf{Q}'$ kvadrika o rovnici

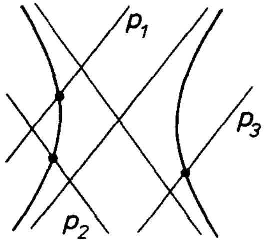
$$(f_{00}x_0 + 2f_{01}x_1 + \ldots + 2f_{0n}x_n)^2 = 0.$$

Zřejmě rovnice kvadriky $\mathbf{Q}'$ není násobkem rovnice kvadriky $\mathbf{Q}$. Přesto však platí $\mathbf{Q} \cap \mathbf{A}_n^{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}' \cap \mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$. Předpoklad $v \not\subset \mathbf{Q}$ a $v \not\subset \mathbf{Q}'$, který jsme udělali ve větě 4.5.1, tedy nelze vynechat. Kdybychom se v rovnici (5) omezili jen na body z prostoru $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$, mohli bychom přejít k lineárním souřadnicím, stejně jako jsme přešli od rovnice (4) k rovnici (3). V tom případě bychom rovnici (5) vydělili x_0^2 a za x_i/x_0 ($i = 1, \ldots, n$) bychom dosadili lineární souřadnice. Zřejmě bychom dostali rovnici nadroviny – rovnice tvaru $\bar{f}(X) = 0$, kde $\bar{f}$ je lineární funkce na prostoru $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$. Uděláme následující úmluvu.

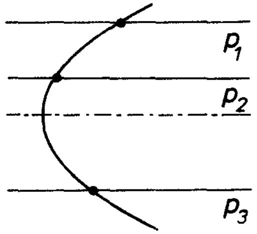
Úmluva. Nadále budeme předpokládat, že pokud nadrovinu afinního prostoru $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$ bereme jako kvadriku, tak v případě, že tato nadrovina má rovnici $\bar{f}(X) = 0$ ($\bar{f}$ je lineární funkce na $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$), určujeme tutéž nadrovinu jako kvadriku rovnicí $(\bar{f}(X))^2 = 0$.

Právě učiněná úmluva znamená, že např. u kuželoseček daných rovnicí (1) vylučujeme ty rovnice, ve kterých je $a = b = c = 0$. Nyní zřejmě platí následující tvrzení.

Důsledek věty 4.5.1. Při provedené úmluvě je rovnice (1) kuželosečky k v afinní rovině $\mathbf{A}_2^{\mathbf{C}}$ určena touto kuželosečkou jednoznačně až na nenulový násobek. Analogické tvrzení bychom mohli vyslovit i pro kvadratické plochy v prostoru $\mathbf{A}_3^{\mathbf{C}}$.



Obr. 44a



Obr. 44b

Nadále budeme opět pracovat s kvadrikami v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}}$, protože z věty 4.5.1 a jejího důsledku je zřejmé, jakým způsobem můžeme přejít např. od kuželosečky v rovině $\mathbf{A}_2^{\mathbf{C}}$ ke kuželosečce v projektivním rozšíření $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathbf{C}}}$ afinní roviny $\mathbf{A}_2^{\mathbf{C}}$. Použití nevlastních bodů přináší značné výhody. Např. v afinní rovině se obtížně definují tečny kuželosečky. Nelze je totiž definovat, na rozdíl od kuželoseček v rovině $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathbf{C}}}$, jako přímky mající s kuželosečkou právě jeden společný bod. U hyperboly totiž vadí rovnoběžky s asymptotami, u paraboly rovnoběžky s osou (obr. 44a, b — přímky p_1, p_2, p_3). Všimněme, si jak je tato nesnáz odstraněna v projektivním rozšíření afinního prostoru, např. u hyperboly. Hyperbola má ve vhodně zvolené soustavě souřadnic rovnici

(6) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

její asymptoty mají rovnice

(7) $$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

a rovnice přímek rovnoběžných s asymptotami jsou

(8) $$y = \frac{b}{a}x + q, \qquad y = -\frac{b}{a}x + q,$$

kde $q \in \mathbf{C}$. Přejdeme-li od rovnice (6) k rovnici v homogenních souřadnicích tak, jak jsme to udělali na počátku odstavce, dostaneme rovnici hyperboly ve tvaru

(9) $$-x_0^2 + x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 0$$

a rovnici přímky rovnoběžné s asymptotou (viz (8)) např. ve tvaru

(10) $$qx_0 + (b/a)\,x_1 - x_2 = 0.$$

Budeme-li počítat průsečíky kuželosečky (9) s přímkou (10), vyjádříme přímku (10) parametricky, např. pomocí bodů $C = (1, 0, q)$, $D = (0, a, b)$,

(11) $$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{c} + s\boldsymbol{d}.$$

Přitom $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ jsou po řadě aritmetičtí zástupci bodů X, C, D. Rozepíšeme-li (11) v souřadnicích, dostaneme

$$x_0 = r, \quad x_1 = as, \quad x_2 = qr + bs.$$

Dosadíme-li odtud do rovnice (9), dostáváme po jednoduché úpravě

$$-r^2 - r^2q^2/b^2 - 2rsq/b = 0.$$

Z této rovnice vyplývá, že musí být $r = 0$, a tedy $X = D$, nebo $r(1 + q^2/b^2) + 2sq/b = 0$. Tuto rovnici řeší dvojice čísel $r = 2bq$, $s = -(b^2 + q^2)$ a její násobky. Dostáváme druhý průsečík

$$\boldsymbol{x} = 2bq\boldsymbol{c} - (b^2 + q^2)\,\boldsymbol{d}, \quad X = (2bq, \; -a(b^2 + q^2), \; b(q^2 - b^2)).$$

Vidíme, že rovnoběžky s asymptotou protínají kuželosečku kromě bodů vyznačených na obr. 44a ještě v nevlastním bodě D. Dále vidíme, že asymptota $y = xb/a$ (přímka (10) pro $q = 0$) je vlastně tečna s bodem dotyku D. Podobně bychom zjistili, že i rovnoběžky s osou paraboly mají s parabolou kromě bodů vyznačených na obr. 44b společný ještě nevlastní bod.

V následujícím příkladu použijeme postup známý již z příkladu 3 z odstavce 4.4.

Příklad 1. V afinní rovině $\mathbf{A}_2$ máme dánu kuželosečku (v dané lineární soustavě souřadnic) rovnicí

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$$

Určete tečny této kuželosečky tak, aby jejich zaměření obsahovalo vektor $\boldsymbol{u} = (3, 2)$.

Řešení. Obvyklým způsobem napíšeme rovnici kuželosečky v homogenních souřadnicích

$$-3x_0^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0.$$

Vektor $\boldsymbol{u}$ je aritmetickým zástupcem nevlastního bodu $U = (0, 3, 2)$, a máme tedy určit tečny dané kuželosečky procházející bodem U. Postupujeme stejně jako v příkladu 3 z odstavce 4.4. Určíme matici $\boldsymbol{F}$ kuželosečky

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -3, & -1, & 2 \\ -1, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyní napíšeme rovnici poláry bodu U

$$(0, 3, 2)\, \mathbf{F}(x_0, x_1, x_2)^T = 0,$$

tj.

$$-7x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0.$$

Vypočítáme průsečíky poláry bodu U s kuželosečkou (např. tak, že přímku vyjádříme parametricky, pomocí dvou jejích bodů, a dosadíme do rovnice kuželosečky). Dostaneme body $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, -1, 0)$. Přejdeme-li zpět od homogenních souřadnic k lineárním, obdržíme $A = [2, -1]$, $B = [-1, 0]$. Nyní zbývá napsat rovnice přímek určených buď bodem A, nebo B a zaměřením $[\{\mathbf{u}\}]$:

$$2x - 3y - 7 = 0, \quad 2x - 3y + 2 = 0$$

Rovnice hledaných přímek, tečen vedených ke kuželosečce z bodu U, jsme mohli též dostat jako rovnice polár bodů A a B.

Nyní budeme pomocí polárních vlastností definovat známé pojmy — střed, asymptoty atd. Potom se přesvědčíme, že nově zavedené pojmy odpovídají běžným představám.

Definice 4.5.1. Buď $\mathbf{Q}$ kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^C$. Bod $S \in \mathbf{A}_n^C$ se nazývá *střed* kvadriky $\mathbf{Q}$, je-li konjugován s každým nevlastním bodem prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^C$. Nevlastní bod (tj. směr) kvadriky $\mathbf{Q}$ se nazývá *asymptotický směr* kvadriky $\mathbf{Q}$. Vlastní tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$ s nevlastním bodem dotyku se nazývá *asymptotická nadrovina* kvadriky $\mathbf{Q}$. Vlastní nadrovina ϱ, jejíž každý bod je konjugován s nevlastním bodem $U \notin \varrho$, se nazývá *průměrová nadrovina sdružená se směrem* U. Jestliže $n = 2$, nazývá se asymptotická nadrovina *asymptota* a průměrová nadrovina *průměr*. Průměry, z nichž každý je sdružený se směrem druhého, se nazývají *sdružené průměry* kuželosečky.

Předpokládejme, že na přímce $\mathbf{A}_1^C$ máme dánu kvadriku $\mathbf{Q}$. Nechť na této přímce je zvolen repér $\langle P; \mathbf{u}\rangle$. V lineární soustavě souřadnic určené tímto repérem můžeme psát rovnici kvadriky ve tvaru

$$(12) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a \neq 0$. Ke každému bodu $X \in \mathbf{A}_1^C$ můžeme najít bod X' středově souměrný podle bodu P, tj. takový bod X', že bod P je středem dvojice (X, X'). Je-li v dané lineární soustavě souřadnic $X = [x]$, zřejmě $X' = [-x]$. Kvadrika $\mathbf{Q}$ je středově souměrná podle bodu P, jestliže $X \in \mathbf{Q}$ právě tehdy, když $X' \in \mathbf{Q}$, tj. platí-li rovnost (12) právě tehdy, platí-li rovnost

$$(13) \qquad a(-x)^2 + b(-x) + c = 0.$$

To platí právě tehdy, určují-li rovnice (12) a (13) stejnou kvadriku, což platí právě tehdy, je-li $b = 0$. Napíšeme rovnici kvadriky $\mathbf{Q}$ v homogenních souřadnicích v aritmetické bázi $(1, P), \mathbf{u}$:

$$cx_0^2 + bx_0x_1 + ax_1^2 = 0$$

Potom $b = 2f((1, P), \mathbf{u})$ (viz (2) z odstavce 4.2 a (2) z odstavce 4.3). Odtud vyplývá následující věta.

Věta 4.5.2. Kvadrika $\mathbf{Q}$ na přímce $\mathbf{A}_1^C$ je středově souměrná podle bodu $P \in \mathbf{A}_1^C$ právě tehdy, jsou-li body P a U (nevlastní bod přímky $\overline{\mathbf{A}}_1^C$) spolu konjugované.

Věta 4.5.3. Buď $\mathbf{Q}$ kvadrika v afinním prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^C$. Potom bod S je středem kvadriky $\mathbf{Q}$ právě tehdy, je-li množina $\mathbf{Q} \cap \mathbf{A}_n^C$ středově souměrná podle bodu S.

Důkaz. Tvrzení věty dostaneme, použijeme-li větu 4.5.2 na průnik kvadriky $\mathbf{Q}$ s každou přímkou procházející bodem S a neležící na $\mathbf{Q}$. Přímky ležící na $\mathbf{Q}$ a procházející bodem S jsou zřejmě podle bodu S souměrné a každé dva body takové přímky jsou konjugované.

Poznámka 1. Je zřejmé, že každý střed kvadriky leží v každé její průměrové nadrovině i v každé její asymptotické nadrovině.

Zavedeme si ještě jedno označení. Kvadrika, resp. kuželosečka, ke které existuje střed, se nazývá *středová kvadrika*; resp. kuželosečka. Kvadrika, resp. kuželosečka, která není středová, se nazývá *nestředová kvadrika*, resp. kuželosečka.

Poznámka 2. Řada pojmů, které jsme zavedli nebo které ještě zavedeme, byla již definována v kapitole 3 v [G]. Podobné tvrzení lze vyslovit i o větách, které uvádíme. To, že definice pojmů a věty uvádíme ještě jednou, má tři důvody: Za prvé je to vhodné z důvodu celistvosti výkladu, za druhé ukazujeme, že můžeme pracovat v afinním prostoru a nepotřebujeme vždy euklidovský prostor jako v kapitole 3 v [G] a za třetí tím, že používáme zavedený aparát (bilineární a kvadratické formy a nevlastní body), můžeme většinou formulovat pojmy a dokazovat věty podstatně snadněji než v kapitole 3 v [G].

Ukážeme si nyní postup výpočtu středu kvadriky. Předpokládejme, že kvadrika $\mathbf{Q}$ je dána rovnicí v aritmetické bázi $\mathscr{B}$ určené repérem $\mathscr{R}$ afinního prostoru $\mathbf{A}_n^C$. Nechť je to rovnice

$$\sum_{i,j=0}^{n} f_{ij}x_ix_j = 0.$$

Body Y a X jsou konjugované, právě když

$$(14) \qquad \sum_{i,j=0}^{n} f_{ij}x_iy_j = 0,$$

kde $X = (x_0, \dots, x_n)$, $Y = (y_0, \dots, y_n)$. Hledáme všechny body Y, které jsou konjugované s každým nevlastním bodem X, tj. s každým bodem X, pro který platí $x_0 = 0$. Z rovnice (14) dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=0}^{n} f_{ij} y_j \Big) = 0.$$

Tato rovnice platí pro všechna čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{C}$, a proto koeficienty u všech x_i ($i = 1, \dots, n$) musí být nulové:

$$\begin{aligned} f_{10}y_0 + f_{11}y_1 + \dots + f_{1n}y_n &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n0}y_0 + f_{n1}y_1 + \dots + f_{nn}y_n &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Souřadnice každého středu jsou tedy řešením soustavy (15). Obráceně každé řešení $(y_0, \dots, y_n)$ soustavy (15), pro které je $y_0 \neq 0$ (střed musí být vlastní bod), jsou souřadnice nějakého středu. Vidíme, že soustava (15) je soustava n rovnic o $n + 1$ neznámých a má tedy vždy alespoň jedno řešení. Všechna řešení soustavy (15) tvoří podprostor prostoru $\mathbf{W}^{\mathbf{C}}_{n+1}$, a tudíž množina všech středů je buď množina prázdná, nebo podprostor prostoru $\overline{\mathbf{A}}{}^{\mathbf{C}}_n$.

Věta 4.5.4. Jsou-li rovnice soustavy (15) lineárně nezávislé, tvoří množinu všech řešení soustavy (15) $(n + 1)$-tice $(F_{00}, \dots, F_{0n})$ a všechny její násobky. Přitom F_{ij} je pro $i, j = 0, \dots, n$ doplněk prvku f_{ij} v matici kvadriky $\mathbf{Q}$. Obráceně platí: Je-li alespoň jedno z čísel $F_{00}, \dots, F_{0n}$ nenulové, jsou rovnice soustavy (15) lineárně nezávislé. Dále platí: Jsou-li rovnice soustavy (15) lineárně nezávislé, má kvadrika $\mathbf{Q}$ střed právě tehdy, je-li $F_{00} \neq 0$.

Důkaz. Protože jde o soustavu n lineárně nezávislých rovnic o $n + 1$ neznámých, tvoří všechna řešení této soustavy vektorový prostor dimenze 1. Přitom $F_{00}, \dots, F_{0n}$ jsou až na znaménko všechny subdeterminanty řádu n z matice soustavy. Alespoň jeden z nich musí tedy být nenulový. Proto stačí dokázat, že $(n + 1)$-tice $(F_{00}, \dots, F_{0n})$ řeší každou rovnici soustavy (15). O tom se však přesvědčíme dosazením. Použijeme-li rozvoj determinantu podle prvního řádku, dostaneme, že pro každé $i = 0, \dots, n$ platí

$$f_{i0}F_{00} + f_{i1}F_{01} + \dots + f_{in}F_{0n} = \begin{vmatrix} f_{i0}, & f_{i1}, & \dots, & f_{in} \\ f_{10}, & f_{11}, & \dots, & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n0}, & f_{n1}, & \dots, & f_{nn} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

(Protože matice, z níž determinant počítáme, má až na první řádek všechny řádky stejné jako matice kvadriky $\mathbf{Q}$, jsou doplňky prvků v prvním řádku v obou

maticích stejné.) Vidíme, že pro $i = 1, \dots, n$ má determinant na pravé straně rovnosti (16) dva řádky stejné, a proto je roven nule. Tím je tvrzení dokázáno.

Položíme-li v rovnosti (16) $i = 0$, dostaneme samozřejmý vztah

$$f_{00}F_{00} + \dots + f_{0n}F_{0n} = F,$$

kde F je determinant matice kvadriky. Tuto rovnost spolu s rovnostmi plynoucími z věty 4.5.4 můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{j=0}^{n} f_{ij}F_{0j} = F\delta^i_0, \qquad i = 0, \dots, n. \tag{17}$$

Přitom δ^i_0 je Kroneckerův symbol, tj. $\delta^0_0 = 1$ a $\delta^i_0 = 0$ pro $i \neq 0$. Zbývající tvrzení jsou zřejmá, vyplývají z provedeného rozboru výpočtu středu kvadriky.

Příklad 2. V afinní rovině $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}_2$ je v dané lineární soustavě souřadnic dána kuželosečka $\mathbf{Q}$ rovnicí

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 4x + y - 1 = 0.$$

Určete její střed.

Řešení. Rovnici kuželosečky přepíšeme do homogenních souřadnic v příslušné aritmetické bázi:

$$-x_0^2 - 4x_0x_1 + x_0x_2 + 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

Napíšeme matici $\mathbf{F}$ kuželosečky $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -1, & -2, & 1/2 \\ -2, & 3, & -1 \\ 1/2, & -1, & 1 \end{pmatrix}$$

Zřejmě jsou splněny předpoklady věty 4.5.4 a střed S je

$$S = \left(\begin{vmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 1 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} -2, & -1 \\ 1/2, & 1 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} -2, & 3 \\ 1/2, & -1 \end{vmatrix} \right),$$

a tedy $S = (2, 3/2, 1/2)$ a v lineární soustavě souřadnic $S = [3/4, 1/4]$.

Práci s pojmy asymptota, střed, průměr si ještě ukážeme na dalších příkladech.

Příklad 3. V rovině $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}_2$ v dané lineární soustavě souřadnic je dána kuželosečka $\mathbf{Q}$ rovnicí

a) $x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x + 1 = 0$;

b) $5x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

Napište rovnice asymptot kuželosečky $\mathbf{Q}$.

Řešení. a) Rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ přepíšeme do homogenních souřadnic v příslušné aritmetické bázi:

$$x_1^2 - 5x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_0x_1 + x_0^2 = 0$$

Určíme průsečíky s nevlastní přímkou $x_0 = 0$. Rovnice pro průsečíky je

$$x_1^2 - 5x_1x_2 + 6x_2^2 = 0.$$

Protože pro řešení této rovnice je $x_2 \neq 0$, můžeme zvolit $x_2 = 1$ a vypočítat x_1. Dostaneme dva kořeny kvadratické rovnice – čísla 2, 3. Hledané průsečíky jsou body $A = (0, 2, 1)$, $B = (0, 3, 1)$. Asymptoty dostaneme jako poláry těchto bodů (viz příklad 1). Dostaneme přímky o rovnicích

$$\begin{aligned} 4x_0 + x_1 - 2x_2 &= 0, \\ -6x_0 + x_1 - 3x_2 &= 0. \end{aligned}$$

V lineárních souřadnicích mají asymptoty rovnice:

$$\begin{aligned} x - 2y + 4 &= 0, \\ x - 3y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

b) Příklad řešíme analogicky s příkladem a. Průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou jsou body $A = (0, 1, 2 + \mathrm{i})$, $B = (0, 1, 2 - \mathrm{i})$. Asymptoty jsou přímky o rovnicích:

$$\begin{aligned} (1 - 2\mathrm{i})\,x + \mathrm{i}y + 3 + 2\mathrm{i} &= 0, \\ (1 + 2\mathrm{i})\,x - \mathrm{i}y + 3 - 2\mathrm{i} &= 0 \end{aligned}$$

Příklad 4. Napište rovnici kuželosečky v rovině $\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$, je-li v lineární soustavě souřadnic dáno: Přímka p o rovnici

$$x - 2y + 1 = 0$$

je průměr sdružený se směrem určeným vektorem $\boldsymbol{u} = (1, 1)$. Přímka t o rovnici $x + y = 0$ je tečna kuželosečky s bodem dotyku $T = [1, -1]$. Vektor $\boldsymbol{a} = (1, 0)$ určuje směr asymptoty.

Řešení. Zadání přepíšeme do homogenních souřadnic:

$$\begin{aligned} p&: x_0 + x_1 - 2x_2 = 0, \\ t&: \quad\;\; x_1 + \;\, x_2 = 0, \end{aligned}$$

$U = (0, 1, 1)$, $T = (1, 1, -1)$, $A = (0, 1, 0)$ (U, A jsou nevlastní body s aritmetickými zástupci po řadě $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{a}$). Napíšeme matici obecné rovnice kuželosečky (koeficienty v rovnici jsou proměnné):

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{00}, & f_{01}, & f_{02} \\ f_{10}, & f_{11}, & f_{12} \\ f_{20}, & f_{21}, & f_{22} \end{pmatrix}$$

Pomocí operací s maticemi určíme množinu všech bodů konjugovaných s bodem U (postup viz příklad 1). Bod $X = (x_0, x_1, x_2)$ je konjugovaný s bodem U, právě když platí:

$$(f_{01} + f_{02})\,x_0 + (f_{11} + f_{12})\,x_1 + (f_{21} + f_{22})\,x_2 = 0$$

Každý bod přímky p je řešením této rovnice. Musí tudíž existovat číslo $c \in \mathbf{C}$ tak, že pro každý bod X platí:

$$\begin{aligned} &(f_{01} + f_{02})\,x_0 + (f_{11} + f_{12})\,x_1 + (f_{21} + f_{22})\,x_2 = \\ &= c(x_0 + x_1 - 2x_2) \end{aligned}$$

Dostaneme rovnice

$$f_{01} + f_{02} = c, \quad f_{11} + f_{12} = c, \; f_{21} + f_{22} = -2c.$$

Stejným způsobem určíme množinu všech bodů konjugovaných s bodem T:

$$\begin{aligned} &(f_{00} + f_{01} - f_{02})\,x_0 + (f_{10} + f_{11} - f_{12})\,x_1 + \\ &+ (f_{20} + f_{21} - f_{22})\,x_2 = 0 \end{aligned}$$

Srovnáním s rovnicí přímky t dostaneme rovnice pro koeficienty f_{ij}, $i, j = 0, 1, 2$:

$$f_{00} + f_{01} - f_{02} = 0, \quad f_{10} + f_{11} - f_{12} = d, \quad f_{20} + f_{21} - f_{22} = d$$

Směr asymptoty je její nevlastní bod, a tudíž je to i bod kuželosečky. Dosadíme-li jeho souřadnice do rovnice kuželosečky, dostaneme rovnici $f_{11} = 0$. Vyřešíme-li soustavu homogenních rovnic – sedm rovnic o neznámých $f_{00}, f_{01}, f_{02}, f_{11}, f_{12}, f_{22}, c, d$ (platí $f_{ij} = f_{ji}$ pro $i, j = 0, 1, 2$), dostaneme hledanou kuželosečku

$$-5x_0^2 + 6x_0x_1 - 4x_0x_2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$$

a v lineárních souřadnicích

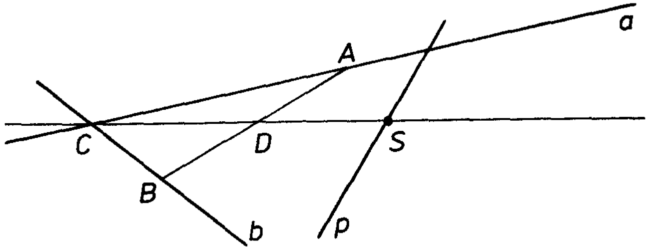
$$2xy - 3y^2 + 6x - 4y - 5 = 0.$$

Na závěr bychom se měli přesvědčit, že body T, A nejsou singulární body kuželosečky (jinak by úloha neměla řešení). To dokážeme tak, že průběhem řešení soustavy lineárních rovnic pro čísla f_{ij} zjistíme, že $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Stejně jako v příkladu 4 bychom postupovali i tehdy, kdybychom měli dán střed nebo asymptotu. Střed bychom využili jako bod konjugovaný s každým bodem nevlastní přímky $x_0 = 0$. Kdybychom měli dánu asymptotu a, určili bychom její nevlastní bod A a asymptota by byla množina bodů konjugovaných s bodem A.

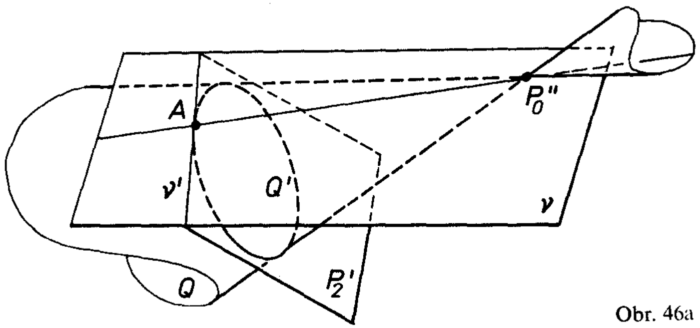
Věty, které jsme do této doby dokázali, můžeme využít i ke konstruktivnímu řešení příkladů pravítkem a kružítkem.

Příklad 5. Regulární kuželosečka $\mathbf{Q}$ je dána dvěma tečnami a, b s body dotyku A, B a průměrem p. Sestrojte její střed.

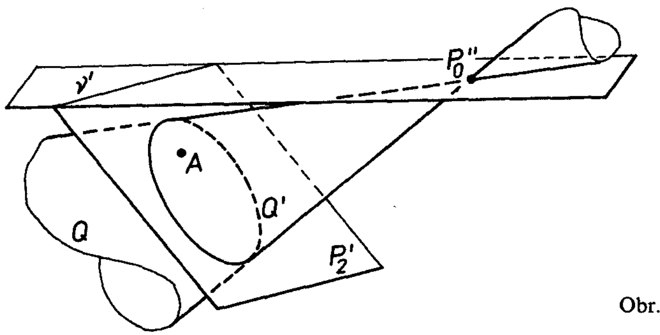


Obr. 45

Řešení. Řešení příkladu sledujeme na obr. 45 (zadání je vytaženo silněji). Podle věty 4.5.2 je střed D dvojice bodů A, B konjugovaný s nevlastním bodem U přímky AB. Označme $C = a \cap b$. Bod C je konjugován s bodem A $(C \in a)$ i s bodem B $(C \in b)$. Proto jeho polára je přímka AB. Bod C je tedy konjugován i s bodem U. Body C, D jsou oba konjugovány s bodem U, a tedy každý bod přímky CD je konjugován s bodem U. Přímka CD je tedy průměr (sdružený s bodem U) a bod $S = \overleftrightarrow{CD} \cap p$ je střed kuželosečky.



Obr. 46a



Obr. 46b

Nyní najdeme nutnou a postačující podmínku pro to, aby kvadrika měla střed. Tuto podmínku dává příští věta. První část důkazu této věty je jednoduchá. Druhou část jejího důkazu budeme sledovat na obr. 46a, b. Protože jde hlavně

o vzájemnou polohu všech útvarů, které se ve větě vyskytují, je na tomto obrázku pro zvýšení názornosti nadrovina v (která by měla být nevlastní) nakreslena jako vlastní. Přitom obr. 46a odpovídá dokazované situaci, obr. 46b ukazuje analogickou situaci, která však nesplňuje předpoklady věty a neplatí pro ni ani tvrzení.

Věta 4.5.5. Kvadrika $\mathbf{Q}$ nemá žádný střed právě tehdy, je-li nevlastní nadrovina v tečnou nadrovinou kvadriky $\mathbf{Q}$.

Důkaz. Nechť nejdříve nevlastní nadrovina v je tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$. Označme A bod dotyku. Potom množina bodů konjugovaných s bodem A je nadrovina v. Tudíž bod, který je konjugovaný s každým nevlastním bodem (a tedy i s bodem A), je nevlastní. Proto kvadrika $\mathbf{Q}$ nemá střed. Obráceně předpokládejme, že kvadrika $\mathbf{Q}$ nemá žádný střed. Potom její vrchol $\mathbf{P}_r''$ je nevlastní (každý vlastní singulární bod je zřejmě střed). Sestrojíme podprostor $\mathbf{P}'_{n-r-1} \subset \overline{\mathbf{A}_n^C}$ tak, aby $\mathbf{P}_r'' \cap \mathbf{P}'_{n-r-1} = \emptyset$ a $\mathbf{P}_r'' \vee \mathbf{P}'_{n-r-1} = \overline{\mathbf{A}_n^C}$ (stačí zvolit aritmetickou bázi prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^C}$ tak, aby prvních $r + 1$ vektorů generovalo aritmetický základ prostoru $\mathbf{P}_r'$ a zbývající vektory báze generují aritmetický základ hledaného podprostoru $\mathbf{P}'_{n-r-1}$). Označme $v' = \mathbf{P}'_{n-r-1} \cap v$. Podle věty 3.4.4 dimenze podprostoru v' je $n - r - 2$. Z věty 4.4.6 vyplývá, že kvadrika $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}'_{n-r-1}$ je regulární kvadrika v podprostoru $\mathbf{P}'_{n-r-1}$. Podle věty 4.4.8 existuje právě jeden bod $A \in \mathbf{P}'_{n-r-1}$, jehož polární nadrovina je v'. Z věty 3.4.3 vyplývá, že $v' \vee \mathbf{P}_r'' = v$. Bod A je konjugován s každým bodem podprostoru v' i s každým bodem z $\mathbf{P}_r''$ ($\mathbf{P}_r''$ je vrchol). Přímo z definice 4.4.1 a poznámky 2 z odstavce 3.4 vyplývá, že bod A je konjugován s každým bodem nevlastní nadroviny v. Protože $A \notin \mathbf{P}_r''$ a protože kvadrika $\mathbf{Q}$ nemá střed, je $A \in v$ a v je tedy tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A.

Mezi základní geometrické úkony patří zkoumání shodnosti dvou útvarů. Již na základní škole se zjišťují nutné a postačující podmínky pro to, aby dva trojúhelníky v rovině (přesněji v euklidovské rovině) byly shodné. Přitom shodnost se zavádí pomocí „přenesení", tj. jako transformace roviny. Později se zkoumá shodnost i dalších útvarů. Vidíme, co je na těchto zkoumáních podstatné. Pro to, abychom mohli zkoumat shodnost, musíme mít dánu:

1. základní množinu $\mathbf{M}$;
2. množinu $\mathbf{G}$ transformací (vzájemně jednoznačných zobrazení) množiny $\mathbf{M}$, která je vzhledem k operaci skládání transformací grupou;
3. množinu $\overline{\mathbf{M}}$ podmnožin množiny $\mathbf{M}$.

Potom dvě podmnožiny $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \overline{\mathbf{M}}$ jsou *shodné vzhledem ke grupě transformací* $\mathbf{G}$, jestliže existuje $g \in \mathbf{G}$ tak, že $g(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$. Protože $\mathbf{G}$ je grupa, a tudíž pro každé dvě transformace do ní patří i jejich složení a pro každou transformaci je prvkem grupy i transformace inverzní, snadno dokážeme, že zavedená „shodnost vzhledem ke grupě $\mathbf{G}$" je ekvivalence na množině $\bar{\mathbf{M}}$. Množina $\bar{\mathbf{M}}$ se tedy rozpadne na třídy ekvivalence. Tento rozklad množiny $\bar{\mathbf{M}}$ na třídy ekvivalence budeme nazývat *klasifikací množiny* $\bar{\mathbf{M}}$ *vzhledem ke grupě* $\mathbf{G}$. V případě, že množina $\bar{\mathbf{M}}$ bude nějaká množina geometrických objektů (např. množina všech trojúhelníků v euklidovské množině), bude náš úkol spočívat v tom, abychom našli nutné a postačující podmínky pro to, aby dva prvky množiny $\bar{\mathbf{M}}$ patřily jedné třídě ekvivalence. Ve zmíněném případě trojúhelníků v euklidovské rovině tedy hledáme nutné a postačující podmínky pro to, aby dva trojúhelníky byly shodné.

Obecný postup, který jsme právě popsali, použijeme pro klasifikaci množiny všech kvadrik v prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$, tj. klademe $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{M}}$ je množina všech kvadrik v prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ a $\mathbf{G}$ je grupa všech afinních transformací prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$. Dostaneme klasifikaci množiny všech kvadrik vzhledem ke grupě všech afinních transformací. Stručně budeme mluvit jen o *afinní klasifikaci* kvadrik. Budeme hledat nutné a postačující podmínky pro to, aby jedna kvadrika šla zobrazit na druhou kvadriku afinní transformací. Přitom budeme používat označení z odstavce 3.4, tj. afinní transformaci prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ budeme označovat φ_p a automorfismus prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}}$, kterým je tato transformace určena (viz odstavec 3.4 vztah (30)), budeme značit $\bar{\varphi}_p$.

Mějme nyní kvadriku $\mathbf{Q}$ v prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ určenou rovnicí $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Určíme její obraz $\mathbf{Q}'$ při afinní transformaci φ_p. Zřejmě $X' \in \mathbf{Q}'$ právě tehdy, když $\varphi_p^{-1}(X') \in \mathbf{Q}$ a to platí právě tehdy, když $f_2(\bar{\varphi}_p^{-1}(\mathbf{x}')) = 0$ ($\mathbf{x}'$ je aritmetický zástupce bodu X'). Snadno zjistíme, že zobrazení f'_2 prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ do tělesa $\mathbf{C}$ definované předpisem $f'_2(\mathbf{x}') = f_2(\bar{\varphi}_p^{-1}(\mathbf{x}'))$ je kvadratická forma na $\mathbf{W}_{n+1}$. K tomu by stačilo položit $f'(\mathbf{x}, \mathbf{y}') = f(\bar{\varphi}_p^{-1}(\mathbf{x}'), \bar{\varphi}_p^{-1}(\mathbf{y}'))$ a ověřit, že f' je bilineární forma, což se snadno dokáže z toho, že f je bilineární forma a $\bar{\varphi}_p^{-1}$ je automorfismus prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}}$. Odtud vyplývá, že $\mathbf{Q}'$ je kvadrika daná rovnicí $f'_2(\mathbf{x}) = 0$ a f' je její polární bilineární forma. Předpokládejme nyní, že v prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ máme zvolenou aritmetickou bázi $\mathscr{B} = \langle \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ a že v této bázi

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} f_{ij} x_i x_j .$$

Položme $\mathbf{v}'_i = \bar{\varphi}_p(\mathbf{v}_i)$ pro $i = 0, \ldots, n$ a $\mathscr{B}' = \langle \mathbf{v}'_0, \ldots, \mathbf{v}'_n \rangle$. Nechť v bázi $\mathscr{B}'$

$$f'_2(\mathbf{x}') = \sum_{i,j=0}^{n} f'_{ij} x'_i x'_j .$$

Přitom platí

$$f'_{ij} = f'(\mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_j) = f(\bar{\varphi}_p^{-1}(\mathbf{v}'_i), \bar{\varphi}_p^{-1}(\mathbf{v}'_j)) = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = f_{ij}$$

pro $i, j = 0, \ldots, n$. Dostáváme celkem pochopitelné tvzení, že obraz $\mathbf{Q}'$ kvadriky $\mathbf{Q}$ má v bázi $\mathscr{B}'$ stejnou rovnici jako kvadrika $\mathbf{Q}$ v bázi $\mathscr{B}$. (Samozřejmě je jedno, jestli proměnný vektor značíme $\mathbf{x}'$ nebo $\mathbf{x}$.)

Nyní budeme předpokládat, že v prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ máme dány dvě kvadriky $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$. Budeme zjišťovat, kdy existuje afinita $\bar{\varphi}_p$ prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ tak, že $\mathbf{Q}' = \bar{\varphi}_p(\mathbf{Q})$. Z provedených úvah je zřejmé, že jestliže se podaří zvolit báze $\mathscr{B} = \langle \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ a $\mathscr{B}' = \langle \mathbf{v}'_0, \ldots, \mathbf{v}'_n \rangle$ prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ tak, že

1. kvadrika $\mathbf{Q}$ má v bázi $\mathscr{B}$ stejnou rovnici jako kvadrika $\mathbf{Q}'$ v bázi $\mathscr{B}'$,
2. automorfismus $\bar{\varphi}_p$ zobrazující bázi $\mathscr{B}$ na bázi $\mathscr{B}'$ zobrazí vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ na sebe (tj. $\bar{\varphi}_p$ určuje afinní transformaci),

existuje afinní transformace φ_p prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ tak, že $\varphi_p(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}'$. Je to transformace určená automorfismem $\bar{\varphi}_p$. Abychom měli zaručeno, že automorfismus $\bar{\varphi}_p$ zobrazí $\mathbf{V}_n$ na sebe, budeme bázi $\mathscr{B}$ i bázi $\mathscr{B}'$ volit tak, aby $[\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}] = [\{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\}] = \mathbf{V}_n$.

Připomeňme, že na počátku odstavce 4.3 jsme udělali předpoklad, že všechny používané lineární, bilineární a kvadratické formy na $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}}$ jsme obdrželi rozšířením forem stejného typu na prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$. Zatím tento předpoklad nebyl příliš podstatný. Teď však budeme mluvit o signatuře kvadratické formy, což je pojem, který lze zavést jen pro reálné kvadratické formy. Také všechny báze prostoru $\mathbf{W}_{n+1}^{\mathbf{C}}$, které budeme používat, budou reálné, tj. budou to báze i prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$. Dále ještě předpokládáme, že všechny afinní transformace prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$, které používáme, vznikly rozšiřováním afinních transformací na prostoru $\mathbf{A}_n$, nejdříve na prostor $\mathbf{A}_n^{\mathbf{C}}$ (podle věty 3.3.3) a potom na prostor $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ (definice 3.4.7).

Při zkoumání shodnosti kvadrik v prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ vzhledem ke grupě afinních transformací použijeme signatury kvadriky, což je pojem, který nyní zavedeme.

Definice 4.5.2. Nechť $\mathbf{Q}$ je kvadrika v prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ nebo v podprostoru prostoru $\bar{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$. Nechť $\mathbf{Q}$ je určena kvadratickou formou f_2. Buď (p, q) signatura kvadratické formy f_2 (definice 4.2.5). Neuspořádanou dvojici $[p, q]$ nazýváme *signatura kvadriky* $\mathbf{Q}$.

Snadno se přesvědčíme, že definice 4.5.2 je oprávněná, tj. že neuspořádaná dvojice $[p, q]$ je jednoznačně určena kvadrikou $\mathbf{Q}$. Jestliže totiž dvě kvadratické formy f_2 a f'_2 určují stejnou kvadriku $\mathbf{Q}$, existuje číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že $f'_2 = cf_2$. Je-li (p, q) signatura kvadratické formy f_2, tak v případě, že $c > 0$, je signatura formy f'_2 také (p, q) a je-li $c < 0$, je signatura formy f'_2 dvojice (q, p). Neuspořádaná dvojice $[p, q]$ je tedy jednoznačně určena kvadrikou $\mathbf{Q}$.

Dále se budeme zabývat také průniky kvadrik a nadrovin. Protože bychom museli stále rozlišovat, zda nadrovina na kvadrice leží nebo neleží, dohodneme se, že i každou nadrovinu ϱ budeme považovat za kvadriku v nadrovině ϱ. Tato kvadrika je samozřejmě určena nulovou kvadratickou formou na aritmetickém základu nadroviny ϱ. Zřejmě dimenze vrcholu této kvadriky bude $n - 1$ (dimenze nadroviny ϱ) a signatura této kvadriky bude $[0, 0]$.

Následující věta je jednoduchým důsledkem věty 4.2.4.

Věta 4.5.6. Buď $\mathbf{Q}$ kvadrika signatury $[p, q]$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ a ϱ nadrovina prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$. Potom signatura kvadriky $\mathbf{Q} \cap \varrho$ (kvadrika v nadrovině ϱ) je právě jedna z dvojic $[p, q]$, $[p-1, q]$, $[p, q-1]$, $[p-1, q-1]$.

Větu 4.2.5 můžeme též snadno převést na kvadriky. Zde navíc lze jednotlivé možnosti charakterizovat geometricky.

Věta 4.5.7. Buď $\mathbf{Q}$ kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ a nechť $\mathbf{P}'_v$ je její vrchol. Nechť ϱ je nadrovina prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ a nechť $\mathbf{P}^*_{v^*}$ je vrchol kvadriky $\mathbf{Q} \cap \varrho$. Potom platí právě jedna z rovností $v^* = v + 1$, $v^* = v$, $v^* = v - 1$. Přitom $v^* = v + 1$ právě tehdy, je-li nadrovina ϱ tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$, $v^* = v$ právě tehdy, není-li ϱ tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}'_v \subset \varrho$, $v^* = v - 1$, právě když $\mathbf{P}'_v \not\subset \varrho$.

Důkaz. Že v^* nabývá právě jedné ze tří uvedených hodnot, plyne z věty 4.2.5. Dále je zřejmé, že $\mathbf{P}'_v \cap \varrho \subset \mathbf{P}^*_{v^*}$. Nechť ϱ je tečná nadrovina v bodě $A \in \mathbf{Q}$. Potom bod A je konjugovaný s každým bodem nadroviny ϱ a tedy $A \in \mathbf{P}^*_{v^*}$. Dále zřejmě $\mathbf{P}'_v \subset \varrho$, a tedy $\mathbf{P}'_v \subset \mathbf{P}^*_{v^*}$. Protože $A \notin \mathbf{P}'_v$, musí být $v^* > v$, a tedy $v^* = v + 1$. Nechť $\mathbf{P}^*_{v^*} \setminus \mathbf{P}'_v \neq \emptyset$ (to je splněno např., je-li $v^* = v + 1$). Zvolme $A \in \mathbf{P}^*_{v^*} \setminus \mathbf{P}'_v$. Zřejmě A je regulární bod kvadriky $\mathbf{Q}$ a je konjugován s každým bodem nadroviny ϱ ($A \in \mathbf{P}^*_{v^*}$). Tudíž nadrovina ϱ je tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě A. Odtud také vyplývá, že není-li ϱ tečná nadrovina, je $\mathbf{P}^*_{v^*} = \varrho \cap \mathbf{P}'_v$. Tím jsou vlastně dokázána zbývající tvrzení věty.

Ke každé kvadrice $\mathbf{Q}$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ sestrojíme tzv. kanonickou bázi. Přitom budeme rozlišovat, zda kvadrika $\mathbf{Q}$ má nebo nemá střed.

Nechť nejdříve kvadrika $\mathbf{Q}$ má střed S a nechť je určena kvadratickou formou f_2. Nechť $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ je polární báze kvadratické formy $f_2 \mid \mathbf{V}_n$. Potom zřejmě $\mathscr{B} = \langle (1, S), \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ je polární báze kvadratické formy f_2. Předpokládejme, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou uspořádány tak, že v uspořádané n-tici čísel $(f_2(\mathbf{u}_1), f_2(\mathbf{u}_2), \ldots, f_2(\mathbf{u}_n))$ jsou nejdříve kladná čísla, po nich následují záporná čísla a na konci jsou čísla, která jsou rovna nule. Kvadratickou formu f_2 můžeme zvolit tak, aby buď $f_2((1, S)) = 0$ nebo $f_2((1, S)) = 1$ (pokud by žádná z těchto rovností neplatila, nahradili bychom formu f_2 jejím vhodným násobkem). Jestliže nyní pro některé i ($1 \leqq i \leqq n$) je $f_2(\mathbf{u}_i) \neq 0$, položíme $\mathbf{v}_i = c_i \mathbf{u}_i$. Potom

$$f_2(\mathbf{v}_i) = c_i^2 f_2(\mathbf{u}_i).$$

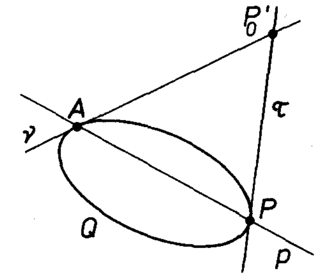
Položíme-li

$$c_i = 1/\sqrt{|f_2(\mathbf{u}_i)|},$$

bude $|f_2(\mathbf{v}_i)| = 1$. Pokud je $f_2(\mathbf{u}_i) = 0$, položíme $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i$. Báze $\mathscr{B}_0 = \langle (1, S), \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ se nazývá *kanonická báze* kvadriky $\mathbf{Q}$. Jestliže signatura kvadratické formy $f_2 \mid \mathbf{V}_n$ je (p_v, q_v), má v této bázi kvadrika $\mathbf{Q}$ rovnici

$$(18) \qquad f_{00}x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{p_v}^2 - x_{p_v+1}^2 - \ldots - x_{p_v+q_v}^2 = 0,$$

přičemž ještě buď $f_{00} = 0$, nebo $f_{00} = 1$. Jestliže $f_{00} = 0$, můžeme předpokládat, že kvadratickou formu f_2 máme zvolenou tak, že $p_v \geqq q_v$ (pokud by to neplatilo, nahradili bychom kvadratickou formu f_2 kvadratickou formou $-f_2$). Zde jsme využili toho, že $\mathscr{B}_0$ je polární báze.



Obr. 47

Prozkoumáme druhou možnost — kvadrika $\mathbf{Q}$ nemá střed. Postup konstrukce kanonické báze v rovině $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ budeme sledovat na obr. 47. Přitom právě tak jako na obr. 46 budeme nevlastní přímku kreslit jako vlastní. Kvadratickou formu určující kvadriku $\mathbf{Q}$ opět označíme f_2. Podle věty 4.5.5 je nevlastní nadrovina tečná nadrovina kvadriky $\mathbf{Q}$. Bod dotyku označme A. Veďme libovolnou vlastní přímku p bodem A. Přímka p není tečna kvadriky $\mathbf{Q}$ ($p \not\subset v$), a proto protne kvadriku $\mathbf{Q}$ kromě bodu A ještě v jednom bodě, označme ho P. Bod P je zřejmě regulární, protože všechny singulární body kvadriky $\mathbf{Q}$ jsou nevlastní (jsou konjugované s bodem A). Sestrojíme tečnou nadrovinu τ kvadriky $\mathbf{Q}$ v bodě P. Potom $v \cap \tau$ je podprostor dimenze $n - 2$ prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ označme ho $\mathbf{P}'_{n-2}$ a jeho aritmetický základ $\mathbf{W}'_{n-1}$. Nechť signatura kvadratické formy $f'_2 = f_2 \mid \mathbf{W}'_{n-1}$ je (p', q'). Zřejmě můžeme předpokládat, že $p' \geqq q'$ (jinak bychom kvadratickou formu f_2 nahradili kvadratickou formou $-f_2$). Podobně jako v případě, když kvadrika $\mathbf{Q}$ měla střed, zvolíme polární bázi $\langle \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ kvadratické formy f'_2 tak, že $f'_2(\mathbf{v}_i) = 1$ pro každé i, $2 \leqq i \leqq p' + 1$, a $f'_2(\mathbf{v}_i) = -1$ pro každé i, $p' + 2 \leqq i \leqq p' + q' + 1$. Dále položíme $\mathbf{v}_0 = (1, P)$ a $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ je aritmetický zástupce bodu A). Potom

$$f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = cf(\mathbf{v}_0, \mathbf{a}).$$

Protože $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{a}) \neq 0$, můžeme zvolit číslo c tak, že $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = 1$. Aritmetická báze $\mathscr{B}_0 = \langle \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ se nazývá *kanonická báze* kvadriky $\mathbf{Q}$. Rovnice kvadriky $\mathbf{Q}$ v kanonické bázi je

$$\sum_{i,j=0}^{n} f_{ij} x_i x_j = 0.$$

Určíme koeficienty f_{ij}, $i, j = 0, \ldots, n$. Protože $A, P \in \mathbf{Q}$, je $f_{00} = f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) = 0$ a $f_{11} = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = 0$. Protože $V_2, \ldots, V_n \in v$, platí $f_{1i} = 0$ pro $i = 2, \ldots, n$. Protože

$V_2, \ldots, V_n \in \tau$, platí $f_{0i} = 0$ pro $i = 2, \ldots, n$. Navíc $\langle \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ je polární báze kvadratické formy f_2'. Rovnice kvadriky $\mathbf{Q}$ tedy je

$$2x_0x_1 + x_2^2 + \ldots + x_{p'+1}^2 - x_{p'+2}^2 - \ldots - x_{p'+q'+1}^2 = 0. \tag{19}$$

Přímo z konstrukce kanonické báze vyplývá, že tato báze není kvadrikou $\mathbf{Q}$ určena jednoznačně.

Pomocí kanonické báze snadno dokážeme další větu — větu o shodnosti kvadrik vzhledem ke grupě všech afinních transformací.

Věta 4.5.8. Mějme dány dvě kvadriky $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{C}$. Tyto kvadriky jsou shodné vzhledem ke grupě všech afinních transformací (tj. existuje afinní transformace φ_p prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{C}$ tak, že $\varphi_p(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}'$) právě tehdy, jestliže kvadriky $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ mají stejnou signaturu a kvadriky $\mathbf{Q} \cap v$ a $\mathbf{Q}' \cap v$ mají stejnou signaturu.

Důkaz. Jestliže pro afinní transformaci φ_p platí $\varphi_p(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}'$, zvolíme polární bázi $\mathscr{B}$ kvadriky $\mathbf{Q}$ a zobrazíme bázi $\mathscr{B}$ automorfismem $\bar{\varphi}_p$, který určuje transformaci φ_p, obraz označíme $\mathscr{B}'$. Potom kvadrika $\mathbf{Q}'$ má v bázi $\mathscr{B}'$ stejnou rovnici jako kvadrika $\mathbf{Q}$ v bázi $\mathscr{B}$. Tudíž kvadriky $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ mají stejnou signaturu. Protože zřejmě i $\varphi_p(\mathbf{Q} \cap v) = \mathbf{Q}' \cap v$, stejným způsobem lze dokázat, že i kvadriky $\mathbf{Q} \cap v$ a $\mathbf{Q}' \cap v$ mají stejnou signaturu.

Nechť obráceně platí rovnost příslušných signatur. Ke kvadrice $\mathbf{Q}$, resp. $\mathbf{Q}'$ najdeme kanonickou bázi $\mathscr{B}_0$, resp. $\mathscr{B}_0'$. Z rovnosti signatur vyplývá, že dimenze vrcholů kvadrik $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ jsou stejné i že dimenze vrcholů kvadrik $\mathbf{Q} \cap v$ a $\mathbf{Q}' \cap v$ jsou stejné. Tudíž podle vět 4.5.5 a 4.5.7 buď obě kvadriky $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Q}'$ mají střed, nebo ho obě nemají. To znamená, že rovnice obou kvadrik v kanonické bázi mají buď obě tvar (18), nebo obě tvar (19). Z rovnosti signatur již snadno dokážeme, že obě rovnice jsou stejné. Automorfismus $\bar{\varphi}_p$, který bázi $\mathscr{B}_0$ zobrazí na bázi $\mathscr{B}_0'$, zřejmě určuje hledanou transformaci $\bar{\varphi}_p$, pro niž $\varphi_p(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}'$.

Z věty 4.5.8 vyplývá, že provedeme-li afinní klasifikaci kvadrik v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{C}$, rozpadne se množina všech kvadrik na konečný počet tříd ekvivalence. Uděláme si jejich výčet v prostorech $\overline{\mathbf{A}}_2^{C}$ a $\overline{\mathbf{A}}_3^{C}$. Přitom budeme označovat $[p, q]$ signaturu kvadriky $\mathbf{Q}$, $[p_v, q_v]$ signaturu kvadriky $\mathbf{Q} \cap v$. Kdybychom označili ještě v, resp. v_v dimenzi vrcholu kvadriky $\mathbf{Q}$, resp. $\mathbf{Q} \cap v$, platilo by

$$p + q + v = n,$$
$$p_v + q_v + v_v = n - 1.$$

Vidíme, že i z čísel p, q, p_v, q_v můžeme podle věty 4.5.7 určit vzájemnou polohu nevlastní nadroviny v a kvadriky $\mathbf{Q}$. Kanonická báze $\mathscr{B}_0$, kterou jsme ke každé kvadrice sestrojili, nám v prostoru $\mathbf{A}_n^{C}$ určuje lineární soustavu souřadnic — budeme ji nazývat *kanonická lineární soustava souřadnic* a označovat $\mathscr{L}_0$. Seznam všech tříd uspořádáme do tabulky. U každé kvadriky uvedeme dvojici

signatur $[p, q]$ a $[p_v, q_v]$, její název nebo popis, pokud kvadrika název nemá (týká se kvadrik, které jsou složeny z nadrovin prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{C}$), a rovnici kvadriky v kanonické lineární soustavě souřadnic, případně v kanonické aritmetické bázi. Při sestavování dvojic $[p, q]$ a $[p_v, q_v]$ musíme kromě věty 4.5.6 brát v úvahu i samozřejmé vztahy

$$p + q \leqq n + 1,$$
$$p_v + q_v \leqq n.$$

Lineární souřadnice bodu X v soustavě $\mathscr{L}_0$ budeme značit obvyklým způsobem — v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_2^{C}$, resp. $\overline{\mathbf{A}}_3^{C}$ píšeme $X = [x, y]$, resp. $X = [x, y, z]$.

Klasifikace kuželoseček v $\overline{\mathbf{A}}_2^{C}$

$[p, q]$	$[p_v, q_v]$	Název (popis) kuželosečky	Rovnice v $\mathscr{L}_0$, resp. $\mathscr{B}_0$
[3, 0]	[2, 0]	imaginární elipsa	$x^2 + y^2 + 1 = 0$
[2, 1]	[2, 0]	elipsa	$x^2 + y^2 - 1 = 0$
[2, 1]	[1, 1]	hyperbola	$x^2 - y^2 - 1 = 0$
[2, 1]	[1, 0]	parabola	$2x + y^2 = 0$
[2, 0]	[2, 0]	imaginární různoběžky	$x^2 + y^2 = 0$
[2, 0]	[1, 0]	imaginární rovnoběžky	$x^2 + 1 = 0$
[1, 1]	[1, 1]	reálné různoběžky	$x^2 - y^2 = 0$
[1, 1]	[1, 0]	reálné rovnoběžky	$x^2 - 1 = 0$
[1, 1]	[0, 0]	nevlastní přímka a vlastní přímka	$x_0x_1 = 0$
[1, 0]	[1, 0]	jedna vlastní přímka	$x^2 = 0$
[1, 0]	[0, 0]	nevlastní přímka	$x_0^2 = 0$

Vidíme, že názvy kuželoseček odpovídají jejich rovnicím tak, jak to bylo uvedeno v kapitole 3 v [G], popřípadě na střední škole. Ten, komu by se zdálo, že $x^2 + y^2 - 1 = 0$ není rovnice elipsy ale kružnice, musí si uvědomit, že pracujeme v afinní rovině (případně v jejím projektivním rozšíření) a nikoli v euklidovské rovině. V afinní rovině není kružnice vůbec definována, protože kružnici nelze bez vzdálenosti zavést. Samozřejmě i pro každou elipsu v euklidovské rovině lze zvolit lineární soustavu souřadnic tak, aby měla rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

První čtyři kuželosečky v seznamu jsou regulární, ostatní kuželosečky jsou singulární. Jednoduchou úpravou rovnice singulárních kuželoseček se přesvědčíme, že skutečně ke každé rovnici uvedené v seznamu patří příslušné slovní označení. Protože pracujeme v prostoru $\mathbf{A}_n^{C}$, resp. $\overline{\mathbf{A}}_n^{C}$, můžeme levé strany rovnic singulárních kuželoseček upravit takto

$$x^2 + y^2 = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y),$$
$$x^2 + 1 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i}),$$
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$
$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Zbývající rovnice jsou již psány jako součin lineárních forem na $\mathbf{W}_{n+1}$, resp. lineárních funkcí na $\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}$ a nemusíme je upravovat. Tudíž např. kuželosečka

$$x^2 + y^2 = 0$$

je sjednocením dvou přímek o rovnicích

$$x + \mathrm{i}y = 0, \quad x - \mathrm{i}y = 0$$

a použité slovní označení je vhodné. Podobně je tomu i u zbývajících kuželoseček.

Ukážeme si, jak rozlišíme kuželosečky jen podle hodnosti jejich matice a podle signatury jejich průniku s nevlastní přímkou. Označíme h hodnost matice kuželosečky a v dimenzi jejího vrcholu. Potom $h + v = n + 1$ a $p + q + v = n + 1$, a proto $h = p + q$. Budeme-li zkoumat, které kuželosečky nemůžeme rozlišit pomocí hodnosti jejich matice a signatury jejich průniku s nevlastní přímkou, zjistíme, že nerozlišíme elipsu s imaginární elipsou a reálné rovnoběžky s imaginárními rovnoběžkami. Vidíme, že rozlišování kuželoseček podle čísla h a dvojice $[p_v, q_v]$ je vyhovující, pouze ve dvou případech musíme najít doplňující kritérium.

Napíšeme ke každé signatuře průniku $\mathbf{Q}_v$ kuželosečky $\mathbf{Q}$ s nevlastní přímkou rovnici tohoto průniku v polární bázi. Tak k signatuře $[2, 0]$ dostáváme rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Zřejmě $\mathbf{Q}_v$ jsou dva imaginární body. K signatuře $[1, 1]$ dostáváme rovnici

$$x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Průnikem $\mathbf{Q}_v$ jsou dva reálné různé body. K signatuře $[1, 0]$ dostáváme rovnici

$$x_1^2 = 0.$$

Průnikem $\mathbf{Q}_v$ je jeden bod. V případě signatury $[0, 0]$ je zřejmě průnikem $\mathbf{Q}_v$ celá nevlastní přímka.

Nechť $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ je repér v rovině $\mathbf{A}_2$ a nechť kuželosečka $\mathbf{Q}$ v rovině $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$ je dána svou rovnicí v aritmetické bázi $\mathscr{B} = \langle (1, P), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$:

$$f_{00}x_0^2 + 2f_{01}x_0x_1 + 2f_{02}x_0x_2 + f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = 0 \tag{20}$$

V lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ určené repérem $\mathscr{R}$ v rovině $\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}$ je rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$

$$f_{00} + 2f_{01}x + 2f_{02}y + f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 = 0.$$

Snadno určíme hodnost h matice $\| f_{ij} \|$ kuželosečky $\mathbf{Q}$. Rovnice průniku $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q} \cap v$ s nevlastní přímkou je (nevlastní přímka má rovnici $x_0 = 0$)

$$f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = 0. \tag{21}$$

Je-li např. $f_{11} \neq 0$, pro řešení (x_1, x_2) rovnice (21) je $x_2 \neq 0$ (kdyby bylo $x_2 = 0$, bylo by i $x_1 = 0$, což není možné, protože je již $x_0 = 0$ a trojice $(0, 0, 0)$ neurčuje žádný bod v $\overline{\mathbf{A}_2^{\mathrm{C}}}$). Protože řešení rovnice (21) je dáno až na násobek, můžeme zvolit $x_2 = 1$ a vypočítat x_1. Rovnice pro x_1, kterou dostaneme, je kvadratická. Její diskriminant označme D. Potom

$$D/4 = f_{12}^2 - f_{11}f_{22} = -\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12} \\ f_{12}, & f_{22} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Vidíme, že pro $D > 0$ tvoří kvadriku $\mathbf{Q}_v$ dva reálné body, pro $D < 0$ dva imaginární body a pro $D = 0$ jeden reálný bod. Ze vztahu (22) vyplývá, že $D/4 = -F_{00}$, kde F_{00} je doplněk prvku f_{00} v matici kuželosečky $\mathbf{Q}$. Takže druh kvadriky $\mathbf{Q}_v$ můžeme určit podle doplňku F_{00}. Ke stejnému výsledku bychom došli i v případě, že $f_{11} = 0$ a $f_{22} \neq 0$ (počítali bychom x_2), i v případě $f_{11} = f_{22} = 0$ a $f_{12} \neq 0$. Jestliže se omezíme na kuželosečky, pro které je alespoň jedno z čísel f_{11}, f_{12}, f_{22} nenulové (tj. kuželosečky neobsahující nevlastní přímku), dostáváme následující přehled:

$h = 3$ a $F_{00} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ je elipsa nebo imaginární elipsa,
$h = 3$ a $F_{00} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ je parabola,
$h = 3$ a $F_{00} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ je hyperbola,
$h = 2$ a $F_{00} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ jsou imaginární různoběžky,
$h = 2$ a $F_{00} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ jsou reálné nebo imaginární rovnoběžky,
$h = 2$ a $F_{00} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ jsou reálné různoběžky,
$h = 1$ $\Leftrightarrow \mathbf{Q}$ je přímka (vlastní).

Zbývá ještě najít doplňující kritéria, abychom rozlišili elipsu a imaginární elipsu, resp. reálné a imaginární rovnoběžky.

Nechť tedy rovnice (20) je rovnice elipsy nebo imaginární elipsy. Protože je $F_{00} \neq 0$, má kuželosečka střed $S = (F_{00}, F_{01}, F_{02})$ (viz věta 4.5.4). Zvolíme aritmetickou bázi $\mathscr{B}' = \langle (1, S), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$, tj. vektor $(1, P)$ nahradíme vektorem $(1, S)$. Budeme-li v této bázi psát $X = (x'_0, x'_1, x'_2)$, dostaneme rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ ve tvaru

$$f_2((1, S))\, x_0'^2 + f_{11}x_1'^2 + 2f_{12}x'_1x'_2 + f_{22}x_2'^2 = 0. \tag{23}$$

To plyne přímo z analytického vyjádření kvadratické formy – viz odstavec 4.2 vzorec (2). Hodnoty f_{11}, f_{12}, f_{22} již známe z rovnice (20), zbývá určit hodnotu $f_2((1, S))$. V aritmetické bázi $\mathscr{B}$ je

$$(1, S) = (1, F_{01}/F_{00}, F_{02}/F_{00}). \tag{24}$$

Dosazením do kvadratické formy f_2 a postupným upravováním výrazu (viz vzorec (17)) dostaneme

$$f_2((1,S)) = \sum_{i,j=0}^{2} f_{ij}\frac{F_{0i}}{F_{00}}\frac{F_{0j}}{F_{00}} = \frac{1}{F_{00}^2}\sum_{i=0}^{2}(\sum_{j=0}^{2} f_{ij}F_{0j})F_{0i} =$$
$$= \frac{1}{F_{00}^2}\sum_{i=0}^{2} F\,.\,\delta_0^i F_{0i} = \frac{1}{F_{00}^2} F F_{00}.$$

Takže

(25) $$f_2((1,S)) = F/F_{00}.$$

Z tabulky na str. 187 je zřejmé, že kvadratická forma určující imaginární elipsu je pozitivně nebo negativně definitní, kvadratická forma určující elipsu je indefinitní. Z rovnice (23) vyplývá, že kvadratická forma f_2 je pozitivně definitní právě tehdy, je-li $f_2((1,S)) > 0$, a kvadratická forma $f_{2v} = f_2 \mid \mathbf{V}_2$ (levá strana rovnice (21)) je pozitivně definitní. Signatura kvadratické formy f_{2v} je (2, 0) nebo (0, 2) (viz tabulka na str. 187). Tudíž tato forma je pozitivně definitní právě tehdy, je-li $f_{11} > 0$ (potom je už i $f_{22} > 0$). Ze vzorce (25) vyplývá, že $f_2(1,S)) > 0$ právě tehdy, když $F > 0$ (platí $F_{00} > 0$). Podobně bychom vyšetřili případ, kdy kvadratická forma f_2 je negativně definitní. Výsledek shrneme do věty.

Věta 4.5.9. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ daná v bázi $\mathscr{B}$ (viz výše) rovnicí (20) je imaginární elipsa právě tehdy, je-li buď $F > 0$, $F_{00} > 0$ a $f_{11} > 0$, nebo $F < 0$, $F_{00} > 0$ a $f_{11} < 0$.

Teď budeme předpokládat, že rovnice (20) je rovnice buď reálných, nebo imaginárních rovnoběžek. Tak jako jsme počítali průsečíky s přímkou $x_0 = 0$, můžeme počítat i průsečíky s přímkami $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$. Takže bude-li kuželosečka $\mathbf{Q}$ dvojice imaginárních rovnoběžek, nedostaneme nikdy dva reálné průsečíky. V tom případě bude tedy $F_{11} \geqq 0$ a $F_{22} \geqq 0$ a navíc alespoň pro jednu z obou přímek musíme dostat dva imaginární průsečíky. Bude tedy ještě buď $F_{11} > 0$, nebo $F_{22} > 0$. Pro reálné rovnoběžky bude $F_{11} \leqq 0$ a $F_{22} \leqq 0$ a přitom buď $F_{11} < 0$, nebo $F_{22} < 0$. Z toho, že $\mathbf{Q}$ je buď dvojice reálných, nebo dvojice imaginárních rovnoběžek, je zřejmé, že se nemůže stát, že by současně platilo $F_{11} > 0$ a $F_{22} < 0$, nebo $F_{11} < 0$ a $F_{22} > 0$. Za předpokladu, že jeden subdeterminant druhého řádu matice kuželosečky je nenulový, se podmínka na hodnost matice $h = 2$ dá nahradit ekvivalentní podmínkou $F = 0$. Tudíž platí následující věta.

Věta 4.5.10. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ daná v bázi $\mathscr{B}$ (viz výše) rovnicí (20) je dvojice reálných, resp. imaginárních rovnoběžek právě tehdy, je-li $F = 0$, $F_{00} = 0$ a buď $F_{11} < 0$, nebo $F_{22} < 0$, resp. $F = 0$, $F_{00} = 0$ a buď $F_{11} > 0$, nebo $F_{22} > 0$.

Příklad 6. Určete druh kuželosečky dané v lineární soustavě souřadnic rovnicí

a) $x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 1 = 0$,
b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$.

Řešení. Rovnici v obou případech přepíšeme do homogenních souřadnic, určíme matici $\mathbf{F}$ kuželosečky. Dále vypočítáme determinant F matice $\mathbf{F}$, doplněk F_{00} a případně další hodnoty. Z těchto údajů zjistíme druh kuželosečky.

a) $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_0 + x_0^2 = 0$,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ -1, & 1, & -2 \\ 0, & -2, & 1 \end{pmatrix},$$

$F = -4$, $F_{00} = -5$ – kuželosečka je hyperbola.

b) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1x_0 - 4x_2x_0 + 3x_0^2 = 0$,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3, & -1, & -2 \\ -1, & 1, & 2 \\ -2, & 2, & 4 \end{pmatrix},$$

$F = 0$, $F_{00} = 0$, $F_{11} = 8$ ($F_{22} = 2$) – kuželosečka je dvojice imaginárních rovnoběžek.

Podobně jako jsme roztřídili kuželosečky v rovině podle jejich signatury a podle signatury jejich průniku s nevlastní nadrovinou (tj. nevlastní přímkou), roztřídíme i kvadriky v trojrozměrném afinním prostoru. Výsledkem je přehled zpracovaný opět ve formě tabulky (str. 192). Používáme přitom označení, které jsme zavedli před roztříděním všech kuželoseček.

Názorný význam uvedených kvadrik byl probrán v kapitole 3 v [G]. U kvadrik složených z rovin (reálných nebo imaginárních) se rozkladem jejich rovnice můžeme přesvědčit, že ke každé rovnici patří příslušné slovní označení. Přitom postupujeme stejně jako u rovnic kuželoseček.

Přehled všech kvadrik uvedený v tabulce na str. 192 ve srovnání s kapitolou 3 v [G] přináší dva nové poznatky. Za prvé je z jeho konstrukce zřejmé, že je úplný, tj. že žádná další kvadrika již neexistuje. Za druhé byl tento přehled sestrojen tak, že jednotlivé názvy odpovídají třídám kvadrik, na které se rozpadne množina všech kvadrik v $\mathbf{A}_3^C$, když provedeme afinní klasifikaci kvadrik. Tento poznatek jsme nemohli získat v euklidovském prostoru. Tam jsme se museli spokojit s tím, že stejným názvem jsou označeny kvadriky, které stejně vypadají, aniž bychom tento svůj dojem byli schopni upřesnit. Např. nemuselo být jasné, proč je kulová plocha elipsoid atd.

Klasifikace kvadrik v $\overline{\mathbf{A}}_3^C$

$[p, q]$	$[p_v, q_v]$	Název (popis) kvadriky	Rovnice v $\mathscr{L}_0$, resp. $\mathscr{B}_0$
[4, 0]	[3, 0]	imaginární elipsoid	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$
[3, 1]	[3, 0]	elipsoid	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
[3, 1]	[2, 1]	dvojdílný hyperboloid	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$
[3, 1]	[2, 0]	eliptický paraboloid	$2x + y^2 + z^2 = 0$
[2, 2]	[2, 1]	jednodílný hyperboloid	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$
[2, 2]	[1, 1]	hyperbolický paraboloid	$2x + y^2 - z^2 = 0$
[3, 0]	[3, 0]	imaginární kužel	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
[3, 0]	[2, 0]	imaginární válec	$x^2 + y^2 + 1 = 0$
[2, 1]	[2, 1]	kužel	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$
[2, 1]	[2, 0]	eliptický válec	$x^2 + y^2 - 1 = 0$
[2, 1]	[1, 1]	hyperbolický válec	$x^2 - y^2 - 1 = 0$
[2, 1]	[1, 0]	parabolický válec	$2x + y^2 = 0$
[2, 0]	[2, 0]	imaginární různoběžné roviny	$x^2 + y^2 = 0$
[2, 0]	[1, 0]	imaginární rovnoběžné roviny	$x^2 + 1 = 0$
[1, 1]	[1, 1]	reálné různoběžné roviny	$x^2 - y^2 = 0$
[1, 1]	[1, 0]	reálné rovnoběžné roviny	$x^2 - 1 = 0$
[1, 1]	[0, 0]	nevlastní rovina a vlastní rovina	$x_0x_1 = 0$
[1, 0]	[1, 0]	jedna vlastní rovina	$x^2 = 0$
[1, 0]	[0, 0]	nevlastní rovina	$x_0^2 = 0$

Cvičení

Zadání všech cvičení jsou v rovině $\mathbf{A}_2^C$ v dané lineární soustavě souřadnic.

1. Určete množinu $\mathbf{M}$ všech středů kuželosečky
a) $-x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$,
b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x + 1 = 0$,
c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$.

2. Napište rovnice asymptot kuželosečky
a) $3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 2 = 0$,
b) $2x^2 + xy - 3y^2 + 5y - 2 = 0$.

3. Určete druh kuželoseček ze cvičení 1 a 2.

4. Určete druh kuželosečky
a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 2 = 0$,
b) $x^2 + xy + y^2 - x + 2y = 0$,
c) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$,
d) $4x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$.

5. Napište rovnici kuželosečky, je-li dáno:
a) $S = [1, 0]$ je střed, $y = 1$ je tečna s bodem dotyku $T = [0, 1]$, $A = [0, -3]$ je bod kuželosečky.
b) $x - y = 0$ je asymptota, osa x je průměr sdružený se směrem určeným vektorem $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ a body $A = [1, -1]$, $B = [-1, 2]$ jsou konjugované.

4.6 Metrické vlastnosti kvadrik

V tomto odstavci budeme pracovat v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$. Jeho zaměření budeme označovat $\mathbf{V}_n$ a skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$ budeme značit $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. Protože euklidovský prostor je vlastně zvláštní případ afinního prostoru (přesněji řečeno struktura euklidovského prostoru zahrnuje jako svou část i strukturu afinního prostoru), můžeme utvořit prostor $\mathbf{E}_n^C$ – komplexní rozšíření euklidovského prostoru, i prostor $\overline{\mathbf{E}}_n^C$ – projektivní rozšíření prostoru $\mathbf{E}_n^C$. Skalární součin je bilineární forma na prostoru $\mathbf{V}_n$. Proto ho můžeme rozšířit i na vektorový prostor $\mathbf{V}_n^C$. Pro dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n^C$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + i\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + i\boldsymbol{v}_2$ ($\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{V}_n$) pak bude platit (viz věta 4.1.2):

(1) $$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_1 + i\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{v}_1 + i\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + i(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1)$$

V prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^C$ budeme opět zkoumat kvadriky. Budeme předpokládat, že $\mathbf{Q}$ je kvadrika v prostoru $\mathbf{E}_n^C$ daná rovnicí $f_2(\boldsymbol{x}) = 0$. Ponecháme i další označení, která jsme zavedli v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^C$. Např. nevlastní nadrovinu budeme značit v, $\mathbf{W}_{n+1}^C$ bude aritmetický základ prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^C$ atd.

Nejdříve budeme definovat tzv. hlavní směry kvadratické formy na prostoru $\mathbf{V}_n$. Jestliže budeme hledat hlavní směry kvadratické formy f_2 a $\mathbf{Q}$ bude středová kuželosečka v $\overline{\mathbf{E}}_2^C$, ukáže se, že hlavní směry budou směry jejích os. U paraboly to však bude směr osy a směr vrcholové tečny. Proto také volíme nový termín – hlavní směry. Směr je přitom tak jako dříve jednorozměrný podprostor prostoru $\mathbf{V}_n^C$ – nevlastní bod prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^C$.

Definice 4.6.1. Směr $U \in \overline{\mathbf{E}}_n^C$ generovaný vektorem $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_n^C$ nazýváme *hlavní směr* kvadratické formy f_2, resp. hlavní směr kvadriky $\mathbf{Q}$, je-li konjugovaný s každým směrem na něj kolmým.

Ukážeme si výpočet hlavních směrů kvadratické formy. K tomu, aby U byl hlavní směr, je nutné a stačí, aby byla splněna pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n^C$ podmínka

(2) $$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0$$

(to plyne přímo z definice 4.6.1). Bereme-li ve vztahu (2) vektor $\boldsymbol{u}$ pevně, jsou výrazy $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}$ a $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$ lineární formy proměnného vektoru $\boldsymbol{x}$. Z anulování jedné lineární formy vyplývá anulování druhé. To platí právě tehdy, je-li druhá lineární forma násobkem první lineární formy. Vektor $\boldsymbol{u}$ tudíž určuje hlavní směr právě tehdy, existuje-li číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že

(3) $$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}$$

pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n^C$. Nyní zvolíme ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ prostoru $\mathbf{V}_n$.

V této bázi můžeme rovnost (3) rozepsat a upravit

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}u_i x_j = c \sum_{j=1}^{n} u_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ij}u_i\right) x_j = \sum_{j=1}^{n} cu_j \, . \, x_j.$$

Protože tato rovnost má platit pro každý vektor $\boldsymbol{x}$, tj. pro každou n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$, musí platit

(4) $$\sum_{i=1}^{n} f_{ij}u_i = cu_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Vidíme, že hledání hlavních směrů vede v ortonormální bázi na výpočet charakteristických (vlastních) směrů matice. Řešení provádíme obvyklým způsobem.

Soustavu (4) přepíšeme do tvaru

(5) $$\sum_{i=1}^{n} (f_{ij} - c\delta_i^j)\, u_i = 0$$

a hledáme c tak, aby determinant matice soustavy (5) byl nulový. Řešíme tedy rovnici

(6) $$\begin{vmatrix} f_{11} - c, & f_{12}, & \ldots, & f_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}, & f_{n2}, & \ldots, & f_{nn} - c \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení rovnice (6) dosadíme do soustavy (5) a jejím vyřešením získáme alespoň jeden hlavní směr. Rovnice (6) je algebraická rovnice a v oboru komplexních čísel má vždy řešení. Vlastnosti hlavních směrů a kořenů rovnice (6) udávají věty 4.6.1 – 4.6.4.

Věta 4.6.1. Všechny kořeny rovnice (6) jsou reálné.

Důkaz. Nechť $c \in \mathbf{C}$ je kořen rovnice (6) a nechť vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$ určuje hlavní směr, který číslu c odpovídá (souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ jsou řešením soustavy (5)). Pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}_n^{\mathrm{C}}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ platí

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_i y_j.$$

Protože čísla f_{ij} jsou reálná, dostaneme přechodem k číslům komplexně sdruženým, že

$$\overline{f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = f(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}).$$

Přitom číslo, resp. vektor označený pruhem znamená číslo komplexně sdružené, resp. vektor komplexně sdružený s původním číslem, resp. vektorem. Pro číslo c a vektor $\boldsymbol{u}$ tedy platí rovnost (3). Odtud vyplývá, že platí i

(7) $$f(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \bar{c}\bar{\boldsymbol{u}} \, . \, \bar{\boldsymbol{x}}$$

pro každý vektor $\boldsymbol{x}$. Do rovnosti (3) dosadíme $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{u}}$ a do rovnosti (7) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$. Obdržíme

$$f(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}) = c\boldsymbol{u} \, . \, \bar{\boldsymbol{u}},$$
$$f(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}) = \bar{c}\bar{\boldsymbol{u}} \, . \, \boldsymbol{u}.$$

Protože bilineární forma f je symetrická a skalární součin také, odečtením obou rovnic dostaneme

$$(c - \bar{c})\, \boldsymbol{u} \, . \, \bar{\boldsymbol{u}} = 0.$$

Můžeme psát $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{u}_2$, kde $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbf{V}_n$. Potom

$$\boldsymbol{u} \, . \, \bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_1^2 + \boldsymbol{u}_2^2.$$

Tudíž $\boldsymbol{u} \, . \, \bar{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{R}$ a $\boldsymbol{u} \, . \, \bar{\boldsymbol{u}} > 0$ (vektor $\boldsymbol{u}$ je nenulový). Proto $c - \bar{c} = 0$ a číslo c je reálné.

Věta 4.6.2. Dva hlavní směry kvadriky $\mathbf{Q}$ odpovídající různým kořenům rovnice (6) jsou kolmé.

Důkaz. Nechť zmíněné hlavní směry jsou určeny vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$, které odpovídají číslům c, c'. Potom ze vztahu (3) vyplývá, že

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = c\boldsymbol{u} \, . \, \boldsymbol{u}',$$
$$f(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}) = c'\boldsymbol{u}' \, . \, \boldsymbol{u}.$$

Odtud plyne rovnost

$$(c - c')\, \boldsymbol{u} \, . \, \bar{\boldsymbol{u}} = 0.$$

Protože $c \neq c'$, musí platit $\boldsymbol{u} \, . \, \boldsymbol{u}' = 0$.

Věta 4.6.3. Ke každé kvadrice $\mathbf{Q}$ existuje ortonormální báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ tak, že všechny vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ určují hlavní směry kvadriky $\mathbf{Q}$.

Důkaz. Dokazujeme úplnou indukcí podle n (dimenze vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$). Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé, každý jednotkový vektor tvoří hledanou bázi. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro číslo $n - 1$. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ najdeme jeden hlavní směr $U_1 = [\{\boldsymbol{u}_1\}]$. Vektor $\boldsymbol{u}_1$ volíme jednotkový. Sestrojíme vektorový prostor $\mathbf{U}_1^{\perp}$ totálně kolmý na U_1 (množina všech vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n$ ortogonálních k $\boldsymbol{u}_1$). Zřejmě $\mathbf{U}_1^{\perp}$ má dimenzi $n - 1$. Pro kvadratickou formu

$f_2 \mid \mathbf{U}_1^{\perp}$ najdeme ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ podle indukčního předpokladu a $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ je zřejmě hledaná báze prostoru $\mathbf{V}_n$.

Věta 4.6.4. Nechť $\mathbf{V}'$ je množina všech vektorů generujících hlavní směry kvadriky $\mathbf{Q}$ odpovídající kořenu c' rovnice (6). Nechť v bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ sestrojené podle věty 4.6.3 odpovídají kořenu c' právě vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$. Potom $\mathbf{V}'$ je podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$ a $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$ je jeho báze.

Důkaz. Množina $\mathbf{V}'$ je podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$, protože je to množina všech řešení soustavy (5), v níž jsme položili $c = c'$. Zřejmě $[\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}] \subset \mathbf{V}'$. Kdyby dimenze podprostoru $\mathbf{V}'$ byla větší než k, byl by vektorový podprostor $\mathbf{V}'' = [\{\boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}] \cap \mathbf{V}'$ neprázdný. Vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}''$, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$ by pak byl podle věty 4.6.2 ortogonální ke všem vektorům $\boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, což není možné. Proto dimenze podprostoru $\mathbf{V}'$ je k a proto $[\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}] = \mathbf{V}'$.

Poznámka. Dokonce lze dokázat, že dimenze podprostoru $\mathbf{V}'$ je rovna násobnosti kořenu c. Toto tvrzení je zřejmé v bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ zvolené podle věty 4.6.3. Tvrzení v bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ by se dokázalo tak, že pomocí transformace souřadnic by se ukázalo, že rovnice (6) nezávisí na volbě ortonormální báze. Podrobný důkaz tohoto tvrzení provádět nebudeme.

Jestliže vektor $\boldsymbol{u}'$ generuje hlavní směr U' odpovídající kořenu c' rovnice (6), snadno určíme hodnotu $f_2(\boldsymbol{u}')$. Dosadíme-li do rovnice (3) místo vektoru $\boldsymbol{x}$ vektor $\boldsymbol{u}'$, dostaneme

$$f_2(\boldsymbol{u}') = c'\boldsymbol{u}'^2.$$

Zvolíme-li vektor $\boldsymbol{u}'$ tak, aby byl jednotkový, bude platit

$$f_2(\boldsymbol{u}') = c'. \tag{8}$$

Odtud vyplývá, že $U' \in \mathbf{Q}$ právě tehdy, je-li $c' = 0$. Navíc z rovnosti (3) vyplývá, že $c' = 0$ právě tehdy, je-li bod U' konjugován s každým nevlastním bodem, což platí právě tehdy, jestliže U' je buď singulární bod kvadriky $\mathbf{Q}$, nebo bod dotyku nevlastní nadroviny. Jestliže $c' \neq 0$, není směr U' konjugován sám se sebou. Jeho polární nadrovina je proto vlastní.

Definice 4.6.2. Polární nadrovina hlavního směru kvadriky $\mathbf{Q}$, který není bodem kvadriky $\mathbf{Q}$, se nazývá *osová nadrovina* kvadriky $\mathbf{Q}$. Osová nadrovina hlavního směru kuželosečky se nazývá *osa* kuželosečky.

Jestliže osová nadrovina ϱ je polární nadrovina hlavního směru U, je zřejmě na tento směr kolmá (plyne přímo z definice 4.6.1 a z definice 4.6.2).

Výpočet hlavních směrů provedeme zvlášť pro $n = 2$. Soustava (5) má potom tvar

$$\begin{aligned} (f_{11} - c)\,u_1 + f_{12}u_2 &= 0, \\ f_{21}u_1 + (f_{22} - c)\,u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Rovnice (6) má tvar

$$\begin{vmatrix} f_{11} - c, & f_{12} \\ f_{21}, & f_{22} - c \end{vmatrix} = 0,$$

tj. (protože $f_{12} = f_{21}$)

$$c^2 - c(f_{11} + f_{22}) + f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0. \tag{10}$$

Diskriminant této kvadratické rovnice pro c je

$$D = (f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2).$$

Provedeme-li naznačené operace, dokážeme, že

$$D = (f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}^2.$$

Zřejmě $D \geqq 0$. Odtud také vyplývá, že kořeny rovnice (10) jsou reálné.

Jestliže $D > 0$, je buď $f_{11} \neq f_{22}$, nebo $f_{12} \neq 0$. Pro každý kořen rovnice (10) má proto matice soustavy (9) hodnost 1 a za řešení má jediný směr. Existují tedy dva hlavní směry a podle věty 4.6.2 jsou kolmé.

Jestliže $D = 0$, musí platit $f_{11} = f_{22}$ a $f_{12} = 0$. Rovnice (10) má potom jeden dvojnásobný kořen f_{11}. Matice soustavy (9) je potom nulová a řešením soustavy (9) je každý směr. Všechny směry ve $\mathbf{V}_2$ jsou tedy v tomto případě hlavní. Rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$ v aritmetické bázi $\langle (1, P), \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, kde $P \in \mathbf{E}_n$ a $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ jsou ortonormální vektory, má tvar

$$f_{11}x_1^2 + f_{11}x_2^2 + 2f_{01}x_0x_1 + 2f_{02}x_0x_2 + f_{00}x_0^2 = 0. \tag{11}$$

Vyloučíme-li kuželosečky obsahující nevlastní přímku, bude platit $f_{11} \neq 0$. Můžeme přejít ke kartézské soustavě souřadnic určené v $\mathbf{E}_n^{\mathrm{C}}$ repérem $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$. Vydělením f_{11} a přechodem ke kartézským souřadnicím bodu X (píšeme $X = [x, y]$) upravíme rovnici (11) na tvar

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + r = 0, \tag{12}$$

kde $p = f_{01}/f_{11}$, $q = f_{02}/f_{11}$, $r = f_{00}/f_{11}$. Kuželosečka o této rovnici se nazývá *kružnice*. Kružnice takto definovaná se poněkud liší od kružnice definované pomocí vzdálenosti. Shodu pojmů bychom dostali, kdybychom připustili i vzdálenost nulovou nebo ryze imaginární.

Ukážeme si ještě jiný způsob, jak charakterizovat kružnici. Určíme průsečíky kružnice s nevlastní přímkou – do rovnice (11) dosadíme $x_0 = 0$. Dostaneme rovnici (platí $f_{11} \neq 0$) $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Řešením této rovnice získáme dva průsečíky, body $I_1 = (0, 1, \mathrm{i})$, $I_2 = (0, 1, -\mathrm{i})$. Tyto body se nazývají *izotropické body*. Protože izotropické body jsou průsečíky každé kružnice s nevlastní přímkou, nezávisí tyto body na volbě kartézské soustavy souřadnic. Obráceně dokážeme, že každá kuželosečka procházející izotropickými body je kružnice.

Mějme kuželosečku $\mathbf{Q}$, která v aritmetické bázi $\langle(1, P), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ má rovnici

$$f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 + 2f_{01}x_0x_1 + 2f_{02}x_0x_2 + f_{00}x_0^2 = 0.$$

Z podmínky $I_1 \in \mathbf{Q}$ vyplývá, že

$$f_{11} + 2f_{12}\mathrm{i} - f_{22} = 0.$$

Protože všechny koeficienty f_{ij}, $i, j = 0, 1, 2$ jsou reálné (v celé kapitole se omezujeme na studium kvadrik určených reálnou kvadratickou formou), musí platit $f_{11} = f_{22}$ a $f_{12} = 0$. Pokud tedy kuželosečka $\mathbf{Q}$ neobsahuje nevlastní přímku, je to kružnice.

Ukážeme si, že pomocí izotropických bodů můžeme popsat podobnosti v rovině $\overline{\mathbf{E}}_2^{\mathbb{C}}$. Zkoumejme afinní transformace roviny $\overline{\mathbf{E}}_2^{\mathbb{C}}$, které dvojici izotropických bodů zobrazí na sebe. Zřejmě pro každou takovou afinní transformaci φ_p mohou nastat dva případy

a) $\varphi_p(I_1) = I_1$ a $\varphi_p(I_2) = I_2$;
b) $\varphi_p(I_1) = I_2$ a $\varphi_p(I_2) = I_1$.

Nechť asociovaný homomorfismus $\bar{\varphi}$ k afinní transformaci φ roviny $\mathbf{E}_2^{\mathbb{C}}$ (φ_p je projektivní rozšíření transformace φ) je v bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$ dán rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Aritmetickým zástupcem bodu $I_1 = (0, 1, \mathrm{i})$ je vektor $\boldsymbol{i}_1 = 1 . \boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i} . \boldsymbol{v}_2$. Jeho obraz získáme z rovnic (13)

$$\bar{\varphi}(\boldsymbol{i}_1) = (a_{11} + \mathrm{i}a_{12}, a_{21} + \mathrm{i}a_{22}).$$

a) Nechť $\varphi_p(I_1) = I_1$ a $\varphi_p(I_2) = I_2$. Vektor $\bar{\varphi}(\boldsymbol{i}_1)$ je aritmetický zástupce bodu I_1 právě tehdy, je-li dvojice jeho souřadnic násobkem dvojice $(1, \mathrm{i})$, což platí, právě když

$$a_{21} + \mathrm{i}a_{22} = \mathrm{i}(a_{11} + \mathrm{i}a_{12}).$$

Tato rovnice je ekvivalentní rovnicím

$$a_{21} = -a_{12}, \quad a_{11} = a_{22}. \tag{14}$$

Stejné rovnice bychom dostali z rovnosti $\varphi_p(I_2) = I_2$. Rovnice (14) jsou však ekvivalentní s faktem, že transformace φ je přímá podobnost (viz odstavec 2.8).

b) Z podmínky $\varphi_p(I_1) = I_2$ nebo $\varphi_p(I_2) = I_1$ získáme stejným postupem jako v případě a) rovnice

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{11} = -a_{22},$$

což platí právě tehdy, je-li transformace φ nepřímá podobnost.

Podobně, jako jsme prováděli afinní klasifikaci kvadrik, můžeme provést i metrickou klasifikaci kvadrik v prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathbb{C}}$, tj. klasifikaci kvadrik vzhledem ke grupě všech shodností na prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathbb{C}}$. (Každá shodnost v prostoru $\mathbf{E}_n$ je afinní transformace a můžeme ji tedy rozšířit na transformaci prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathbb{C}}$ – shodnost prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathbb{C}}$.) Úloha se řeší, tak jako v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbb{C}}$, nalezením vhodné *kanonické báze* $\langle(1, P), \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\rangle$. Aby automorfismus prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ převádějící jednu kanonickou bázi do druhé kanonické báze určoval shodnost prostoru $\overline{\mathbf{E}}_n^{\mathbb{C}}$, budeme vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ volit tak, aby byly ortonormální. Nejdříve najdeme kanonickou bázi pro regulární kuželosečky v rovině $\overline{\mathbf{E}}_2^{\mathbb{C}}$.

Pro středovou kuželosečku $\mathbf{Q}$ zvolíme kanonickou bázi $\mathscr{B}' = \langle(1, S), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ tak, že S je střed kuželosečky $\mathbf{Q}$ a $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ je taková ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}_2$, že vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ určují hlavní směry. Jestliže hlavní směr U_i odpovídá číslu c_i, dostaneme podle (8) $f_2(\boldsymbol{u}_i) = c_i$, $i = 1, 2$. Protože $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ jsou ortogonální vektory, je $f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$. Rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$ v bázi $\mathscr{B}'$ tedy bude

$$f'_{00}x_0'^2 + c_1x_1'^2 + c_2x_2'^2 = 0, \tag{15}$$

kde $f'_{00} = f_2((1, S))$ a x_0', x_1', x_2' jsou homogenní souřadnice bodu $X \in \overline{\mathbf{E}}_2^{\mathbb{C}}$ v bázi $\mathscr{B}'$.

Jestliže máme kuželosečku $\mathbf{Q}$ dánu rovnicí v jiné aritmetické bázi $\mathscr{B}$, můžeme určit číslo f'_{00} podle vzorce (25) z odstavce 4.5.

Sestrojíme kanonickou bázi pro nestředové kuželosečky v $\overline{\mathbf{E}}_2^{\mathbb{C}}$ – paraboly. Parabola $\mathbf{Q}$ se dotýká nevlastní přímky, bod dotyku označíme U_1. Zřejmě U_1 je hlavní směr a odpovídá číslu $c_1 = 0$. Směr U_2 na něj kolmý je také hlavní a odpovídající číslo $c_2 \neq 0$. Proto $U_2 \notin \mathbf{Q}$. Polára bodu U_2 je vlastní přímka a protíná kvadriku $\mathbf{Q}$ v bodě U_1 a v dalším vlastním bodě A. Zvolíme jednotkové vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ (vektor $\boldsymbol{u}_i$ generuje směr U_i). Vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ jsou pak ortonormální.

Položme $\mathscr{B}' = \langle(1, A), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$. Nechť rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$ v této bázi je

$$\sum_{i,j=0}^{2} f'_{ij}x_i'x_j' = 0. \tag{16}$$

Protože body U_1, U_2 jsou konjugované, je $f'_{12} = f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$. Podobně dostaneme $f'_{00} = 0$, $f'_{11} = 0$, $f'_{02} = 0$. Ze vztahu (8) vyplývá, že $f'_{22} = c_2$. Rovnice (16) má tedy tvar

$$2f'_{01}x_0'x_1' + c_2x_2'^2 = 0, \tag{17}$$

kde $f'_{01} = f((1, A), \boldsymbol{u}_1)$. Nechť $P \in \mathbf{E}_2$. Označme

$$\boldsymbol{w} = (1, A) - (1, P).$$

Zřejmě $\boldsymbol{w} = A - P \in \mathbf{V}_2$. Potom

$$f((1, A), \boldsymbol{u}_1) - f((1, P), \boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1).$$

Protože U_1 je konjugován s každým nevlastním bodem, je $f(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1) = 0$, a proto

$$f((1, A), \boldsymbol{u}_1) = f((1, P), \boldsymbol{u}_1) \tag{18}$$

pro každý bod $P \in \mathbf{E}_2$. Pomocí vzorce (18) můžeme při vhodné volbě bodu P snáze určit koeficient f'_{01}. Postup nalezení kanonické báze a určení rovnice kuželosečky v kanonické bázi si ozřejmíme na příkladech.

Příklad 1. V kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ dané repérem $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ v rovině $\mathbf{E}_2^C$ je dána kuželosečka $\mathbf{Q}$ rovnicí

a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$,

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2y - 1 = 0$.

Určete kanonickou bázi kuželosečky $\mathbf{Q}$ a napište rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ v této bázi.

Řešení. Napíšeme rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ v homogenních souřadnicích v bázi $\langle (1, P), \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ a určíme matici $\boldsymbol{F}$ kuželosečky.

a) $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_0^2 = 0$

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 1 \\ -1, & 2, & 2 \\ 1, & 2, & 5 \end{pmatrix}$$

Determinant z matice $\boldsymbol{F}$ je $F = 1$. Tudíž kuželosečka $\mathbf{Q}$ je regulární. Dále $F_{00} = 6$, tudíž kuželosečka je středová ($F_{00} \neq 0$) a je to elipsa ($F_{00} > 0$). Její střed je $S = (F_{00}, F_{01}, F_{02}) = (6, 7, -4)$. V kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ je $S = [7/6, -4/6]$. Rovnice (6) má tvar

$$\begin{vmatrix} 2 - c, & 2 \\ 2, & 5 - c \end{vmatrix} = 0,$$

tj.

$$c^2 - 7c + 6 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou $c_1 = 1$, $c_2 = 6$. Vektory $\boldsymbol{u}'_1$, $\boldsymbol{u}'_2$ určující hlavní směry odpovídající nalezeným kořenům c_1, c_2 dostaneme jako řešení soustavy (9). Pro c_1 má soustava (9) tvar:

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &= 0 \\ 2u_1 + 4u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Jejím řešením je vektor $\boldsymbol{u}'_1 = (2, -1)$. Podobně $\boldsymbol{u}'_2 = (1, 2)$. Kanonická báze kuželosečky $\mathbf{Q}$ je $\langle (1, S), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$, kde $\boldsymbol{u}_i = (1/\|\boldsymbol{u}'_i\|) \cdot \boldsymbol{u}'_i$ pro $i = 1, 2$, a tedy $\boldsymbol{u}_1 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$, $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ v kanonické bázi dostaneme z rovnice (15) (viz vzorec (25) z odstavce 4.5)

$$(1/6)\, x_0'^2 + x_1'^2 + 6x_2'^2 = 0,$$

kuželosečka je imaginární elipsa.

b) $x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 2x_0x_2 - x_0^2 = 0$

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 3 \\ 1, & 3, & 9 \end{pmatrix}$$

Platí $F = -1$, $F_{00} = 0$. Kuželosečka je parabola. Rovnice (6) má tvar

$$c^2 - 10c = 0.$$

Jejím kořenům $c_1 = 0$, $c_2 = 10$ odpovídají hlavní směry určené vektory $\boldsymbol{u}'_1 = (3, -1)$, $\boldsymbol{u}'_2 = (1, 3)$. Polára bodu U_2 (osa paraboly) má rovnici

$$(0, 1, 3)\, \boldsymbol{F}(x_0, x_1, x_2)^T = 0,$$

tj.

$$3x_0 + 10x_1 + 30x_2 = 0.$$

Najdeme průsečík této osy a paraboly. Osu určíme dvěma body — bodem $U_1 = (0, 3, -1)$ a např. bodem $B = (10, 0, -1)$. Parametrické vyjádření osy je

$$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{u}'_1 + s\boldsymbol{b},$$

kde $\boldsymbol{b} = (10, 0, -1)$. Dosadíme do rovnice $f_2(\boldsymbol{x}) = 0$. Dostaneme

$$f(r\boldsymbol{u}'_1 + s\boldsymbol{b}, r\boldsymbol{u}'_1 + s\boldsymbol{b}) = 0.$$

Po úpravě (viz např. příklad 3 z odstavce 4.4) obdržíme

$$r^2 f_2(\boldsymbol{u}'_1) + 2rsf(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{b}) + s^2 f_2(\boldsymbol{b}) = 0. \tag{19}$$

Zřejmě $f_2(\boldsymbol{u}'_1) = 0$ (platí $U'_1 \in \mathbf{Q}$). Pomocí maticového zápisu určíme čísla $f(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{b})$ a $f_2(\boldsymbol{b})$. Dostaneme $f_2(\boldsymbol{b}) = -111$, $f(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{b}) = -10$. Číslo $f(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{b})$ jsme mohli též dostat pomocí vzorce (18). Z rovnice (19) dostáváme dvě řešení, která jsou až na násobek určena jednoznačně: $r_1 = 1$, $s_1 = 0$ a $r_2 = 111$, $s_2 = -20$. První řešení určuje bod U_1, druhé řešení dává hledaný průsečík A paraboly s osou: $\boldsymbol{a} = 111(0, 3, -1) - 20(10, 0, -1) = (-200, 333, -91)$. V lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ je $A = [-333/200, 91/200]$. Kanonická báze je $\langle (1, A), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$, kde $\boldsymbol{u}_1 = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$, $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$. Napíšeme rovnici paraboly v kanonické bázi (rovnice (17)). Koeficient f'_{01} určíme pomocí vzorce (18) — bod P je počátek soustavy souřadnic. Dostaneme

$$f'_{01} = (1, 0, 0)\, \boldsymbol{F}(0, 3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}) = -1/\sqrt{10}.$$

Rovnice paraboly je

$$-(2/\sqrt{10})\, x'_0 x'_1 + 10x_2'^2 = 0.$$

Přejdeme-li k souřadnicím v kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$ určené repérem $\mathscr{R}' = \langle A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$, dostaneme rovnici paraboly ve tvaru

$$-(2/\sqrt{10})\, x' + 10y'^2 = 0.$$

Mohli bychom též řešit příklady na napsání rovnice kuželosečky z daných prvků, přičemž by mimo jiné byla dána osa kuželosečky (osa je zvláštní případ průměru kuželosečky). Tyto příklady však byly řešeny v odstavci 4.5. Jejich řešení je proto ponecháno do cvičení.

Protože kanonická báze je jednoznačně určena regulární kuželosečkou (kromě kružnice), budou dvě kuželosečky shodné právě tehdy, jsou-li jejich rovnice v odpovídajících kanonických bázích až na nenulový násobek stejné (tvrzení zřejmě platí i pro kružnici). Tím jsme vlastně provedli metrickou klasifikaci kuželoseček. Máme-li rovnici kuželosečky v její kanonické bázi, můžeme získat její rovnici v příslušné kartézské soustavě souřadnic (jako v příkladu 1b). Z této rovnice je již snadné určit u středových kuželoseček velikosti poloos a u paraboly parametr (viz též kapitola 3 v [G]). Všimněme si ještě, že k tomu, abychom nalezli rovnici kuželosečky v kanonické bázi, tuto kanonickou bázi nepotřebujeme určovat. Nalezení velikosti poloos, resp. parametru je pak podstatně kratší, než když se to provádí transformací soustavy souřadnic jako v kapitole 3 v [G].

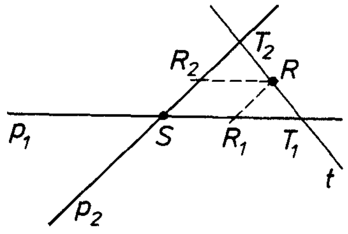
Metrickou klasifikaci kvadrik v prostoru $\mathbf{E}_n^C$ podrobně provádět nebudeme, pouze naznačíme postup. Opět budeme hledat kanonickou bázi kvadriky. Je-li $\mathbf{Q}$ středová kvadrika, vezmeme bázi $\langle(1, S), \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\rangle$, kde S je střed a $\langle\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\rangle$ je ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}_n$, přičemž vektor $\boldsymbol{u}_i$ generuje hlavní směr pro $i = 1, \ldots, n$ (viz věta 4.6.3). Kanonických bází kvadriky může být ovšem více. Je nutno ukázat, že jsou-li $\langle(1, S), \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\rangle$ a $\langle(1, S'), \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n\rangle$ dvě takové báze, má v nich kvadrika $\mathbf{Q}$ stejnou rovnici. Snadno se zjistí, že vektor $\boldsymbol{w} = S - S' = (1, S) - (1, S')$ určuje singulární bod kvadriky. Odtud dostaneme rovnost $f_2((1, S)) = f_2((1, S'))$. Nyní již v obou kanonických bázích má kvadrika stejnou rovnici podle věty 4.6.4.

Nechť kvadrika $\mathbf{Q}$ je nestředová a regulární. Zjistíme, že všechny osové nadroviny se protínají ve vlastní přímce – ose kvadriky. Za kanonickou bázi vezmeme bázi $\langle(1, A), \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\rangle$, kde A je vlastní průsečík osy kvadriky s kvadrikou a $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ jsou ortonormální vektory určující hlavní směry.

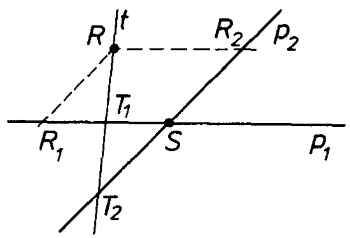
Zbývá případ, kdy $\mathbf{Q}$ je nestředová a singulární kvadrika. Buď $\mathbf{P}'$ její vrchol a $\mathbf{V}'$ aritmetický základ podprostoru $\mathbf{P}'$. Zřejmě $\mathbf{P}' \subset v$ (v je nevlastní nadrovina). Nechť $\mathbf{P}''$ je podprostor prostoru $\mathbf{E}_n^C$, jehož zaměření je $\mathbf{V}'^{\perp}$ (vektorový prostor totálně kolmý na $\mathbf{V}'$). Potom kvadrika $\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}''$ je regulární a nestředová (viz věta 4.4.6 a postup použitý v důkazu věty 4.5.4). Nyní vezmeme kanonickou bázi kvadriky $\mathbf{Q} \cap \mathbf{P}''$ a doplníme ji ortonormální bází prostoru $\mathbf{V}'$. Dostaneme kanonickou bázi kvadriky $\mathbf{Q}$.

Pro nestředové kvadriky bychom opět měli dokázat, že ve dvou různých kanonických bázích má kvadrika stejnou rovnici. Toto tvrzení bychom dokazovali podobně jako v případě středových kvadrik.

Další metrické vlastnosti kvadrik a speciálně kuželoseček byly již probrány v kapitole 3 v [G]. Proto na závěr odstavce dokážeme jen jedno tvrzení, mající konstrukční využití. Formulaci tohoto tvrzení i jeho důkaz budeme sledovat na obr. 48a, b.



Obr. 48a



Obr. 48b

Mějme pro středovou kuželosečku $\mathbf{Q}$ dány sdružené průměry p_1, p_2. Jejich průsečík S je střed kuželosečky. Dále mějme dánu tečnu t s bodem dotyku R. Nechť $R \notin p_1$ a $R \notin p_2$. Snadno zjistíme, že v případě, že tečna t je rovnoběžná s některým z průměrů p_1, p_2 nebo prochází bodem S, je kuželosečka $\mathbf{Q}$ singulární. Nechť tedy nenastává žádná z uvedených možností. Sestrojíme body $T_i = t \cap p_i$, $i = 1, 2$. Dále sestrojíme body $R_i \in p_i$, $i = 1, 2$ tak, aby $\overleftrightarrow{RR_1} \parallel p_2$ a $\overleftrightarrow{RR_2} \parallel p_1$. Snadno lze dokázat, že jsou-li polopřímky $\overrightarrow{ST_2}$ a $\overrightarrow{SR_2}$ k sobě opačné, platí $\overrightarrow{SR_1} = \overrightarrow{ST_1}$ (obr. 48b). Jsou tedy právě tyto dvě možnosti:

a) $\overrightarrow{SR_1} = \overrightarrow{ST_1}$ a $\overrightarrow{SR_2} = \overrightarrow{ST_2}$,

nebo

b) $\overrightarrow{SR_1} = \overrightarrow{ST_1}$ a $\overrightarrow{SR_2} \neq \overrightarrow{ST_2}$ nebo
$\overrightarrow{SR_1} \neq \overrightarrow{ST_1}$ a $\overrightarrow{SR_2} = \overrightarrow{ST_2}$

Těmto možnostem odpovídá situace na obr. 48a, b. Nechť $\boldsymbol{u}_i$ je jednotkový vektor ze zaměření přímky p_i, $i = 1, 2$. Napíšeme rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ v bázi $\mathscr{B} = \langle(1, S), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$. Tato báze je zřejmě polární báze kuželosečky $\mathbf{Q}$. Rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$ má tedy tvar

$$f_{00}x_0^2 + f_{11}x_1^2 + f_{22}x_2^2 = 0 \tag{20}$$

a v lineárních souřadnicích (lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}$ je určena repérem $\mathscr{R} = \langle S; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$)

$$f_{00} + f_{11}x^2 + f_{22}y^2 = 0. \tag{21}$$

Nechť $R = [r_1, r_2]$ v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, a tedy $R = (1, r_1, r_2)$ v bázi $\mathscr{B}$.

Protože $R \in \mathbf{Q}$, musí platit

$$f_{00} + f_{11}r_1^2 + f_{22}r_2^2 = 0.$$

Tečna t je polára bodu R. Její rovnice tedy je

$$f_{00}x_0 + f_{11}x_1r_1 + f_{22}x_2r_2 = 0,$$

resp.

$$f_{00} + f_{11}xr_1 + f_{22}yr_2 = 0.$$

Protože $t \nparallel p_1$ a $t \nparallel p_2$, platí $f_{11} \neq 0$ a $f_{22} \neq 0$. Protože $S \notin t$, platí $f_{00} \neq 0$. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ je tedy regulární. Snadno spočítáme průsečíky tečny t se souřadnicovými osami. Dostaneme $T_1 = [-f_{00}/(f_{11}r_1), 0]$, $T_2 = [0, -f_{00}/(f_{22}r_2)]$. Zřejmě $R_1 = [r_1, 0]$, $R_2 = [0, r_2]$. Dále $\overrightarrow{SR_1} = \overrightarrow{ST_1}$ právě tehdy, mají-li čísla $-f_{00}/(f_{11}r_1)$ a r_1 stejnou signaturu, tj. platí-li $-f_{00}/f_{11} > 0$. Podobně $\overrightarrow{SR_2} = \overrightarrow{ST_2}$ právě tehdy, je-li $-f_{00}/f_{22} > 0$. Zvolíme rovnici kuželosečky tak, aby $f_{00} < 0$. Potom platí v případě a) $f_{11} > 0$, $f_{22} > 0$ a kuželosečka $\mathbf{Q}$ je elipsa a v případě b) buď $f_{11} > 0$ a $f_{22} < 0$, nebo $f_{11} < 0$ a $f_{22} > 0$ a kuželosečka je hyperbola. Snadno určíme průsečíky přímek p_1 a p_2 s kuželosečkou $\mathbf{Q}$. Nechť $p_i \cap \mathbf{Q} = \{A_i, A'_i\}$, $i = 1, 2$. Např. body A_1, A'_1 dostaneme řešením rovnice (21) s rovnicí $y = 0$ (rovnice přímky p_1). Je-li $f_{11} > 0$, bude $A_1 = [\sqrt{-f_{00}/f_{11}}, 0]$, $A'_1 = [-\sqrt{f_{00}/f_{11}}, 0]$ (pro $f_{11} < 0$ neexistují reálné průsečíky přímky p s kuželosečkou $\mathbf{Q}$). Protože $\|\boldsymbol{u}_1\| = 1$, je $|SA_1| = \sqrt{-f_{00}/f_{11}}$, $|SR_1| = |r_1|$, $|ST_1| = |f_{00}/(f_{11}r_1)|$. Odtud vyplývá, že

$$|SA_1|^2 = |SR_1| \,.\, |ST_1|. \tag{22}$$

Samozřejmě $|SA'_1| = |SA_1|$. Podobně bychom určili i vzdálenost $|SA_2|$ v případě, že $f_{22} > 0$. Na sdružených průměrech elipsy tímto způsobem najdeme jejich průsečíky s elipsou.

Nechť nyní kuželosečka $\mathbf{Q}$ je hyperbola a nechť např. $f_{11} > 0$, $f_{22} < 0$ (stále předpokládáme $f_{00} < 0$). Popsaným způsobem určíme body A_1, A'_1. Dále sestrojíme body $B_2, B'_2 \in p_2$ tak, aby $B_2 \neq B'_2$ a

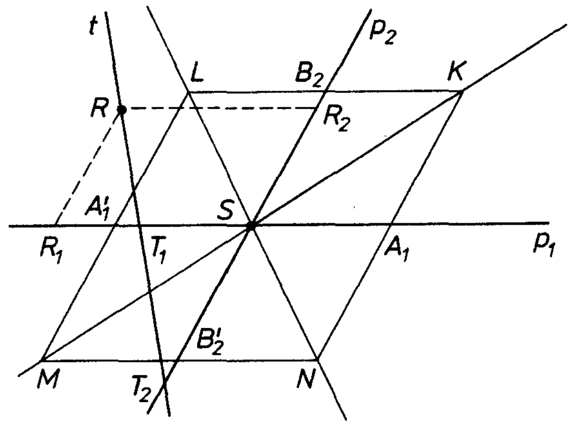
$$|SB_2|^2 = |SB'_2|^2 = |SR_2|\,|ST_2|. \tag{23}$$

Protože $|SR_2| = |r_2|$, $|ST_2| = |f_{00}/(f_{22}r_2)|$, je $|SB_2| = |SB'_2| = \sqrt{|f_{00}/f_{22}|}$. Body A_1, A'_1, resp. B_2, B'_2 vedeme rovnoběžky s přímkou p_2, resp. p_1. Dokážeme, že úhlopříčky rovnoběžníku, který tímto způsobem vznikne, jsou asymptoty hyperboly $\mathbf{Q}$ (obr. 49). Vrcholy popsaného rovnoběžníku jsou body $K = [|SA_1|, |SB_2|]$, $L = [-|SA_1|, |SB_2|]$, $M = [-|SA_1|, -|SB_2|]$, $N = [|SA_1|, -|SB_2|]$. Úhlopříčky rovnoběžníku $KLMN$ jsou přímky SK a SL o rovnicích

$$|SB_2|\,x - |SA_1|\,y = 0, \quad |SB_2|\,x + |SA_1|\,y = 0,$$

tj.

$$\sqrt{|f_{00}/f_{22}|}\,x - \sqrt{-f_{00}/f_{11}}\,y = 0,$$
$$\sqrt{|f_{00}/f_{22}|}\,x + \sqrt{-f_{00}/f_{11}}\,y = 0.$$



Obr. 49

Po zkrácení rovnic číslem $\sqrt{|f_{00}|}$ dostaneme

$$\frac{x}{\sqrt{|f_{22}|}} - \frac{y}{\sqrt{f_{11}}} = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{|f_{22}|}} + \frac{y}{\sqrt{f_{11}}} = 0. \tag{24}$$

Najdeme asymptoty hyperboly $\mathbf{Q}$. Nevlastní body hyperboly určíme z rovnice (20) (dosazením $x_0 = 0$). Dostaneme rovnici

$$f_{11}x_1^2 + f_{22}x_2^2 = 0.$$

Protože $f_{11} > 0$ a $f_{22} < 0$, upravíme tuto rovnici na tvar

$$(\sqrt{f_{11}}x_1 + \sqrt{|f_{22}|}\,x_2)(\sqrt{f_{11}}x_1 - \sqrt{|f_{22}|}\,x_2) = 0.$$

Nevlastní body hyperboly tedy leží na přímkách

$$\begin{aligned} \sqrt{f_{11}}x_1 + \sqrt{|f_{22}|}\,x_2 = 0,\\ \sqrt{f_{11}}x_1 - \sqrt{|f_{22}|}\,x_2 = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

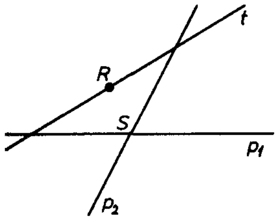
Protože na těchto přímkách leží zřejmě i bod S, jsou rovnice (25) rovnicemi asymptot. Po přechodu k lineárním souřadnicím zřejmě dostaneme rovnice (24). Tím je tvrzení dokázáno.

Ukážeme si konstrukční využití právě vyložené teorie.

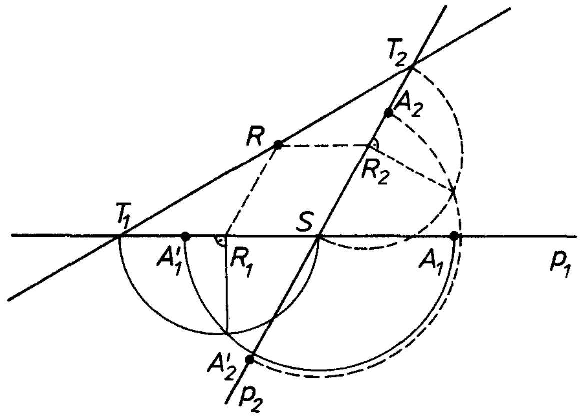
Příklad 2. Na obr. 50 je dána elipsa sdruženými průměry p_1, p_2 a tečnou t s bodem dotyku R. Určete průsečíky průměrů p_1, p_2 s elipsou.

Řešení. Hledané průsečíky A_1, A'_1, A_2, A'_2 určíme pomocí Euklidovy věty ze vzorce (22). Postup konstrukce viz obr. 51.

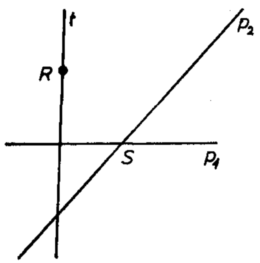
Příklad 3. Na obr. 52 je dána hyperbola sdruženými průměry p_1, p_2 a tečnou t s bodem dotyku R. Určete hlavní osu hyperboly, její průsečíky s hyperbolou a asymptoty hyperboly.



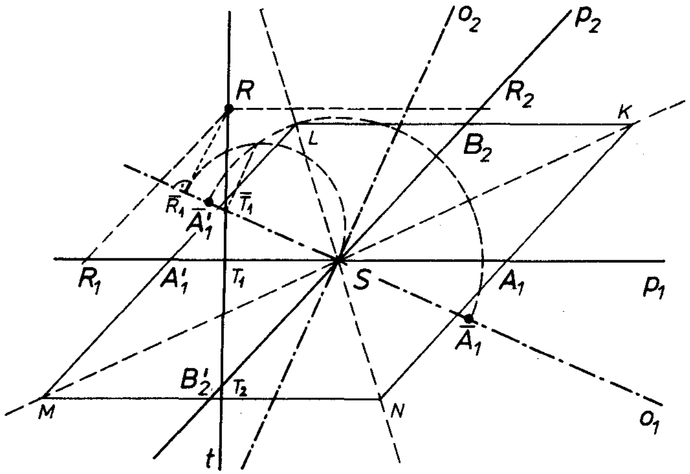
Obr. 50



Obr. 51



Obr. 52



Obr. 53

Řešení. Postup sledujeme na obr. 53. Pomocí Euklidovy věty najdeme body A_1, $A'_1 \in p_1$ a B_2, $B'_2 \in p_2$ tak, aby platily vztahy (22), (23) (z důvodu přehlednosti obrázku není tato konstrukce vyznačena). Sestrojíme rovnoběžník $KLMN$ (viz obr. 49). Jeho úhlopříčky jsou asymptoty hyperboly. Osy o_1, o_2 úhlů, které asymptoty svírají, jsou osy hyperboly. Z polohy tečny t a bodu dotyku R je zřejmé, která z os o_1, o_2 protíná hyperbolu – je to osa o_1. Její průsečíky $\bar{A}_1$, $\bar{A}'_1$

s hyperbolou určíme podle vzorce (22) z bodů $\bar{R}_1$ a $\bar{T}_1$ (konstrukce je na obr. 53 skutečně provedena). Tím je příklad vyřešen.

Cvičení

1. Pro danou kuželosečku $\mathbf{Q}$ zjistěte, zda je regulární nebo singulární. Je-li kuželosečka $\mathbf{Q}$ singulární, určete přímky, které ji tvoří. Jestliže kuželosečka $\mathbf{Q}$ je regulární, určete její střed S (je-li $\mathbf{Q}$ středová kuželosečka), resp. vrchol V (je-li $\mathbf{Q}$ parabola), vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ tvořící ortonormální bázi a určující hlavní směry a napište rovnici kuželosečky $\mathbf{Q}$ v kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ určené repérem $\langle S; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$, resp. $\langle V; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ je přitom dána následující rovnicí

a) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$,
b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3 = 0$,
c) $-3x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x - 1 = 0$,
d) $4x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$,
e) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9 = 0$,
f) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$,
g) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 4y + 2 = 0$,
h) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 5 = 0$.

2. Napište rovnici kuželosečky, je-li v dané kartézské soustavě souřadnic dáno:
a) $x + y + 2 = 0$ je osa, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ určuje směr asymptoty, $x = 1$ je tečna s bodem dotyku $T = [1, 0]$.
b) $x + 2y = 0$ je osa, kuželosečka je parabola a souřadnicová osa x je tečna s bodem dotyku $T = [1, 0]$.

4.7 Svazky kvadrik

V kapitole 1 v [G] jsme zkoumali svazky nadrovin. Přitom jsme každou nadrovinu měli určenou lineární funkcí (vlastně rovnicí). Svazek nadrovin byla množina všech nadrovin přiřazených nenulovým lineárním funkcím z dvojrozměrného vektorového podprostoru prostoru všech lineárních funkcí. U kvadrik je situace obdobná: Všechny kvadratické formy na vektorovém v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$ prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ tvoří vektorový prostor s obvyklými operacemi (sčítání kvadratických forem a násobení kvadratické formy číslem z $\mathbf{C}$). Každé nenulové kvadratické formě je přiřazena kvadrika v prostoru $\overline{\mathbf{A}_n^{\mathrm{C}}}$. Přitom dvěma kvadratickým formám jsou přiřazeny stejné kvadriky právě tehdy, je-li jedna z těchto forem násobkem druhé kvadratické formy. Můžeme tedy definovat svazky kvadrik téměř stejně jako jsme definovali svazky nadrovin. Právě tak můžeme na svazky kvadrik převést některá tvrzení i s důkazy.

Definice 4.7.1. Množina $\mathbf{S}$ kvadrik v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ přiřazených nenulovým kvadratickým formám z dvojrozměrného prostoru kvadratických forem na vektorovém prostoru $\mathbf{W}_{n+1}$ se nazývá *svazek kvadrik.*

Protože dvě lineárně nezávislé kvadratické formy určují právě jeden dvojrozměrný vektorový prostor kvadratických forem, platí následující tvrzení:

Věta 4.7.1. Ke každým dvěma různým kvadrikám prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ existuje právě jeden svazek kvadrik, který je obsahuje.

Nechť dvě různé kvadriky $\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2$ v prostoru $\overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ jsou určené po řadě kvadratickými formami f_2^1, f_2^2. Označme $\mathbf{S}$ svazek kvadrik obsahující kvadriky $\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2$. Protože platí věta 4.7.1, říkáme, že svazek $\mathbf{S}$ je určen kvadrikami $\mathbf{Q}^1$ a $\mathbf{Q}^2$. Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}$ kvadrika určená kvadratickou formou f_2, zřejmě existují čísla $k_1, k_2 \in \mathbf{C}$ tak, že

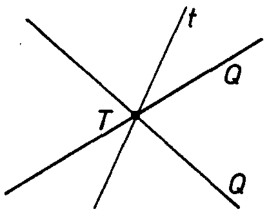
(1) $$f_2 = k_1 f_2^1 + k_2 f_2^2.$$

Rovnice kvadriky $\mathbf{Q}$ je pak

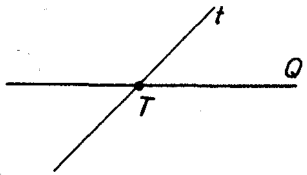
(2) $$k_1 f_2^1(\mathbf{x}) + k_2 f_2^2(\mathbf{x}) = 0.$$

Věta 4.7.2. Nechť kvadriky $\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2 \subset \overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ určují svazek kvadrik $\mathbf{S}$. Jestliže bod $A \in \overline{\mathbf{A}}_n^{\mathbf{C}}$ leží na obou kvadrikách $\mathbf{Q}^1$ a $\mathbf{Q}^2$, potom leží na každé kvadrice svazku $\mathbf{S}$. Jestliže bod A neleží alespoň na jedné z kvadrik $\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2$, potom existuje právě jedna kvadrika $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}$ tak, že $A \in \mathbf{Q}$.

Důkaz. Věta je zřejmá, dosadíme-li aritmetického zástupce $\boldsymbol{a}$ bodu A do rovnice (2) kvadriky $\mathbf{Q}$. (Viz též analogická věta pro svazky nadrovin — věta 1.5.10 v [G]).



Obr. 54a



Obr. 54b

Dále se omezíme na speciální případ svazků kvadrik — na svazky kuželoseček v rovině $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$. Pro další práci bude vhodné, abychom pozměnili pojem tečna kuželosečky. Tečna kuželosečky $\mathbf{Q}$ bude každá přímka p, pro kterou platí buď $p \subset \mathbf{Q}$, nebo množina $p \cap \mathbf{Q}$ je jednobodová. Každý bod $A \in p \cap \mathbf{Q}$ pak nazýváme bod dotyku přímky p. Proti dřívějšku tedy bereme za tečny i přímky protínající kuželosečku právě jen v singulárním bodě a tento bod považujeme za bod

dotyku. Singulární kuželosečky v rovině $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$ jsou buď dvě různé přímky, nebo jedna přímka. V prvním případě je vrcholem kuželosečky průsečík těchto přímek, v druhém případě je celá přímka tvořící kuželosečku také její vrchol. Příklady netypických tečen kuželosečky $\mathbf{Q}$ vidíme na obr. 54a, b. Tečna je označena t a její bod dotyku T.

Věta 4.7.3. Množina všech kuželoseček v rovině $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$, které obsahují čtyři dané různé body A, B, C, D neležící na jedné přímce, je svazek.

Důkaz. Zvolíme aritmetickou bázi $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ tak, aby tři body neležící na přímce byly souřadnicové. Nechť např. $A = U_0$, $B = U_1$, $C = U_2$ a $D = (d_0, d_1, d_2)$, přičemž alespoň dvě z čísel d_0, d_1, d_2 jsou nenulová. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ o rovnici

(4) $$\sum_{i,j=0}^{n} f_{ij} x_i x_j = 0$$

obsahuje body U_0, U_1, U_2, právě když $f_{00} = f_{11} = f_{22} = 0$. Její rovnice tedy je

(5) $$f_{01}x_0x_1 + f_{02}x_0x_2 + f_{12}x_1x_2 = 0.$$

Aby platilo $D \in \mathbf{Q}$, musí platit

(6) $$f_{01}d_0d_1 + f_{02}d_0d_2 + f_{12}d_1d_2 = 0.$$

Alespoň jedno z čísel d_0d_1, d_0d_2, d_1d_2 je nenulové. Proto všechna řešení (f_{01}, f_{02}, f_{12}) rovnice (6) tvoří vektorový prostor dimenze 2. Jestliže trojice $(f_{01}^1, f_{02}^1, f_{12}^1)$ a $(f_{01}^2, f_{02}^2, f_{12}^2)$ tvoří bázi prostoru řešení, existují ke každému řešení (f_{01}, f_{02}, f_{12}) čísla $k_1, k_2 \in \mathbf{C}$ tak, že

$$(f_{01}, f_{02}, f_{12}) = k_1(f_{01}^1, f_{02}^1, f_{12}^1) + k_2(f_{01}^2, f_{02}^2, f_{12}^2).$$

Dosadíme-li za čísla f_{01}, f_{02}, f_{12} do rovnice (5), vidíme, že platí: Kuželosečka $\mathbf{Q}$ prochází body A, B, C, D právě tehdy, jestliže existují čísla k_1, $k_2 \in \mathbf{C}$ tak, že její rovnice je

(7) $$k_1(f_{01}^1x_0x_1 + f_{02}^1x_0x_2 + f_{12}^1x_1x_2) + \\ + k_2(f_{01}^2x_0x_1 + f_{02}^2x_0x_2 + f_{12}^2x_1x_2) = 0.$$

Položíme-li pro $i = 1, 2$

$$f_2^i(\mathbf{x}) = f_{01}^i x_0x_1 + f_{02}^i x_0x_2 + f_{12}^i x_1x_2,$$

dostaneme rovnici (2) kvadriky svazku. Tím je věta dokázána.

Další dvě věty se jak tvrzením, tak důkazem příliš neliší od právě dokázané věty. Proto jejich důkaz podstatně zestručníme.

Věta 4.7.4. Mějme v rovině $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$ dány tři různé body A, B, C a takovou přímku t_A, že $A \in t_A$ a alespoň jeden z bodů B, C neleží na přímce t_A. Potom množina všech kuželoseček, které obsahují body B, C a pro něž je přímka t_A tečna s bodem dotyku A, je svazek kuželoseček.

Důkaz. Nechť např. $B \notin t_A$. Zvolíme aritmetickou bázi $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ tak, že $U_0 = A$, $U_1 = B$, $U_2 \in t_A$. Nechť $C = (c_0, c_1, c_2)$. Protože $A \neq C \neq B$, neplatí ani $c_1 = c_2 = 0$, ani $c_0 = c_2 = 0$. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ o rovnici (4) obsahuje body U_0, U_1 právě tehdy, když $f_{00} = f_{11} = 0$, a přímka t_A je tečna právě tehdy, když body U_0, U_2 jsou konjugované, tj. platí $f_{02} = 0$. Její rovnice tedy je

$$2f_{01}x_0x_1 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = 0. \tag{8}$$

Aby platilo $C \in \mathbf{Q}$, musí platit

$$2f_{01}c_0c_1 + 2f_{12}c_1c_2 + f_{22}c_2^2 = 0.$$

Zřejmě alespoň jedno z čísel c_0c_1, c_1c_2, c_2^2 je nenulové. Tvrzení již dokážeme stejným postupem jako v předešlé větě.

Věta 4.7.5. Mějme v rovině $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$ dány dva různé body A, B a dvě různé přímky t_A, t_B tak, že $A \in t_A$, $B \in t_B$. Potom množina všech kuželoseček, pro něž přímka t_A je tečna s bodem dotyku A a přímka t_B je tečna s bodem dotyku B, je svazek kuželoseček.

Důkaz. Zřejmě buď $t_A \neq \overleftrightarrow{AB}$, nebo $t_B \neq \overleftrightarrow{AB}$. Nechť např. $t_A \neq \overleftrightarrow{AB}$. Zvolíme aritmetickou bázi jako v předešlé větě. Zvolme $C \in t_B$ tak, aby $C \neq B$. Potom $C = (c_0, c_1, c_2)$, přičemž alespoň jedno z čísel c_0, c_2 je nenulové. Kuželosečka $\mathbf{Q}$ obsahující bod B a mající tečnu t_A s bodem dotyku A má rovnici (8). Přidáme podmínku, že body B, C jsou konjugované. Body $X = (x_0, x_1, x_2)$ a $Y = (y_0, y_1, y_2)$ jsou konjugované, právě když

$$f_{01}x_0y_1 + f_{01}x_1y_0 + f_{12}x_1y_2 + f_{12}x_2y_1 + f_{22}x_2y_2 = 0.$$

Podmínka konjugovanosti bodů $B = (0, 1, 0)$ a $C = (c_0, c_1, c_2)$ tedy je

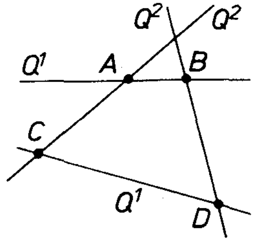
$$f_{01}c_0 + f_{12}c_2 = 0.$$

Dále postupujeme již stejně jako při důkazu věty 4.7.3.

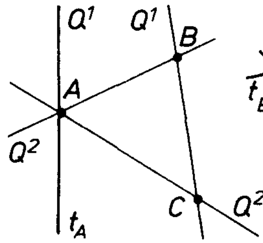
Samozřejmě ne každý svazek kuželoseček v rovině $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$ je jeden ze svazků, které jsme popsali ve větách 4.7.3, 4.7.4 a 4.7.5. Dalo by se ukázat, že kromě svazků popsaných v těchto větách existují ještě další dva typy svazků. K jejich popisu bychom však potřebovali další složitější aparát, a proto tyto typy svazků nebudeme zkoumat.

Pokud určujeme svazek kuželoseček dvěma kuželosečkami $\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2$, bývá nejvýhodnější, je-li to možné, zvolit za $\mathbf{Q}^1$ a $\mathbf{Q}^2$ singulární kuželosečky. U singulárních kuželoseček se totiž nejsnáze určí jejich rovnice. Jestliže je singulární kuželosečka $\mathbf{Q}$ tvořena přímkami p, q a přímka p, resp. q je určena lineární

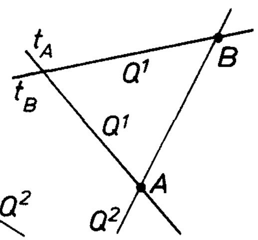
formou h_p, resp. h_q, je kuželosečka $\mathbf{Q}$ určena kvadratickou formou $f_2 = h_p \, . \, h_q$, tj. rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$ je $h_p(\boldsymbol{x}) \, . \, h_q(\boldsymbol{x}) = 0$. Je-li kuželosečka $\mathbf{Q}$ tvořena jedinou přímkou p, je určena kvadratickou formou $f_2 = h_p \, . \, h_p$, tj. rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$ je $(h_p(\boldsymbol{x}))^2 = 0$.



Obr. 55a



Obr. 55b



Obr. 55c

Ukážeme si, že svazky kuželoseček popsané ve větách 4.7.3, 4.7.4 a 4.7.5 můžeme určit pomocí singulárních kuželoseček $\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2$. Je-li svazek určen podle věty 4.7.3 čtyřmi různými body A, B, C, D, můžeme např. položit $\mathbf{Q}^1 = \overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{CD}$ (zde jde o sjednocení přímek, nikoli o jejich spojení) a $\mathbf{Q}^2 = \overleftrightarrow{AC} \cup \overleftrightarrow{BD}$ (obr. 55a). Svazek určený tečnou t_A s bodem dotyku A a dalšími dvěma body B, C (věta 4.7.4) určíme kuželosečkami $\mathbf{Q}^1 = t_A \cup \overleftrightarrow{BC}$ a $\mathbf{Q}^2 = \overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{AC}$ (obr. 55b). Nakonec svazek určený tečnou t_A s bodem dotyku A a tečnou t_B s bodem dotyku B (věta 4.7.5) určíme kuželosečkami $\mathbf{Q}^1 = t_A \cup t_B$ a $\mathbf{Q}^2 = \overleftrightarrow{AB}$ (obr. 55c).

Jako příklad svazků kuželoseček si ukážeme svazky kružnic v rovině $\overline{\mathbf{E}}_2^{\mathbf{C}}$. Předpokládejme, že $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ je repér v euklidovské rovině určující kartézskou soustavu souřadnic $\mathscr{L}$ (tj. vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ jsou ortonormální). Nechť $\mathbf{S}$ je svazek kuželoseček v rovině obsahující dvě různé kružnice K^1, K^2. Potom rovnici kružnice K^i můžeme pro $i = 1, 2$ psát v aritmetické bázi $\langle (1, P), \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ ve tvaru (viz odstavec 4.6 vzorce (11), (12))

$$x_1^2 + x_2^2 + 2p^i x_0 x_1 + 2q^i x_0 x_2 + r^i x_0^2 = 0. \tag{9}$$

Přitom symbol „i“ v této rovnici je index, nikoli exponent. Kvadratickou formu na levé straně rovnice (9) označme $f_2^i(\boldsymbol{x})$. Rovnici každé kuželosečky svazku $\mathbf{S}$ vyjádříme ve tvaru (2). Vidíme, že pro $k_1 + k_2 \neq 0$ dostáváme opět rovnici kružnice. Pro $k_1 + k_2 = 0$ dostaneme z rovnice (2) po jednoduché úpravě rovnici

$$2(p^1 - p^2) x_0 x_1 + 2(q^1 - q^2) x_0 x_2 + (r^1 - r^2) x_0^2 = 0.$$

To je rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}$, složené z nevlastní přímky a z přímky p o rovnici

$$2(p^1 - p^2) x_1 + 2(q^1 - q^2) x_2 + (r^1 - r^2) x_0 = 0.$$

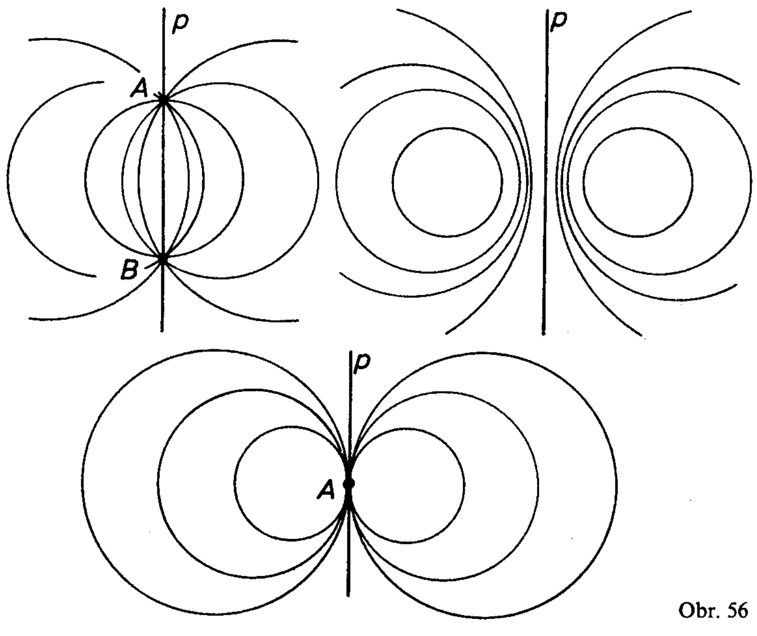
Pokud je přímka p vlastní, nazývá se chordála kružnic K^1, K^2. Snadno se lze přesvědčit, že každé dvě kružnice svazku mají pak stejnou chordálu p. Chordálu dvou kružnic v $\mathbf{E}_2$ lze definovat pomocí tzv. mocnosti bodu ke kružnici – chordála kružnic K^1, K^2 je množina všech bodů z $\mathbf{E}_2$, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost (viz kapitola 3 v [G]). V případě, že p je nevlastní přímka, musí platit $p^1 = p^2$ a $q^1 = q^2$ a snadno se přesvědčíme, že každá kružnice svazku $\mathbf{S}$ má střed $S = [-p^1, -q^1]$ (souřadnice bereme samozřejmě v kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}$).

Lze dokázat, že každý svazek kružnic je jeden ze svazků kuželoseček popsaných ve větách 4.7.3, 4.7.4 a 4.7.5. Především víme, že každá kružnice obsahuje dva izotropické body I_1, I_2 roviny $\overline{\mathbf{E}}_2^{\mathbf{C}}$. Je-li $\mathbf{S}$ svazek soustředných kružnic o středu S (tj. přímka p je nevlastní), jsou přímky SI_1 a SI_2 tečny každé kružnice o středu S a body I_1, resp. I_2 jsou body dotyku těchto tečen (viz odstavec 4.6). Svazek $\mathbf{S}$ je tedy svazek kuželoseček popsaný ve větě 4.7.5. Je-li přímka p vlastní, zjistíme, že mohou nastat tyto možnosti (podrobnější provedení důkazu tohoto tvrzení ponecháváme jako cvičení):

a) Existují dva reálné body A, $B \in p$ tak, že pro kružnici K platí $K \in \mathbf{S}$ právě tehdy, je-li $A, B \in K$.

b) Existují dva imaginární komplexně sdružené body A, $B \in p$ tak, že pro kružnici K platí $K \in \mathbf{S}$ právě tehdy, je-li $A, B \in K$.

c) Existuje reálný bod $A \in p$ tak, že pro kružnici K platí $K \in \mathbf{S}$ právě tehdy, je-li přímka p tečna kružnice K s bodem dotyku A.



Obr. 56

Která z těchto možností nastává, zjistíme snadno – stačí prozkoumat vzájemnou polohu přímky p a jedné kružnice svazku $\mathbf{S}$. Příklady svazků odpovídajících možnostem a, b, c jsou na obr. 56 (vždy je nakresleno několik kružnic svazku a přímka p).

Budeme pokračovat ve vyšetřování svazků kuželoseček v rovině $\overline{\mathbf{A}}_2^{\mathbf{C}}$. Pomocí svazků kuželoseček dokážeme jednu důležitou větu pro regulární kuželosečky. Buď tedy $\mathbf{Q}$ regulární kuželosečka. Dohodneme se, že pro body $A, B \in \mathbf{Q}$, pro které platí $A = B$, označujeme symbolem $\overleftrightarrow{AB}$ tečnu kuželosečky $\mathbf{Q}$ v bodě A. Nechť A, B, C, $D \in \mathbf{Q}$ jsou body, z nichž žádné tři nesplývají. Jestliže $A = B$ a $A \neq C \neq D \neq A$, nazýváme svazkem kuželoseček určeným body A, B, C, D svazek všech kuželoseček, které procházejí body C, D a mají tečnu $\overleftrightarrow{AB}$ s bodem dotyku A. Jestliže $A = B$ a $C = D$, nazýváme svazkem kuželoseček určeným body A, B, C, D svazek všech kuželoseček, které mají tečnu $\overleftrightarrow{AB}$ s bodem dotyku A a tečnu $\overleftrightarrow{CD}$ s bodem dotyku C. Svazek kuželoseček určený čtyřmi různými body A, B, C, $D \in \mathbf{Q}$ je svazek všech kuželoseček obsahujících body A, B, C, D. Je zřejmé, že ve všech probraných případech patří kuželosečka $\mathbf{Q}$ svazku kuželoseček určenému zvolenými body A, B, C, $D \in \mathbf{Q}$.

Věta 4.7.6. Pascalova věta. Mějme na regulární kuželosečce $\mathbf{Q}$ dány body $R_1, \dots, R_6$. Nechť $R_i \neq R_j$, jestliže $i \neq j$ a neuspořádaná dvojice indexů $[i, j]$ není rovna žádné z dvojic $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 5]$, $[5, 6]$, $[6, 1]$. Potom existuje přímka p tak, že body $K = \overleftrightarrow{R_1R_2} \cap \overleftrightarrow{R_4R_5}$, $L = \overleftrightarrow{R_2R_3} \cap \overleftrightarrow{R_5R_6}$, $M = \overleftrightarrow{R_3R_4} \cap \overleftrightarrow{R_6R_1}$ leží na přímce p.

Důkaz. Pro různou polohu bodů $R_1, \dots, R_6$ na kuželosečce $\mathbf{Q}$ budeme sledovat důkaz věty na obr. 57a, b, c. Nechť kuželosečka $\mathbf{Q}$ je určena kvadratickou formou f_2. Předpokládejme ještě, že h_{ij} je lineární forma určující přímku R_iR_j pro $i, j = 1, \dots, 6$. Buď $\mathbf{S}$ svazek kuželoseček určený body R_1, R_2, R_3, R_4. Svazek $\mathbf{S}$ určíme dvěma singulárními kuželosečkami $\mathbf{Q}^1 = \overleftrightarrow{R_1R_2} \cup \overleftrightarrow{R_3R_4}$, $\mathbf{Q}^2 = \overleftrightarrow{R_2R_3} \cup \overleftrightarrow{R_1R_4}$. Rovnice kuželosečky $\mathbf{Q}^1$, resp. $\mathbf{Q}^2$ je $h_{12}(\mathbf{x}) \,.\, h_{34}(\mathbf{x}) = 0$, resp. $h_{23}(\mathbf{x}) \,.\, h_{14}(\mathbf{x}) = 0$. Je zřejmé, že kuželosečky $\mathbf{Q}^1$ a $\mathbf{Q}^2$ jsou skutečně různé. Protože $\mathbf{Q} \in \mathbf{S}$, existují čísla $a, b \in \mathbf{C}$ tak, že

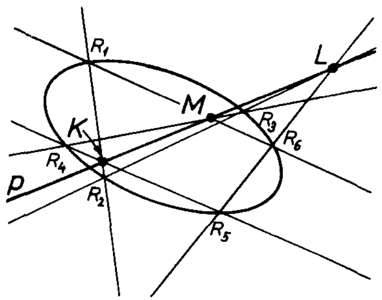
$$f_2(\mathbf{x}) = ah_{12}(\mathbf{x}) \,.\, h_{34}(\mathbf{x}) + bh_{23}(\mathbf{x}) \,.\, h_{14}(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Označíme-li $\mathbf{S}'$ svazek kuželoseček určený body R_4, R_5, R_6, R_1, dostaneme analogickým postupem, že existují čísla $c, d \in \mathbf{C}$ tak, že

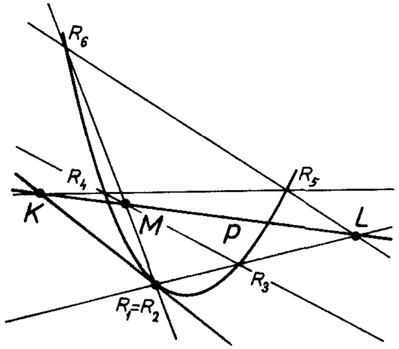
$$f_2(\mathbf{x}) = ch_{45}(\mathbf{x}) \,.\, h_{16}(\mathbf{x}) + dh_{56}(\mathbf{x}) \,.\, h_{14}(\mathbf{x}). \tag{11}$$

Odečtením rovnic (10) a (11) a jednoduchou úpravou obdržíme rovnici

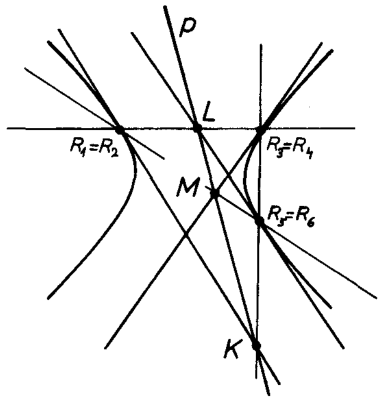
$$ah_{12}(\mathbf{x}) \,.\, h_{34}(\mathbf{x}) - ch_{45}(\mathbf{x}) \,.\, h_{16}(\mathbf{x}) = h_{14}(\mathbf{x}) \,(dh_{56}(\mathbf{x}) - bh_{23}(\mathbf{x})). \tag{12}$$



Obr. 57a



Obr. 57b



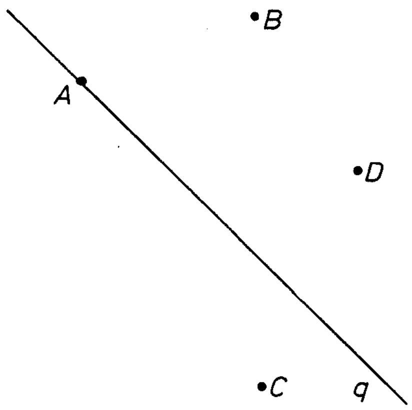
Obr. 57c

Buď p přímka daná rovnicí

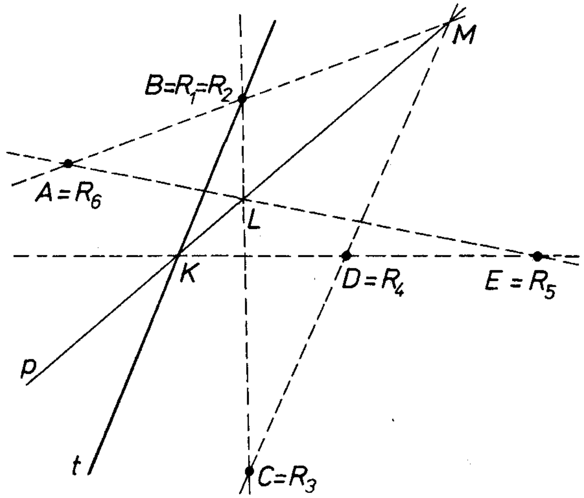
$$dh_{56}(\boldsymbol{x}) - bh_{23}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Zřejmě $L \in p$. Protože $K \in \overleftrightarrow{R_1R_2}$, $K \in \overleftrightarrow{R_4R_5}$ a $K \notin \overleftrightarrow{R_1R_4}$ (kdyby platilo $K \in \overleftrightarrow{R_1R_4}$, muselo by platit $K = R_4$, a proto buď $R_1 = R_4$, nebo $R_2 = R_4$, což není možné), pro aritmetického zástupce $\boldsymbol{k}$ bodu K platí $h_{12}(\boldsymbol{k}) = 0$, $h_{45}(\boldsymbol{k}) = 0$ a $h_{14}(\boldsymbol{k}) \neq 0$. Dosadíme-li vektor $\boldsymbol{k}$ do rovnosti (12), snadno dokážeme, že $K \in p$. Analogicky se dokáže i vztah $M \in p$. Tím je věta dokázána.

Jestliže považujeme body $R_1, \ldots, R_6$ za vrcholy šestiúhelníku a přímky spojující dva sousední vrcholy za strany tohoto šestiúhelníku (vrcholy R_1 a R_6 jsou též sousední), můžeme zformulovat Pascalovu větu též takto: U šestiúhelníku vepsaného kuželosečce leží průsečíky protilehlých stran na jedné přímce. (Tato přímka se nazývá *Pascalova přímka.*) Přitom ovšem musíme předpokládat, že vrcholy šestiúhelníku, které nejsou sousední, jsou různé. Také se musíme oprostit



Obr. 58

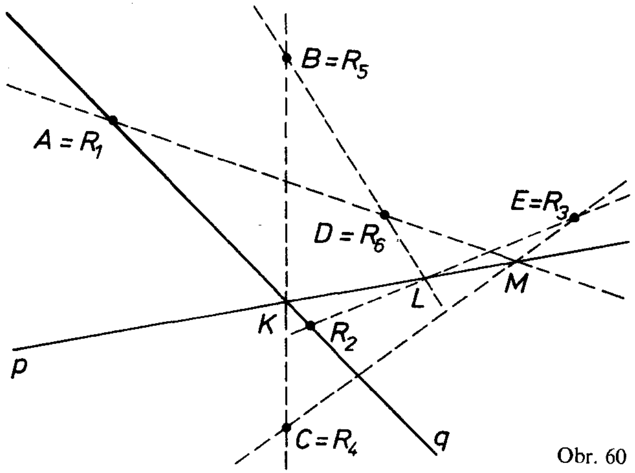


Obr. 59

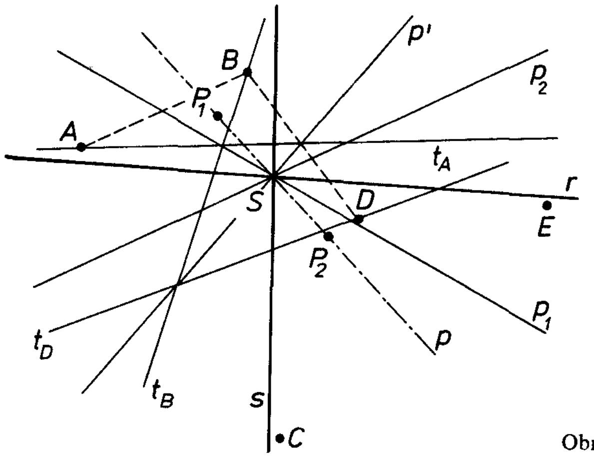
od představy, že šestiúhelník vepsaný kuželosečce leží uvnitř kuželosečky – srovnej např. obr. 57a a c. Použití Pascalovy věty pro konstrukční řešení úloh si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 1. Na obr. 58 jsou dány body A, B, C, D, E a přímka q tak, aby $A \in q$. Nechť $\mathcal{Q}$ je kuželosečka obsahující body A, B, C, D, E. Sestrojte tečnu t kuželosečky $\mathcal{Q}$ v bodě B a určete druhý průsečík přímky q s kuželosečkou $\mathcal{Q}$ (jeden průsečík je bod A).

Řešení. Nejdříve sestrojíme tečnu kuželosečky $\mathcal{Q}$ v bodě B. Postup sledujeme na obr. 59. Za tím účelem označíme např. $B = R_1 = R_2$, $C = R_3$, $D = R_4$,



Obr. 60



Obr. 61

$E = R_5$, $A = R_6$. Sestrojíme Pascalovu přímku p jako spojnici bodů $L = \overleftrightarrow{R_2R_3} \cap \overleftrightarrow{R_5R_6}$, $M = \overleftrightarrow{R_3R_4} \cap \overleftrightarrow{R_6R_1}$. Na této přímce musí ležet i bod $K = \overleftrightarrow{R_1R_2} \cap \overleftrightarrow{R_4R_5}$. Proto $K = p \cap \overleftrightarrow{R_4R_5}$ a hledaná tečna je $\overleftrightarrow{R_1R_2} = \overleftrightarrow{BK}$.

Konstrukci druhého průsečíku přímky q s kuželosečkou $\mathcal{Q}$ sledujeme na obr. 60. Dané body opět přeznačíme. Tentokrát položíme např. $A = R_1$, $B = R_5$, $C = R_4$, $D = R_6$, $E = R_3$ a R_2 bude hledaný průsečík. Pascalovu přímku p sestrojíme jako spojnici bodů $K = \overleftrightarrow{R_1R_2} \cap \overleftrightarrow{R_4R_5}$ a $M = \overleftrightarrow{R_3R_4} \cap \overleftrightarrow{R_6R_1}$ (bod R_2 sice neznáme, ale přímku R_1R_2 ano, je to přímka q). Na ní musí ležet bod $L = \overleftrightarrow{R_2R_3} \cap \overleftrightarrow{R_5R_6}$. Avšak musí platit také $L = p \cap \overleftrightarrow{R_5R_6}$. Protože $\overleftrightarrow{LR_3} = \overleftrightarrow{R_2R_3}$, platí $R_2 = \overleftrightarrow{LR_3} \cap q$.

Příklad 2. Pro kuželosečku $\mathcal{Q}$ z příkladu 1 určete hlavní osu s vyznačenými průsečíky s kuželosečkou (vrcholy kuželosečky) a asymptoty. (Ze zadání je zřejmé, že kuželosečka je hyperbola.)

Řešení. Postup je znázorněn na obr. 61. Pomocné konstrukce nejsou na obrázku zakresleny (obrázek by byl nepřehledný). Nejdříve sestrojíme pomocí Pascalovy věty tečny t_A, t_B, t_D v bodech A, B, D (řešení viz příklad 1). Podle příkladu 5 z odstavce 4.5 sestrojíme průměr p_1 sdružený s nevlastním bodem přímky AB a průměr p' sdružený s nevlastním bodem přímky BD. Střed kuželosečky $\mathcal{Q}$ je bod $S = p_1 \cap p'$. Bodem S vedeme přímku p_2 rovnoběžnou s přímkou AB. Průměry p_1, p_2 jsou sdružené průměry kuželosečky $\mathcal{Q}$ a kuželosečka $\mathcal{Q}$ je opravdu hyperbola, což vyplývá např. z polohy tečny t_B k průměrům p_1, p_2. Nyní již řešení dokončíme podle příkladu 3 z odstavce 4.6 a najdeme asymptoty r, s a hlavní osu p s body P_1, P_2 kuželosečky $\mathcal{Q}$ (vrcholy kuželosečky).

Kdybychom v příkladu 2 změnili zadání, našli bychom stejným způsobem průměry p_1, p'. Kdyby tyto průměry byly rovnoběžné, byla by kuželosečka $\mathcal{Q}$ parabola, a protože každý průměr paraboly určuje směr osy paraboly, sestrojili bychom již snadno ze dvou tečen s body dotyku ohnisko paraboly a řídicí přímku paraboly. Kdyby průměry p_1, p' byly různoběžné, ale kuželosečka $\mathcal{Q}$ by byla elipsa, určili bychom ji podle příkladu 2 z odstavce 4.6 sdruženými průměry.

Je zřejmé, že pomocí Pascalovy věty můžeme sestrojit kuželosečku i v tom případě, že máme dány čtyři její body a v jednom z nich tečnu, nebo dvě tečny s body dotyku a další bod. Postupujeme stejně jako v příkladu 2 s tím rozdílem, že máme ušetřenou konstrukci jedné nebo dvou tečen kuželosečky.

KAPITOLA 5

AXIOMATIKA GEOMETRIE

5.1 Úvod

V první kapitole Geometrie I (viz definice 1.1.1) jsme definovali afinní n-rozměrný prostor jako trojici $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$, kde $\mathbf{V}_n$ je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, $\mathbf{A}$ neprázdná množina a f zobrazení množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ do $\mathbf{V}_n$ takové, že platí:

1. Pro každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.
2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že zobrazení f_P množiny $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}_n$ přiřazující každému $X \in \mathbf{A}$ vektor $f(P, X)$ je vzájemně jednoznačné.

Euklidovským n-rozměrným prostorem jsme nazvali n-rozměrný afinní prostor, na němž bylo definováno skalární násobení.

Mohli jsme se v průběhu studia těchto prostorů přesvědčit, že v případě dvourozměrném a třírozměrném euklidovský prostor odpovídá našim představám, získaným na střední škole. Zejména jsme viděli, že po zavedení soustavy souřadnic je body možno popsat pomocí uspořádaných dvojic, příp. trojic reálných čísel, roviny a přímky lze vyjádřit pomocí soustav lineárních rovnic. Je však patrné, že definice euklidovského prostoru, které jsme použili, využila hlubokých znalostí o rovinné a prostorové geometrii, zejména pokud se týká vektorů. Naší definicí byl zachycen v jistém smyslu konečný stav našich znalostí o geometrii, získaný předchozí výukou ve škole. Neměli jsme možnost sledovat, jak se tento stav na základě dedukce z elementárních geometrických poznatků vytvoří. Chceme-li projít touto cestou, musíme se k těmto elementům geometrie vrátit, vymezit z nich určitá fakta jako východisko a pak deduktivním postupem přijít ke struktuře, kterou jsme nazvali afinním či euklidovským prostorem, příp. afinní či euklidovskou rovinou.

Vytvořit z geometrických poznatků deduktivní systém vedlo již ve starém Řecku k řadě pozoruhodných pojednání, z nichž nejznámější se stalo *Euklidovo dílo Základy* z konce čtvrtého století před naším letopočtem.

Současná axiomatika geometrie se většinou opírá o knihu *D. Hilberta Základy geometrie* z roku 1899. Aniž bychom zabíhali do formálních detailů, připomeňme, v čem spočívá axiomatická metoda. Je vybrána jistá množina výroků, obsahující

tvrzení o předem zadaných pojmech. Na základě logických pravidel odvozujeme z těchto výroků další výroky. Všechna takto získaná tvrzení tvoří axiomatickou teorii generovanou výchozími výroky, tzv. axiómy teorie. Důležitým požadavkem, kladeným na soustavu axiómů, je bezespornost, to znamená, že mezi získanými tvrzeními není současně výrok A a výrok non A. Obvykle se spokojujeme zjištěním, že bezespornost naší soustavy plyne z bezespornosti jiné, již dříve vybudované axiomatické teorie, např. z aritmetiky přirozených čísel. Někdy formulujeme axiómy přímo v nějaké teorii, např. v teorii množin.

V odstavcích 2–11 vybudujeme pojem reálné afinní roviny na základě axiómů, které jsou modifikací Hilbertova axiomatického systému. Tato modifikace přísluší zejména *H. Lenzovi*. V odstavcích 12–14 jsou stručněji a často bez důkazů uvedena základní fakta z absolutní geometrie a geometrie Lobačevského roviny. Odstavec 15 je věnován axiómům trojrozměrné geometrie.

Základní pojmy v Hilbertově axiomatickém systému pro dvojrozměrnou, příp. trojrozměrnou geometrii jsou:

a) bod,

b) přímka,

c) rovina (pro trojrozměrnou geometrii),

d) ležeti na (používá se též „procházeti" apod.; v případě, že základní pojmy „bod", „přímka", „rovina" jsou množiny, je pojem „ležeti na" vyjádřen množinovou inkluzí a relací „býti prvkem"),

e) ležeti mezi (ve smyslu „bod A leží mezi body B a C"),

f) být shodný (ve smyslu „shodné úsečky" a „shodné úhly").

Často se dává přednost shodnosti jako transformaci roviny, příp. prostoru, místo relace „být shodný".

Axiómy se pak dělí zpravidla do následujících pěti skupin.

1. Axiómy incidence
2. Axiómy uspořádání
3. Axiómy shodnosti
4. Axióm (či axiómy) úplnosti
5. Axióm o rovnoběžkách

Značení axiómů je uváděno postupně v následujících odstavcích. Například axióm o rovnoběžkách je axióm **A 3** z odstavce 5.2.

Skupina první a pátá se týká základních pojmů a)–d), druhá skupina a)–e) a třetí a čtvrtá skupina a)–f).

Pokud nám jde o výstavbu euklidovské geometrie, dá se ukázat, že použití axiómu o rovnoběžkách umožní poměrně rychlý postup. Pro dvourozměrný případ je to ukázáno v odstavcích 5.2–5.11.

Axiomatika geometrie má však i jiné poslání, nejen výstavbu euklidovské geometrie. Zabývá se systematickou analýzou mezi vybranými geometrickými pojmy a výroky o nich. Od Euklidovy doby byla jednou z hlavních otázek otázka, zda axióm o rovnoběžkách je logickým důsledkem axiómů skupin $1-4$. Na základě mnoha výsledků geometrů minulého století bylo dokázáno, že tomu tak není. Existuje geometrie, v níž platí axiómy prvních čtyř skupin a neplatí axióm o rovnoběžkách. Z tohoto důvodu je prospěšné nejprve vybudovat geometrii splňující axiómy skupin $1-4$ (tzv. absolutní geometrii) a teprve potom přidat axióm o rovnoběžkách (a získat tak geometrii euklidovskou) či jeho negaci (a vytvořit geometrii Lobačevského). Přitom se budeme nejprve zabývat absolutní rovinou a potom prostorem.

Nakonec chceme znovu upozornit na tvorbu modelů axiomatické teorie. Již víme, že základní pojmy a axiómy bývají často považovány za určené objekty a výroky o těchto objektech v nějaké již vybudované matematické teorii a že pro nás takovou teorií bude zejména teorie množin, příp. teorie reálných čísel. Řada geometrických modelů je součástí jakoby už vybudované euklidovské roviny či prostoru. Vždy však se jedná o modely, které prostřednictvím analytické geometrie dovedeme převést na modely v množině reálných čísel.

5.2 Afinní rovina

Definice 5.2.1. *Afinní rovina* je množina $\mathbf{M}$, v níž je vybrán systém $\mathscr{P}$ jistých podmnožin. Prvky z $\mathbf{M}$ se nazývají body, prvky z $\mathscr{P}$ přímky. Existuje-li pro dané tři body $A, B, C \in \mathbf{M}$ přímka $p \in \mathscr{P}$ taková, že $A, B, C \in p$, nazýváme body A, B, C *kolineárními*. V opačném případě je nazýváme nekolineární.

Budeme předpokládat, že pro námi studovanou dvojici $(\mathbf{M}, \mathscr{P})$ jsou splněny tyto axiómy **A 1**, **A 2**, **A 3**:

A 1. Je-li $A, B \in \mathbf{M}$, $A \neq B$, pak existuje jediná přímka (označujeme ji $\overleftrightarrow{AB}$) pro niž $A \in \overleftrightarrow{AB}$, $B \in \overleftrightarrow{AB}$.

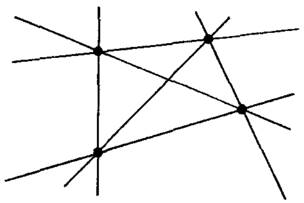
A 2. Existují tři různé body, které jsou nekolineární.

A 3. Ke každé přímce $a \in \mathscr{P}$ a ke každému bodu A, který na ní neleží, existuje právě jedna přímka $b \in \mathscr{P}$ taková, že $A \in b$ a $a \cap b = \emptyset$.

Někdy nepožadujeme platnost **A 3**, ale místo toho platí následující axióm **A 3'**:

A 3'. Na každé přímce leží aspoň dva body.

Potom se $\mathbf{M}$ nazývá *incidenční rovina*.



Obr. 62

Příklad. a) Euklidovská rovina.

b) Nechť $\mathbf{M}$ se skládá ze čtyř bodů, $\mathscr{P}$ ze všech dvouprvkových podmnožin v $\mathbf{M}$. Potom $\mathbf{M}$ je afinní rovina (obr. 62).

Budiž v dalším výkladu dána jistá afinní rovina $\mathbf{M}$.

Definice 5.2.2. Dvě přímky a, b se nazývají *rovnoběžné* (rovnoběžky), je-li $a = b$ nebo $a \cap b = \emptyset$. Píšeme potom $a \parallel b$.

Poznámka. V případě, že pro dvě přímky p a q platí $p \cap q = \{A\}$, budeme psát $p \cap q = A$.

Věta 5.2.1. Vztah $\parallel$ je ekvivalence na $\mathscr{P}$.

Důkaz. Reflexivita: $a = a$

symetrie: $a \cap b = \emptyset = b \cap a$

tranzitivita plyne z **A 3**:

Nechť $a \parallel b$, $b \parallel c$. Je-li $a \cap b = \emptyset$, $b \cap c = \emptyset$ a $A \in a \cap c$, je podle **A 3** (aplikované na přímku b a bod A) $a = c$, tj. $a \parallel c$. Případy $a = b$, $b = c$; $a = b$, $b \cap c = \emptyset$; $a \cap b = \emptyset$, $b = c$ dávají zřejmě $a \parallel c$.

Věta 5.2.2. Nechť $D \in \mathbf{M}$. Potom existují dva body E a F takové, že D, E, F jsou nekolineární. Ke každé přímce existuje bod, který na ní neleží.

Důkaz. Nechť A, B, C jsou body splňující axióm **A 2**. Potom alespoň jedna z trojic A, B, D; A, C, D a B, C, D neleží v přímce (kdyby to tak nebylo, pak všechny trojice by ležely v jedné přímce a tedy i body A, B, C by ležely v přímce, čímž jsme dospěli ke sporu). Existence bodu neležícího na dané přímce je přímý důsledek axiómu **A 2**.

Věta 5.2.3. Každá přímka obsahuje alespoň dva body.

Důkaz. Připusťme, že $\emptyset \in \mathscr{P}$. Nechť A, B, C je trojice bodů splňujících axióm **A 2**. Potom $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{AC}$ jsou různé přímky jdoucí bodem A a mají s $\emptyset$ prázdný průnik, to znamená $AB \parallel \emptyset$ a $AC \parallel \emptyset$. To je spor s axiómem **A 3**. Tedy $\emptyset \notin \mathscr{P}$.

Připusťme nyní, že $\{D\} \in \mathscr{P}$. Nechť E, F jsou body, o kterých se jedná ve větě 5.2.2. Nechť p je rovnoběžka s $\overleftrightarrow{DE}$ jdoucí bodem F. Potom $\{D\} \cap p = \overleftrightarrow{DE} \cap p = \emptyset$, tedy bodem D by šly dvě různé rovnoběžky $\{D\}$ a $\overleftrightarrow{DE}$ s přímkou p, a to je spor s axiómem **A 3**. $\{D\}$ a $\overleftrightarrow{DE}$ by byly různé přímky, protože $\{D\}$ obsahuje jediný bod, $\overleftrightarrow{DE}$ alespoň dva body D, E.

Cvičení

1. Nechť $\mathbf{M}$ má devět bodů a přímky jsou podmnožiny $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 4, 8\}$, $\{3, 6, 8\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{2, 6, 9\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 4, 9\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$. Ukažte, že $\mathbf{M}$ je afinní rovina.
2. Nechť m je přirozené číslo. Zkonstruujte incidenční rovinu s m body.

NÁSTIN HISTORICKÉHO VÝVOJE GEOMETRIE

V jednotlivých kapitolách této učebnice je vyloženo několik úseků geometrie z dnešního hlediska, tj. pomocí pojmů a metod, jež jsou vlastní soudobé matematice 20. století. Je však účelné (zejména pro budoucího učitele) znát také základní fakta o vývoji geometrie, jež usnadňují pochopení látky i jejího didaktického ztvárnění v učebnicích. Historické poznámky zařazené v učebnicích pro základní a střední školy mohou vyvolávat dotazy žáků, proto je žádoucí, aby učitel znal o něco více, uměl žákům odpovědět a zaujmout je, motivovat.

Geometrie je součástí matematiky jako celku, proto při výkladu vývoje geometrie nelze pominout její vazby k aritmetice, algebře atd. Syntetizující pohled na vývoj vztahu matematiky a filozofie poskytne až v 5. ročníku učitelského studia zařazený předmět Světonázorové problémy matematiky, který z těchto hledisek doplní nástin vývoje geometrie v této kapitole.

6.1 Nejstarší etapa vývoje geometrických znalostí lidí

Příroda poskytovala pravěkým lidem předměty, které měly různé tvary; jejich porovnáváním a napodobováním (při výrobě nástrojů, nádob) získávali lidé představy o geometrických tvarech. Ornamentální výzdoba nádob spočívala v opakování geometrických tvarů (nejčastěji v pásech) už v 5. tisíciletí před n. l. Rozvržení šraf, vlnitých či lomených čar, ale i trojúhelníků a rovnoběžníků „kolem nádoby“ vyžadovalo praktické přibližné dělení kružnice na shodné části a bylo podnětem pro vytváření představ o shodnosti, souměrnosti útvarů i o rovnoběžnosti čar. Geometricky stylizovány byly i postavy lidí a zvířat.

Lidé sledovali pohyb Slunce, poznali jeho souvislosti se změnami denních i ročních dob a došli k základním představám o světových stranách. Dokladem jsou rituálně motivovaná zaměření staveb ve východozápadním či severojižním směru (zde se asi upevnila představa o pravém úhlu a o pravoúhelnících), ať už šlo o „kamenné kalendáře“ v anglickém Stonehenge či o egyptské chrámy a pyramidy. Půdorysy budov byly vytyčovány už ve 3. tisíciletí před n. l.; zachovaly se také jejich zmenšené náčrtky vytvořené metodou čtvercových sítí. Kresby zachované v Egyptě dokládají, že při tesání sfing používali řemeslníci kolmé průměty zakreslované do čtvercových sítí, pracovali s olovnicemi apod.

Nejstarší státy vznikaly v územích kolem velkých řek (tzv. říční civilizace), kde bylo hustší osídlení zemědělského obyvatelstva. Pokračující dělba práce vedla k vytváření společenských vrstev řemeslníků, vojáků, kněží, úředníků, obchodníků, a také k třídní organizaci společnosti zejména ve formě otrokářských městských států, z nichž se (zpravidla násilným) sjednocováním rodily velké říše, otrokářské despocie. Zatímco obchodnická praxe a agenda spojená s dědickými záležitostmi byla zdrojem především pro rozvíjení aritmetické složky matematiky, stavitelská činnost (zavodňovací síť, opevnění, chrámy), sestavování kalendáře, doprava po moři či přes pouště a obdobné činnosti přispívaly i k rozvíjení geometrických znalostí. Společenská praxe přitom vyžadovala zejména rozvoj výpočetní geometrie založené na měření délek a výpočtech výměr polí a objemů vodních nádrží, hradeb, sýpek apod.

Je jisté, že stavba obrovských pyramid v Egyptě kolem r. 2900 před n. l. nebyla možná bez značných geometrických znalostí; ale nejstarší písemné památky se dochovaly až z 19. století před n. l. Pyramid se v nich týkají jen výpočty sklonu stěn a objemu komolého čtyřbokého jehlanu; na numerickém příkladu je předveden postup jakoby podle vzorce $V = \frac{v}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Bohatší jsou výpočty výměr polí, jež mají tvar trojúhelníku, čtyřúhelníku či kruhu; vesměs numerické příklady předvádějí kromě přesných postupů i jen přibližné výpočty, např. obsah čtyřúhelníku se určuje vynásobením průměrných délek protilehlých stran, obsah kruhu se počítá jakoby s hodnotou $\pi = 256 : 81$ atd. Dogmatickému rázu ideologie v otrokářské despocii odpovídalo i pojetí těchto nejstarších učebnic jako sbírek návodů bez zdůvodňování postupu.

Mezopotámská matematika se podle dochovaných vypálených hliněných desek (nejstarší jsou z 21. století před n. l.) jeví jako silně rozvinutá v oblasti obchodních počtů, řešení rovnic a astronomických výpočtů. V geometrických úlohách se už tehdy důmyslně aplikovala tzv. Pythagorova věta, řešily se úlohy vyvolané dědickými problémy (rozdělení polí na části o stejné výměře), stavbou vodních nádrží na svazích (objemy stupňovitých těles), budováním náspů, kanálů apod. Pro náročné výpočty vytvářeli Sumerové i pozdější Babylóňané zásoby tabulek s hodnotami převrácených čísel, druhých a třetích mocnin atd.

Kultury, které vznikly v povodích velkých čínských a indických řek, vytvářely také díla, jejichž stavba vyžadovala rozvíjení geometrických znalostí. Čínské legendy z doby kolem r. 2200 před n. l. uvádějí jméno muže, který „zkrotil řeky pomocí kružítka a pravítka“. Také v Indii byla nalezena kružítka, pravítka a měřítka ze 3. tisíciletí před n. l., ale písemné památky se zachovaly až z počátku 1. tisíciletí, např. tzv. Pravidla provazce (Šalva-sútra). Ta popisují konstrukce s provazy, jež využívají též Pythagorovu větu a bez váhání přibližně řeší i konstrukci čtverce, který má obsah rovnající se obsahu kruhu (pozdější tíživý problém kvadratury kruhu neexistoval).

Ve státech říčních kultur vytvořila tedy určitá vrstva společnosti (státní, městští či chrámoví úředníci, obchodníci a stavitelé, vojenští velitelé, kněží apod.) poměrně bohatý souhrn praxí ověřených postupů, jak řešit úlohy, které se později staly součástmi geometrie. Tyto postupy byly předávány mladé generaci, a to na ukázkách, jak se co konstruuje, resp. počítá, šlo tedy o předávání řemeslných dovedností. Prvotní podoba geometrie odpovídala tomu, co se později nazývalo praktická geometrie pro řemeslníky a úředníky.

6.2 Vznik geometrie jako teoretické disciplíny

Řecké kmeny, jež v průběhu 16. – 10. století před n. l. osídlily v několika vlnách ostrovy v Egejském moři a okolní pevninu, přišly do styku s krétskou civilizací, která byla srovnatelná s egyptskou (palác v Knóssu a stupňovité amfiteátry dokládají vysoké stavební umění a geometrické znalosti). Městské a ostrovní státy řeckého obyvatelstva navázaly kontakty s Egyptem; styk s Mezopotámií zprvu zprostředkovávali Foiničané. V 8. – 6. století zahájili Řekové kolonizaci severního pobřeží Středozemního moře a části pobřeží Černého moře, napodobili tak Foiničany. To vše ukazuje, že do té doby si určitá vrstva řeckého obyvatelstva už osvojila nejvyspělejší praktickou matematiku minulých epoch.

Přechody od aristokratických vlád k otrokářským demokraciím v průběhu 7. – 5. století před n. l. vytvořily v řeckých městských státech vhodné podmínky pro rozvoj rétoriky a dialektiky (umění řečnit a vést rozhovor), z níž se později vyvinula logika. Protože v Řecku (na rozdíl od otrokářských despocií) žádná ústřední moc neprosazovala jednotný náboženský výklad světa, mohly vzniknout různé filozofické názory, které spolu soupeřily. Tendence objevit jednotný princip kosmu napomáhala rozvoji abstraktního myšlení, tvorbě nových obecných pojmů, předtím neznámých (arché = počátek všeho, apeiron = pralátka, atomos = nedělitelný aj.), ale vedla také k vytváření systémů tvrzení, jež lze rozumově vyvodit z principů (základních tvrzení).

Není náhodou, že první řecký filozof, obchodník Thales z Mílétu, v 6. století před n. l. získal v Egyptě a Mezopotámii znalosti shromážděné tam v podobě receptů pro praktickou činnost a na tomto základě prohlásil vodu za arché a rozvinul důsledky tohoto principu, položil základy materialisticky zaměřené přírodní filozofie. Uspořádal však také některé geometrické poznatky o kružnicích a trojúhelnících a naznačil možnost odvozovat další tvrzení rozumovou úvahou. Ačkoliv se nedochoval žádný Thaletův spis, jeho impuls pro teoretické rozvíjení geometrie oceňoval Proklos ještě po tisíci letech slovy: „... mnohé objevil sám a pro mnohé jiné věci dal základ těm, kteří žili po něm. Někdy zkoumal otázku poněkud obecněji, jindy se více opíral o názornost."

Další výrazný krok k vytvoření teoretické matematiky vykonal mladší Thaletův současník Pythagoras ze Samu (6. stol. před n. l.), který rovněž poznával orientální

matematiku přímo na svých cestách; ale přetavil získané poznatky do filozofické polohy. Zkušenost, že jevy mají svou kvantitativní stránku, jednostranně zabsolutizoval a prohlásil číslo za podstatu všeho. Tento idealistický názor výrazně spojil matematiku s filozofií, podstatně zvýšil abstraktnost pojmu číslo a vedl ke studiu vlastností přirozených čísel (sudost, lichost, dělitelnost, prvočísla, spřátelená čísla, dokonalá čísla apod.), jež neměly žádný význam pro praktickou matematiku, ale staly se podkladem pro spekulativní výklady světa.

Vazby pythagorejské číselné filozofie ke geometrii byly dány tím, že geometrické obrazce ozřejmovaly úvahy o přirozených číslech. Čísla byla znázorňována seskupeními kaménků tvarovanými do obdélníků, trojúhelníků, čtverců a pravidelných mnohoúhelníků i těles, proměny těchto obrazců mnohdy poskytovaly zdůvodnění pouček. Zřejmě i tímto způsobem se v pythagorejské škole nějak podařilo zdůvodnit tzv. Pythagorovu větu (není spolehlivě známo jak). Pythagorejci orientovali zájem matematických filozofů k pravidelným tělesům (i když patrně ještě neznali všech pět) a ke koulím jako k dokonalým tělesům.

Proklos ve svém Katalogu geometrů říká, že „Pythagoras přetvořil tuto nauku do podoby svobodného tvoření. Studoval ji tak, že vycházel z jejích prvopočátků a usiloval o získávání vět pomocí čistě logického myšlení, mimo dosah konkrétních představ". Tendence dávat přednost rozumovému poznávání světa před smyslovým byla společensky podložena tím, že všichni filozofové byli svobodní, a tedy nepracující členové otrokářské společnosti. Smyslové poznávání, nezbytné pro manuální práce, považovali za nižší způsob poznávání, vhodný pro otroky a řemeslníky, ne pro svobodné občany.

Od doby Thaleta a Pythagora se vytváří vedle praktické matematiky, jejíž znalost si nadále předávali řemeslníci, obchodníci, stavitelé a zeměměřiči, také *teoretická matematika.* Geometrie v jejím rámci už není měřičské umění, ale věda o tvarech, která přispívá k výkladu o stavbě vesmíru, studuje pojmy a objevuje poučky platné pro celý vesmír (ani bohové je nemohli změnit). Ověřování těchto pouček už neprobíhá ve výrobní či obchodní praxi, ale dokazováním na úrovni slovních formulací a pravidel pro usuzování. Při této činnosti se uplatňují slovní definice a poučky, různé metody důkazů (včetně důkazu sporem) a různé metody zkoumání (například analýza úlohy). Kresby a schémata mají v geometrii jen pomocnou roli, nejsou prostředkem ověřování pouček.

Právě naznačený přístup k předmětu a metodám geometrie platí dodnes, jeho první uplatňování v 6. – 5. století před n. l. se však projevilo tak náhle a v tak promyšlené podobě, že se někdy hovoří o „řeckém zázraku". Tato překvapivost je ovšem způsobena nedostatkem pramenů z přechodného období, stejně působí i relativní dokonalost Euklidových Základů.

6.3 Hlavní výsledky antické řecké geometrie

V tomto článku se budeme zabývat nejprve teoretickou geometrií řeckých učenců v 6.–4. století před n. l., protože o praktické geometrii té doby se nezachovaly písemné materiály, dokladem její existence a úrovně jsou však stavby vytvořené v řeckých městech, některé z nich se řadily mezi „divy světa" (vedle egyptských pyramid a visutých zahrad v Ninive).

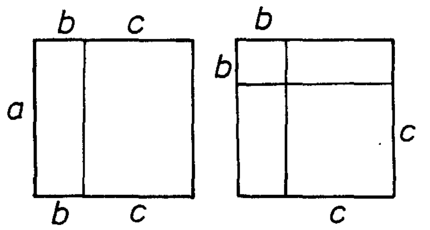
Pythagorejská škola v jihoitalském Krotonu přenesla do řecké teoretické matematiky krizi své filozofické koncepce „vše se dá vyjádřit poměry přirozených čísel" (tzn. v naší terminologii kladnými racionálními čísly). Někdy v 5. století před n. l. prokázaná nesouměřitelnost úhlopříčky čtverce a jeho strany ukázala, že i tak ceněné pravidelné útvary „se vzpírají nadvládě (racionálních) čísel". Po neúspěšné aritmetizaci matematiky a filozofie se řecká antická věda dala cestou *geometrizace matematiky* – všechny úvahy, jež se týkaly veličin, se začaly důsledně vyjadřovat geometricky:

„Úsečka" představovala naše reálné číslo pojaté jako délka, šířka či výška útvaru, „pravoúhelník" byl termín vyjadřující součin délky s šířkou či výškou, tj. obsah obrazce, „čtverec" představoval druhou mocninu délky, „krychle" třetí mocninu. Pokud byla dána „krychle", pak její třetí odmocnina se nazývala „hrana" apod. V tomto jazyce vyslovovali všichni antičtí teoretičtí matematici poučky o operacích s veličinami (reálnými čísly), tj. algebraické poučky.

Příklady pouček z Euklidových Základů:

a) Když se úsečka libovolně rozdělí, pravoúhelníky sevřené celou a oběma úsečkami rovnají se čtverci z celé.
(Když $a = b + c$, pak $ab + ac = a^2$.)

b) Když se úsečka libovolně rozdělí, čtverec z celé rovná se čtvercům z úseček a dvojnásobnému pravoúhelníku úsečkami sevřenému.
(Když $a = b + c$, pak $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$.)

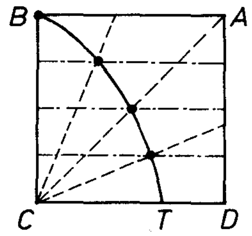


Obr. 92

Teorie, která v geometrickém jazyce (a na základě geometrických představ – viz obr. 92) vyjadřovala algebraické poučky, byla později nazvána *geometrická algebra.* Tento způsob vyjadřování se v teoretické matematice udržel po 2 000 let (!!!), ještě Kepler, Galilei, Torricelli, Pascal a Huygens v 17. století n. l. psali svá pojednání v tomto geometrickém jazyce.

Po celou sledovanou dobu, tj. od šestého století před n. l., vznikalo souborné dílo řecké teoretické matematiky – Základy. Svědectví o tom podal opět Proklos v 5. stol. n. l., jenž vyjmenoval 18 význačných matematiků následujících po Pythagorovi, kteří přispěli novými poučkami, celými teoriemi nebo formulacemi do konečného znění Základů, jež uspořádal Euklides v alexandrijském Múseiu kolem r. 300 před n. l. Tato konečná verze Základů se skládá ze 13 knih, jež shrnují většinou již uzavřené teorie – planimetrii, stereometrii, pythagorovskou aritmetiku, geometrickou algebru, teorii iracionalit a teorii proporcí, beze zmínky zůstaly ještě otevřené problematiky trisekce úhlu, kvadratury kruhu, kuželoseček, drah planet apod. (Charakteristice Základů vyhradíme samostatný čl. 4, dříve však probereme další problematiku doby, kterou se zabýváme.)

Tři klasické problémy řecké teoretické geometrie byly zformulovány už v 5. století před n. l. – trisekce úhlu, kvadratura kruhu a duplikace krychle. Šlo skutečně jen o teoretické problémy, protože v praxi byly známy přibližné konstrukce (pokud se k takovým úlohám vůbec došlo).



Obr. 93

Trisekce (tj. třetění) *úhlů* se vyskytla při sestrojování pravidelných n-úhelníků, kde n bylo násobkem devíti. Velký počet řeckých (teoretických) geometrů se s ní vyrovnal pomocí křivek, které mohly jimi sestavené mechanismy rýsovat, např. Nikomedova konchoida nebo „trisectrix" – křivka Hippiáse z Elidy (kol. r. 425 před n. l.). Na obr. 93 vidíme oblouk BT křivky, jež zahrnuje všechny body, ve kterých se kříží dvě pohybující se úsečky: úsečka BA se rovnoměrně posouvá do polohy CD, úsečka CB se rovnoměrně otáčí kolem bodu C do polohy CD, oba pohyby začínají ve stejném okamžiku a později též končí v témž okamžiku. Je zřejmé, že třetění úhlu se touto křivkou snadno převedlo na třetění úsečky. Jinou úspěšnou křivkou, jež sloužila k třetění úhlů, byla o 200 let pozdější Archimédova spirála. Problémem (neřešitelným a přitom marně řešeným) se trisekce úhlů různých od pravého a přímého úhlu stala po omezení konstrukčních prostředků na kružítko a pravítko.

Kvadratura kruhu, tj. sestrojení strany čtverce, který má stejný obsah jako daný kruh, vycházela zcela přirozeně z úloh o proměnách obrazců, jež vyjadřovaly geometrický základ tehdejší algebry (viz obr. 92). Při proměnách obrazců se běžně uplatňovala Thaletova věta, Pythagorova věta, stejnolehlost úseček, podobnost trojúhelníků, a tedy i tzv. Euklidovy věty. V 5. století před n. l. se ještě bez důkazu používala věta, že obsahy podobných útvarů jsou v poměru čtverců sestrojených nad odpovídajícími si úsečkami, na základě toho Hippokrates z Chiu (kol. r. 450 před n. l.) našel případy lunet (měsíčků), jejichž kvadraturu bylo možné provést pravítkem a kružítkem. Deinostratos využil (kolem r. 350 před n. l.) ke kvadratuře kruhu křivku z obr. 93, když dokázal, že úsečka CT je k CD v témž poměru jako průměr půlkružnice k její délce (dnes bychom zapsali $CT : CD = 2 : \pi$). Bod T je „limitním" bodem („průsečíkem" splývajících úseček), proto úvahy o něm vyžadovaly nový teoretický aparát; stala se jím tzv. exhaustivní metoda („vyčerpávací" ve smyslu vyčerpávání všech tří logických možností). Deinostratos vyjádřil (v geometrickém jazyce) tyto tři možnosti:

$CT : CD < 2 : \pi \quad CT : CD = 2 : \pi \quad CT : CD > 2 : \pi$

pak obě krajní možnosti vyvrátil tím, že z nich vyvodil nepravdivé důsledky. Je zřejmé, že pravoúhelník se stranami CD, CT má týž obsah jako půlkruh s poloměrem CT; to umožňuje kvadraturu libovolného kruhu. Již zmíněná Archimédova spirála byla též křivkou vhodnou k řešení kvadratury kruhu (využije se průvodič bodu získaného po čtvrtině, polovině či celé otočce rotačního pohybu). Každou křivku umožňující kvadraturu kruhu by bylo možno nazvat kvadratrix (= kvadrátorka), tento název však uplatnil až Leibniz pro křivku na obr. 93 (jde o afinní obraz oblouku tangentoidy).

Duplikace (zdvojení) *krychle* spočívala v sestrojení hrany krychle, která má dvojnásobný objem než daná krychle. Její motivace byla mytologická, snad i proto její „přesné řešení" hledali teoretičtí geometři s mimořádným úsilím. Jde o konstrukci úsečky o velikosti $\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}25$, ale neproveditelnou kružítkem a pravítkem (jak je známo od r. 1837). Hippokrates z Chiu zapsal (kolem r. 450 před n. l.) složenou úměru $a : x = x : y = y : 2a$, z níž vychází $x^3 : a^3 = 2 : 1$, ale nenašel její konstrukční vyjádření. Menaichmos (bratr Deinostrata) je hledal pomocí dílčích úměr $a : x = x : y$, $x : y = y : b$, $a : x = y : b$; došel sice ke kuželosečkám (dnešní matematik „vidí" hned rovnice parabol $ay = x^2$, $bx = y^2$ a hyperboly $xy = ab$), ale v pravém smyslu slova – hledal je v prostoru, konstrukcí řezů kuželových ploch rovinou. Archytás z Tarentu (kolem r. 400 před n. l.) navrhl prostorové řešení pomocí průniku rotační válcové, kuželové a kulové plochy, v Platónově Akademii bylo vypracováno řešení pomocí tzv. mezolábia (přístroje s posuvným pravým úhlem, který bylo nutno vhodně nastavit), Diokles ve 2. století před n. l. navrhl křivku 3. stupně zvanou kissoida atd. atd.

Vidíme, že teoretičtí řečtí geometři zprvu neváhali sestrojovat mechanismy k rýsování křivek, jež mohly vést k řešení úloh nezvládnutelných kružítkem a pravítkem. Postupně však se vzdávali těchto křivek a omezovali se na *konstrukce jen kružítkem*

a pravítkem, které dnes nazýváme euklidovské konstrukce. Tento zarážející vývoj má filozofické důvody, o nichž se stručně zmíníme.

Teoretickou matematiku pythagorejci vytvořili jako nástroj k výkladu světa. Všechny další směry řecké filozofie postupovaly obdobně: Eleaté se vepsali do dějin Zénónovými aporiemi, jež se týkaly představ o konečném, resp. nekonečném dělení úsečky; atomisté pracovali s bodovými atomy, z nichž skládali úsečky i tenké vrstvičky v tělesech (podle Démokrita byla kružnice mnohoúhelníkem, jehož každou stranu tvoří dva sousední atomy, tato strana určovala zároveň tečnu kružnice). Vlivem společenských podmínek (úpadku demokracií v letech 400–350 před n. l.) se prosadila Platónova objektivně idealistická filozofie, jež zneužila matematiku zvlášť důmyslně. Platón (427–347) sice přisoudil matematickým pojmům nanejvýš „čestné místo" mezi hmotným světem a světem idejí, ale z toho vyvozoval, že matematika má zkoumat jen to, co je dokonalé, pravidelné, nepodléhá změně apod. (tj. to, co přibližuje matematické pojmy věčným idejím a vzdaluje je od hmotných věcí). Proto se v jeho Akademii (založené v r. 387 před n. l.) pěstovala matematika, ale v naznačeném zaměření; z geometrické tematiky to byly pravidelné útvary v rovině a v prostoru, kulové plochy a kružnice, roviny a přímky. Z konstrukčních mechanismů vzali platonici „na milost" jen pravítka a kružítka, protože se jimi pořizují útvary připomínající ideální přímku a ideální kružnici; a ty jsou ideální proto, že jsou nekonečně mnoha způsoby souměrné a že jsou schopné pohybovat se samy v sobě (tj. neměnit se při pohybu). Ostatní křivky vytvářené pomocí mechanismů zavrhli jako příliš „poskvrněné hmotou".

Protože Platónova stanoviska respektovala většina (teoretických) matematiků jeho doby, projevilo se umělé omezování konstrukčních prostředků ve 4. století před n. l. velmi výrazně, a to i v Euklidových Základech, jež získaly ohromnou autoritu. Termín „euklidovská konstrukce" pak navždy nabyl významu „konstrukce kružítkem a pravítkem".

6.4 Euklidovy Základy

Jak jsme už uvedli, nejde o dílo jediného autora; knihovník Euklides alexandrijského Múseia dokončil kolem r. 300 před n. l. soubor knih, které tvořilo aspoň deset generací matematiků žijících před ním. První čtyři knihy byly asi hotové už v 5. století před n. l., připisují se Hippokratovi z Chiu; pátou a dvanáctou knihu zpracoval patrně Eudoxos z Knidu, osmou Archytás z Tarentu, sedmou a devátou pythagorejci, desátou a třináctou Theaitétos z Athén. Rozštěpení řecké matematiky na aritmetiku a geometrii se v Základech projevuje tím, že se určité „algebraické" úseky probírají dvakrát – pro čísla a pro veličiny (úsečky).

Celkovou koncepcí dílo respektuje dobový ideál vědy, který vyjádřil *Aristoteles* (384–322). Ve svých spisech Aristoteles rozvinul nauku o definování a dokazování v deduktivních vědách, zdůvodnil, že nutně musí existovat „počátky“ každé vědy, tj.

— soubor základních pojmů, které se nedefinují,

— soubor základních tvrzení, která se nedokazují.

Kromě specifických základních pojmů a vět každé vědy připouštěl Aristoteles i obecné pojmy a věty společné pro více věd. Ve svých spisech používal příklady z matematiky, ale žádné matematické dílo sám nenapsal.

O obsahu Euklidových Základů se jen stručně zmíníme, protože jde o objemnou publikaci (české vydání z r. 1907 má 312 stran), nejvíce se zaměříme na problematiku rovnoběžných přímek.

Kniha I pojednává o úsečkách, trojúhelnících a rovnoběžnících, její úvod však tvoří 23 definic, 5 postulátů a 9 axiómů, jež se vztahují k celému spisu. Ze 48 číslovaných odstavců je 14 věnováno základním konstrucím a 34 důkazům vět.

Tzv. definice jsou zčásti jen popisy představ, které si má čtenář vybavit:

1. Bod je, co nemá žádný díl.
2. Čára je délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára, která svými body táhne se rovně.
5. Plocha jest, co má jen délku a šířku.
6. Hranicemi plochy jsou čáry.
7. Rovina jest plocha, která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.
8. Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.

(Z těchto definic se nic nevyvozuje, v důkazech se neuplatňují. Přímka se chápe jako úsečka (= přímka omezená), proto se mluví o jejím neomezeném prodlužování na obě strany.)

Postuláty

1. Od kteréhokoliv bodu ke kterémukoliv bodu lze vésti přímku.
2. Přímku omezenou nepřetržitě lze rovně prodloužit.
3. Z jakéhokoliv středu a jakýmkoliv poloměrem lze narýsovat kružnici.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. Když přímka protíná dvě přímky a tvoří na téže straně vnitřní úhly menší než dva pravé, pak ty dvě přímky prodloužené do nekonečna sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší než dva pravé.

(Postuláty 1 – 3 částečně vymezují „konstrukční prostředky“ – ideální pravítko neomezeně dlouhé a ideální kružítko s libovolně velkým rozevřením. Pátý postulát zaručuje existenci průsečíku dvou přímek, i když se ho nepodaří sestrojit v malé části roviny, kde pracujeme. Dvěma úhly se rozumí součet dvou úhlů.)

Axiómy

1. Veličiny témuž rovné jsou si navzájem rovné.
2. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou si rovny.
3. Odejmou-li se od rovných rovné, zbývající části jsou si rovny.
4. Když se přidají k nerovným rovné, celky si nejsou rovny.
5. Dvojnásobky téhož jsou si navzájem rovny.
6. Poloviny téhož jsou si navzájem rovny.
7. Co se navzájem kryje, je si navzájem rovno.
8. Celek je větší než díl.

(9. Dvě přímky neomezují místo.)

(Axiómy 1 – 6 se vztahují na veličiny, tj. čáry, obrazce a tělesa, tvoří tedy základ geometrické algebry. Axióm 7 je jediný, v němž se hovoří o „krytí“, v dalším textu kap. I jde pak o krytí bodů po přemístění, ale zejména o krytí úseček a úhlů při důkazech vět o shodnosti trojúhelníků. Poslední axióm byl zřejmě připsán později.)

Bezprostřední komentáře k definicím, postulátům a axiómům doplňme ještě zmínkou o 5. postulátu, který vzbuzoval pozornost nejen délkou svého textu (trojnásobnou ve srovnání s ostatními), ale zejména svým obsahem. O rovnoběžkách se v něm přímo nehovoří, ač je zvykem považovat ho za pilíř teorie rovnoběžnosti. *Problematika rovnoběžnosti přímek* byla mezi antickými filozofy – matematiky asi dosti ožehavá, Euklides uvedl definici rovnoběžek až jako poslední, 23. definici: „Rovnoběžky jsou přímky, které jsouce v téže rovině a prodlouženy jsouce do nekonečna, nikde se nesbíhají.“ Námitky filozofů se týkaly nepoužitelnosti takové definice k rozhodnutí o rovnoběžnosti přímek (nelze kontrolovat „do nekonečna“). Aristoteles zřejmě reagoval na počínání matematiků ve své době, když svůj výklad o důkazu kruhem ilustroval úvahou těch, kteří z rovnosti úhlů (střídavých) vyvozovali rovnoběžnost přímek. Soudil, že rovnoběžnost přímek se musí předpokládat, protože ji nelze ověřit.

Euklides patrně čelil této námitce připojením dalšího postulátu (k dosud obvyklým čtyřem), který obsahuje závěr o vlastnostech nekonečného prodloužení přímek vyvozený ze zjištěného součtu úhlů v dostupné části roviny. Ke studiu rovnoběžek přistoupil až v 27. odstavci knihy I, kde vyslovil větu „Když přímka protínajíc dvě jiné tvoří střídavé úhly navzájem stejné, budou ty přímky navzájem rovnoběžné.“ Důkaz podal sporem, který získal pomocí již dokázané věty o vnějším úhlu trojúhelníku. Teprve potom, ve 28. odstavci, vyslovil a dokázal větu, která je stylizována obdobně jako 5. postulát, ale mluví o součtu vnitřních úhlů rovném dvěma pravým a vyvozuje z toho rovnoběžnost přímek. Euklidův postup byl po vyslovení 5. postulátu logicky správný, ale tím spíše se stával sám postulát předmětem zkoumání; snahy o jeho odvození z nějakých zřejmějších tvrzení se objevovaly už v antice. (Jak víme, s konečnou platností až v 19. století n. l.

prokázali N. I. Lobačevskij a J. Bolyai, že 5. postulát nelze vyvodit z ostatních výchozích tezí Základů.)

Kniha II obsahuje jen 14 odstavců a je věnována geometrické algebře (z ní jsme citovali dvě poučky v odstavci 3).

Knihy III a IV jsou věnovány studiu kružnic, kruhů, vzájemné polohy přímek a kružnic, obvodových úhlů v kružnicích, mocnosti bodu ke kružnici (bez uvedených termínů), dále pravidelných n-úhelníků kružnici opsaných a vepsaných pro $n = 3, 4, 5, 6$ a 15. (Omezení konstrukčních prostředků na pravítko a kružítko a pohrdání přibližnými konstrukcemi omezilo výběr hodnot n.)

Kniha V uvádí náročné téma o proporcích, které zpracoval Eudoxos z Knidu (408 – 355) a jež představovalo geometrickou podobu teorie reálných čísel a limitních procesů. Poučky této knihy bychom dnes snadno vyjádřili pomocí proměnných a úměr.

Kniha VI aplikuje látku knihy V v planimetrii, logicky přesně odvozuje poznatky přijímané jinde na základě názoru, například o podobnostech s libovolným koeficientem (nejen racionálním), o zlatém řezu úsečky apod. Odstavec 27 je věnován jednomu z prvních problémů v řecké matematice požadujících určení maxima; jde o výsledek, že výraz $x(a - x)$ nabývá maxima pro $x = 0{,}5a$ (v naší symbolice, Euklides se vyjadřoval geometricky – mluvil o rovnoběžnících).

Knihy VII, VIII a IX se zabývají aritmetikou, od jednoduché teorie dělitelnosti přirozených čísel (včetně Euklidova algoritmu) k práci s mocninami, k sčítání konečných geometrických posloupností apod. Kromě důkazu existence nekonečně mnoha prvočísel je podán i obdivuhodný důkaz věty o dokonalých číslech (je-li $2^n - 1$ prvočíslo, pak $2^{n-1} . (2^n - 1)$ je dokonalé číslo, tj. rovné součtu všech svých dělitelů menších než je samo).

Kniha X zabírá čtvrtinu rozsahu Základů, ve 111 odstavcích podává složitou teorii iracionalit podle Theaitéta, samozřejmě v geometrickém jazyce. Některé věty připravují podklady pro úvahy o pravidelných tělesech.

Knihy XI, XII a XIII jsou věnovány stereometrii, zprvu rovnoběžnosti a kolmosti přímek, rovin, pak běžným tělesům a jejich objemům, posledním tématem jsou pravidelné mnohostěny.

Rozboru Základů by bylo možné věnovat desítky stran; dílo získalo velkou autoritu, stalo se na dvě tisíciletí vzorem deduktivní výstavby, která se začala nazývat „geometrický způsob". Zmiňme se však také o kritickém hodnocení jeho slabin: V kritice 19. století neobstál výběr výchozích pojmů a tvrzení, který je neúplný. Vlastnosti uspořádání bodů jsou brány pouze z názoru, netýká se jich žádný postulát ani axióm. Obezřetně se autor vyhnul i všem příležitostem mluvit o nekonečných souhrnech bodů či útvarů, protože to bylo „tabu" řecké filozofie po potlačení atomismu; Aristoteles souhlasil jen s úvahami o nekonečných procesech (tzv. potenciálním nekonečnu), proto Euklides nevyslovil výrok „Existuje nekonečně mnoho prvočísel", ale „Prvočísel je více než jakýkoliv daný počet"

a v důkazu popsal způsob, jak lze každému počtu prvočísel sestrojit další prvočíslo.

Doplňme ještě zmínku o existenci tzv. 14. a 15. knihy Základů, které jsou pozdější a do přehledů Euklidova díla se nezařazují. Už v antice se opisy Základů poněkud lišily, pokus o sjednocující redakci podnikl kolem r. 370 n. l. Theón z Alexandrie, otec známé Hypatie. Arabské překlady Základů však vycházely z jiných rukopisů. Nejstarší dochovaný opis Základů pochází až ze 7. století n. l.

6.5 Zaměření geometrie od Euklida do Descarta

Toto období takřka 2 000 let má společné rysy, které si ukážeme. Autorita Základů v něm zůstávala neotřesena, ale už v antice se objevila díla, jež získala rovněž věhlas v určitých oborech. Alexandrijské řecké vědecké centrum v orientálním prostředí poskytlo brzy práce, jež představovaly plodnou syntézu vyspělé teoretické matematiky a praktické matematiky.

Archimédes ze Syrakus (287 – 212) studoval v Alexandrii a dopisoval si s tamními učenci, např. s Eratosthenem. Zabýval se problémy mechaniky a výpočetní geometrie, nerespektoval platónské omezení studia matematiky na „dokonalé křivky", zkoumal spirály, a zejména kuželosečky (včetně úsečí jimi ohraničených oblastí a těles vzniklých rotací těchto úsečí). K objevu „vzorců" neváhal použít i mechanické prostředky (zejména vážení a úvahy o pákách), ale důkaz „vzorců" podával exhaustivní metodou (viz 3. článek). Pracoval se součty nekonečných geometrických řad, ale i s představou úzkých pásků a tenkých vrstviček v útvarech, kratinkých úseček lomených čar vepsaných do oblouků křivek, proto se právem považuje za *průkopníka infinitezimálních metod v matematice.* Při uplatňování exhaustivní metody pracoval de facto s pojmem limity posloupnosti. Vyjadřoval se v jazyce geometrické algebry, proto dáváme slovo „vzorec" do uvozovek, šlo o slovní vyjádření, např.:

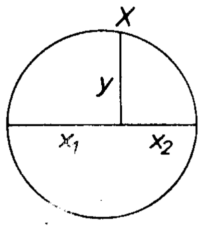
> Každý kruh se rovná pravoúhlému trojúhelníku, přitom poloměr kruhu se rovná jedné ze stran přiléhajících k pravému úhlu a obvod je základnou trojúhelníku.

Při výpočtech známé aproximace čísla π použil Archimédes metody vyspělé babylónské aritmetiky, kterou mistrně ovládal. Je to patrné i z jeho práce Pískový počet (též Počítání písku), kde ukazoval možnosti rozšiřovat číselný systém. Pro stereometrii jsou významné Archimédovy polopravidelné mnohostěny (snad i projev určitého vzdoru k Platónově zásadě dokonalosti). Archimédovu dílu se dostalo velkého ocenění v 16. a 17. století od průkopníků infinitezimálního počtu.

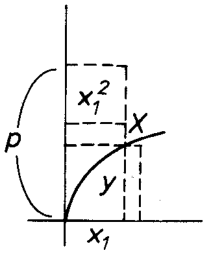
V *teorii kuželoseček* se Archimédes uplatnil svým studiem „symptomů“ (= charakteristických vlastností) bodů kuželoseček. Známý už vztah charakterizující body X kružnice (obr. 94), že $x_1 : y = y : x_2$, zobecnil na charakteristiky (v dnešním zápise):

$$y^2 = c \,.\, x_1(a - x_1), \quad y^2 = c \,.\, x_1 a, \quad y^2 = c x_1(a + x_1).$$

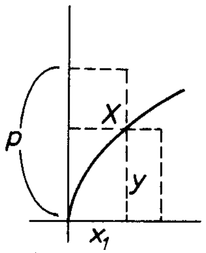
Přitom a je velikost hlavní osy elipsy či hyperboly, y je vzdálenost bodu X od přímky obsahující hlavní osu, x_1 je velikost úsečky na této přímce. (Nešlo samozřejmě o analytické vyjádření, Archimédes hovořil o úsečkách, pravoúhelnících, čtvercích apod.).



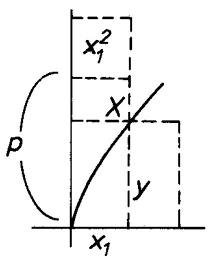
Obr. 94



Obr. 95a



Obr. 95b



Obr. 95c

Apollónios z Pergy (262–200) pokročil ve studiu kuželoseček ještě dále a přiblížil se (v jazyku geometrické algebry) na dosah metody souřadnic. Studoval řezy kruhových kuželových ploch rovinou, uplatňoval průměry kuželoseček (u elips a hyperbol sdružené průměry); na základě vyjádření (obr. 95 pro $c = 1$)

$y^2 = px_1 - cx_1^2$,	$y^2 = px_1$,	$y^2 = px_1 + cx_1^2$
úbytek	přirovnání	nadbytek
(elipsis)	(parabolé)	(hyperbolé)

vytvořil názvy tří druhů kuželoseček. V díle Kuželosečky shrnul v osmi knihách antické znalosti o tématu, pojednal i o tečnách, pólech a polárách, projektivním vytvoření kuželoseček pomocí dvou svazků přímek, ohniskových vlastnostech (jen středových kuželoseček), o průsečících kuželoseček, normálách a subtangentách, evolutách kuželoseček, o podobnosti kuželoseček; řešil velmi mnoho náročných konstrukčních úloh o kuželosečkách. V knize O dotycích pojednal o konstrukcích

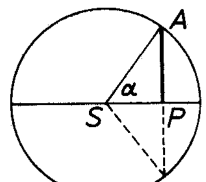
kružnic, jež se dotýkají daných tří útvarů (bodů, přímek, kružnic), známých dodnes jako Apollóniovy úlohy. Dílo se nedochovalo, známe jen jeho charakteristiku; Apollónios prý požadoval konstrukce jen kružítkem a pravítkem, ale znal asi kruhovou inverzi a stejnolehlost. Také tato díla vyvolala v 16. a 17. století mimořádný zájem, např. Keplerovi pomohla při formulaci zákonů o oběhu planet, Fermatovi a Descartovi k ilustraci analytické metody.

Ostatní autoři helenistického období antické matematiky dosáhli značných úspěchů v *rozvíjení matematiky, jež souvisela s geodézií, optikou a astronomií té doby.* Babylónské astronomické tabulky obsahovaly údaje o velikostech tětiv v kružnicích, známa byla i tzv. kosinová věta (obsažená i v Základech) v ryze geometrickém vyjádření. Aristarchos ze Samu (310–230) napsal kolem r. 260 před n. l. spis O vzdálenostech Slunce a Měsíce, který měl zásadní význam svým heliocentrismem; pro trigonometrii byl důležitý jako motivační spis, protože Aristarchos zvládal úvahy o velikostech úhlů a úseček velmi složitě.

Eratosthenes (276–195) provedl výpočet délky zemského poledníku na základě podobnosti trojúhelníků, ale i on určoval velikost úhlu zlomkem obvodu kruhu. Až *Hipparchos z Nikaje* (180–125) označovaný za „otce trigonometrie“ přenesl z Babylónie stupňovou míru a první tabulky velikostí tětiv v kružnicích. Připisuje se mu také objev stereografické projekce kulové plochy na rovinu.

Hérón (v 1. století před n. l.) zpracoval přehledy postupů ve výpočetní geometrii, doplňoval však teoretická zdůvodnění; tím zahájil éru syntézy těchto dvou „vrstev“ matematiky. Vyložil znovu i výsledky Archimédovy (např. známý vzorec o obsahu trojúhelníku) včetně jeho metod uplatňujících pozdější Cavalieriho princip, komentoval Eukliďovy práce a přímými důkazy nahrazoval jeho důkazy sporem. Důmyslné aproximační metody řešení rovnic ukazují na orientální tradice, jež byly v Alexandrii zřejmě dost silné; Hérón se také velmi přiblížil metodě souřadnic, takřka vyjádřil lineární rovnici přímky.

Rozvoj trigonometrie (spíše sférické než rovinné) pokračoval v Alexandrii i v dalších stoletích. Menelaos (kol. r. 100 n. l.) napsal spis Sphaerica, kde dokazoval věty o rovinných trojúhelnících (včetně věty nazývané jeho jménem), ale zejména zavedl pojem sférický trojúhelník a vybudoval jeho teorii analogicky jako Euklides pro rovinné trojúhelníky. Sinus úhlu chápal jako polovinu tětivy dvojnásobného úhlu v kružnici (na obr. 96 je $\sin \alpha = |AP|$), což vyhovovalo jazyku geometrické algebry, ale činilo hodnoty sinu závislé na velikosti průměru kružnice.



Obr. 96

Ptolemaios (85—165) shrnul v objemném díle Velká skladba (Megalé syntaxis, v arabštině al-madžistí, v latině zpětně Almagest) trigonometrii rovinnou i sférickou, s podrobnými důkazy vět o $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ apod., s tabulkami sinů (= tětiv) pro kružnici s poloměrem 60, všechna čísla uváděl v šedesátkové soustavě. Opíral se přitom o větu (nazývanou jeho jménem) o tětivovém čtyřúhelníku v kružnici, resp. o Menelaovu větu. Využíval ortografickou i stereografickou projekci kulové plochy. Vrátil se však ke geocentrické hypotéze, kterou ovlivnil kosmologii až do vystoupení Koperníka a Galileiho. Také trigonometrické výsledky Ptolemaiovy byly překonány v Evropě až v 15. století (Regiomontanus).

Úpadek antické kultury v římské říši už nepřinesl podstatně nové výsledky v geometrii, ale v algebře a teorii čísel se zaskvělo dílo Diofanta (3. století n. l.), který položil základy algebraické symboliky (písmeno označující neznámou). V éře tzv. komentátorů (3.—6. stol.) se objevovaly přehledy výsledků dřívějších učenců s cennými komentáři, protože většinou jde o jediné zprávy o ztracených spisech (citovali jsme např. Prokla v odstavci 2). Pappos (kolem r. 300) sepsal Sbírku, v osmi knihách sebral cenné výsledky 30 autorů antiky, podal historické údaje, obtížné problémy a popsal metody jejich řešení. Na jeden z jeho problémů navázal Descartes při výkladu své analytické metody.

Přerušme nyní souvislý výklad vývoje geometrie v antice započatý v článku 2 a vžijme se do situace zemí, v nichž žádná teoretická matematika nevznikla ani se do nich nepřenesla. Byla to Čína, Indie, ale i Mezopotámie ovládaná Peršany, kde byla silná tradice numerické kultury a astronomie. V těchto zemích se v tisíciletí mezi r. 500 před n. l. a 500 n. l. vytvořily feudální společenské vztahy se zbytky otroctví. Centrální řízení států potřebovalo úředníky ovládající praktickou matematiku, proto se předepisovaly zkoušky pro uchazeče o úřad a psaly se pro ně učebnice, stále v podobě sbírek řešených úloh. Mezi nimi byly i výpočetní geometrické úlohy, ale převaha úloh o výkonech, pohybech, směně apod. řešených přesnými i přibližnými postupy. „Smířlivost" k přibližným numerickým výsledkům se projevovala v geometrii tím, že se běžně používaly přibližné konstrukční postupy pro kvadraturu kruhu, cirkulaturu čtverce apod. Nikdy se neomezovaly konstrukční prostředky umělými zákazy, nevznikly tíživé problémy s iracionalitami, rovnoběžkami apod. jako v Řecku.

V Indii panovala dlouhá tradice desítkových systémů numerace, z níž se kolem r. 500 n. l. (vlivem počítání na deskách) vyvinula poziční soustava, brzy opatřená nulou a zápornými čísly. *Indická matematika byla spolu s mezopotámskou tradicí a dědictvím alexandrijské školy zdrojem rozvoje matematiky v islámských zemích*, zejména v kulturních centrech nové říše vytvořené arabskými výboji (Bagdád, Káhira, středoasijská města). Už na konci 8. století n. l. se do arabštiny překládaly spisy indické a řecké, kolem r. 820 al-Chorezmí doporučil indický způsob počítání a napsal učebnici o řešení rovnic (ale geometrickým jazykem), v r. 833 bylo přeloženo dílo Ptolemaiovo. Ve stylu a obsahu islámské matematiky se

projevila alexandrijská matematika v celé škále (od teoretických otázek přes astronomii až po ryze praktické návody).

Islámská geometrie ve své teoretické složce zahrnovala studium problému rovnoběžek, konstrukce kružítkem s konstantním rozevřením a pravítkem apod. Její praktická složka se silným teoretickým základem zahrnovala např. konstrukce užitečné pro řemeslníky, ale i trigonometrické recepty, al-Farabí napsal Dodatek k Almagestu. Stále rozsáhlejší tabulky hodnot sinů sestavovali islámští učenci po několik staletí, al-Chabaš (770—870?) zavedl tabulky tangent, al-Káší (+1436) vytvořil pro vládce Ulug-bega tabulky v šedesátkové soustavě s hodnotami, jež odpovídají 17místným tabulkám v desítkové soustavě. Jako celek dosáhla islámská geometrie drobných zdokonalení a doplnění převzatého dědictví, ale nepřinesla převratné ideje, protože zůstávala v rámci stejné společenské situace po tisíc let.

Evropská středověká matematika začínala v 6.—9. století opět jen na úrovni praktické matematiky nezbytně nutné k hospodářskému životu, v geometrii na úrovni řemeslnických praktik. V klášterních školách se vyučovalo trivium a kvadrivium se základy matematiky, ale tradice vyšší antické vzdělanosti se oživovala jen zvolna, nejprve v italských městech, jež obchodovala s islámskými zeměmi. Ve španělských a portugalských městech a na Sicílii se od 11. století překládaly i matematické spisy z arabštiny do latiny, tak vznikla literatura pro přednášky na nově zakládaných univerzitách. Přeloženy byly Euklidovy Základy i drobnější práce z aritmetiky a trigonometrie. Leonardo z Pisy, zvaný Fibonacci, vydal v r. 1202 Knihu o abaku, v r. 1220 spis Praxe geometrie, v níž ale řešil geometrické úlohy algebraicky. Teoretickou matematiku rozvinuli ve svých dílech angličtí a francouzští scholastikové, např. Nicole Oresme ve 14. století graficky znázorňoval pohyby rovinnými obrazci (základna udávala interval času, svislé úsečky velikost rychlosti v jednotlivých okamžicích, obrazec vyjadřoval svým obsahem uraženou dráhu).

Rozmáhající se mořeplavba kladla nároky na znalost sférické trigonometrie; mapování a vyměřování v terénu potřebovalo znalosti rovinné trigonometrie. Tyto požadavky spolu se zájmem o pěstování astronomie i astrologie vedly k tomu, *že trigonometrie byla prvním matematickým oborem, v němž evropská matematika překonala rámec antické a islámské matematiky.* Na úroveň samostatné disciplíny ji pozdvihl Johannes Müller-Regiomontanus (1436—1476), který na základě hlubokých znalostí děl předchůdců vytvořil deduktivní systém rovinné a sférické trigonometrie v práci O trojúhelnících všech druhů (napsána r. 1464, tiskem vyšla r. 1533).

Obtížnost v praxi potřebných trigonometrických výpočtů podněcovala k hledání úsporných metod; v průběhu 16. století to byl zejména přechod k písemnému počítání indicko-arabskými číslicemi a odvozování vzorců typu

$$2 \cos \alpha \,.\, \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta),$$

jež nahrazovaly násobení sčítáním. (Tyto vzorce uveřejnil François Viète v 70. letech 16. století.) Výraznější pokrok však znamenaly až logaritmy vytvořené J. Napierem, J. Bürgim a H. Briggsem v období 1600–1620. Viète a Napier objevili též tzv. Napierova pravidla pro pravoúhlé sférické trojúhelníky.

V renesanční Evropě se jako součást řemeslných praktik malířů rozvíjela *nauka o perspektivě*; spisy o ní zprvu publikovali umělci (L. B. Alberti, P. de Franceschi, L. da Vinci, A. Dürer), až později matematici. Vynález knihtisku a příliv rukopisů z Cařihradu ohrožovaného Turky podmínil novou etapu překladatelské činnosti; tiskem vyšly Euklidovy Základy (1482, 1505, 1509), Ptolemaiův Almagest, spisy Apollónia, Archiméda a Diofanta, jež vzbudily značný ohlas a snahu rozvíjet jejich metody. Archimédův spis O měření kruhu vyvolal po r. 1570 soutěž ve výpočtu co největšího počtu desetinných míst čísla π; jedním z Archimédových následníků byl i Ludolf van Ceulen (1540–1610), jehož jméno dalo dobový název číslu π (= Ludolfovo číslo).

V 15. a 16. století se začaly množit také práce věnované klasickým problémům antické geometrie, zejména trisekci úhlu a kvadratuře kruhu. Bez porozumění podstatě problémů se desítky lidí zabývaly vynalézáním konstrukcí kružítkem a pravítkem, jež dávaly přibližná řešení úloh, ale jejich autoři je prohlašovali za přesná. Na konci 16. století „ožily" také tzv. Apollóniovy úlohy o dotycích kružnic, jejichž řešení se nedochovala z antiky; tyto úlohy byly později „prubířským kamenem" v soutěži syntetických a analytických metod v geometrii.

M. Koperník (1473–1543) zahájil novověkou polemiku o planetárním systému, která také podněcovala zájem o studium (nebeské) mechaniky a geometrie. Dráhy planet popsal J. Kepler (1571–1630) jako elipsy s ohnisky ve Slunci, G. Galilei (1564–1642) nalezl parabolu jako dráhu šikmých vrhů; přírodovědci docházeli k názoru, že „příroda nedává přednost kružnicím", jak soudil kdysi Platón. Tzv. mechanické křivky se dostávaly do středu pozornosti, začínalo například intenzívní studium cykloid. Dosavadní geometrický jazyk algebry veličin přestával vyhovovat, vedl k příliš složitému vyjadřování závislostí proměnlivých veličin.

Pokroky v řešení rovnic se zatím dotýkaly geometrie jen nepřímo, nezapomeňme však na rozřešení rovnic 3. a 4. stupně italskými učenci (publikoval G. Cardano 1545), na první výpočty s imaginárními čísly (Cardano 1545, Bombelli 1572), na tzv. cossistickou algebru se symboly pro neznámou a její mocniny atd. V algebraické symbolice došlo na konci 16. století k zásadnímu kroku – F. Viète (1540–1603) použil písmena k označení neznámých i k označení koeficientů v rovnicích (1591); toto zdánlivě nepatrné vylepšení symboliky mělo ohromný dosah tím, že umožnilo *vytvoření kalkulu se symboly*; úlohy bylo možné řešit úpravami výrazů a rovnic. Viète sám ukazoval sílu své metody na Diofantových úlohách ze spisu Arithmetica, ale zdaleka nevyužil všechny přednosti metody; ty si plně uvědomili R. Descartes a P. Fermat ve 30. letech 17. století.

6.6 Počátky a rozvoj analytické geometrie v 17. a 18. století

Evropští matematici 17. století se při tvořivém rozvíjení dědictví antické matematiky zaměřili především na Archiméda, Apollónia a Diofanta. Zásadní význam pro jejich metodologické úvahy měl však spis Pappův (kolem r. 300 n. l.), v němž popsal analytickou a syntetickou metodu:

„... při analýze předpokládáme, že je dáno to, co hledáme, a vyvozujeme z toho důsledky ... až dojdeme k něčemu již známému, co je první v pořadí. ... Při syntéze naopak předpokládáme, že je dáno to, co jsme při analýze objevili až nakonec, uspořádáme důsledky v přirozeném pořadí ... a nakonec sestrojíme hledaný objekt." (Pappos vyjmenoval 33 knih, které podle něho tvořily „pokladnici analýzy" – díla Euklidova, Apollóniova, Eratosthenova, Aristeiova aj.).

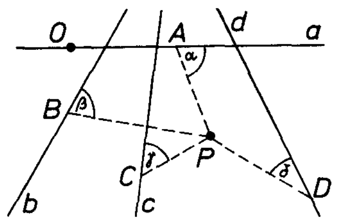
Aplikace této analýzy v antické geometrii však bývala často spojena s konstrukcí celé řady pomocných čar v obrázcích, takže její objevitelská hodnota byla ztížena, ne-li zcela potlačena. *René Descartes* (1596–1650) důrazně poukázal na tuto „džungli" tradičního analytického postupu v geometrii a rozhodl se vrátit analytické metodě její objevitelskou (heuristickou) hodnotu tím, že při ní uplatní algebraický kalkul postupných úprav a zjednodušování výrazů. Hovořil o algebraické analýze úloh, aby ji odlišil od kritizované geometrické analýzy, ale jeho následovníci už slovo „algebraická" vynechávali, analytická metoda se chápala v matematice v tomto smyslu, „analytická geometrie" se stala termínem pro geometrii studovanou metodou algebraické analýzy.

Descartes napsal nejprve spisek Pravidla k řízení rozumu, kde už vyjádřil své přesvědčení o univerzálnosti analytické metody, o její vhodnosti pro řešení jakýchkoli problémů tím, že se převedou na řešení rovnic. Tento optimismus sdíleli i další učenci; vedl k představám o „mathesis universalis" – matematice jako základu pro jednotný výklad světa. Úplněji vyložil Descartes své názory v (anonymně vydaném) spisu Rozprava o metodě (1637), kde dokonce datoval svůj objev analytické metody na 10. 11. 1619 „kdesi v Německu" – byl ve vojenském ležení jako účastník třicetileté války. Toto dílo se věnuje geometrii jen ve svém třetím dodatku, tj. jako třetí příklad aplikace obecné metody, Descartes napsal:

„Chceme-li vyřešit nějakou úlohu, máme ji nejprve považovat za vyřešenou a označit všechny čáry, které se nám jeví nezbytné pro její sestrojení, přitom označujeme známé i neznámé čáry. Potom, aniž rozlišujeme známé a neznámé čáry, musíme ... ukázat, jak závisí jedna na druhých, a to do té doby, než najdeme ..., jak vyjádřit jednu a touž veličinu dvojím způsobem. To je to, co se nazývá rovnice. ... A je třeba najít tolik rovnic, kolik bylo předloženo neznámých čar." (Slovo „čára" zde znamená úsečku, spíše však číslo udávající její velikost.)

Sílu své nové metody předvedl Descartes na řešení úloh, jež zaznamenal Pappos. Šlo o vyšetřování množin bodů, např. úloha o čtyřech přímkách (obr. 97) požadovala:

Jsou dány čtyři libovolné přímky a, b, c, d a čtyři úhly α, β, γ, δ. Hledáme geometrické místo bodů P, z nichž lze vést k a, b, c, d úsečky PA, PB, PC, PD šikmo pod danými úhly α, β, γ, δ tak, že platí $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$.



Obr. 97

Při svém řešení Descartes zvolil bod O na přímce a, písmeny x, y označil velikosti úseček OA, AP; velikosti PB, PC, PD vyjádřil lineárními výrazy a všechny dosadil do $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$. Protože získal jen kvadratickou rovnici, ukázal, že geometrickým místem bodů P je přímka, kružnice nebo jedna z kuželoseček. (Pappova poznámka, že úlohu kromě Appolónia nikdo z antických geometrů nevyřešil, dávala Descartově metodě „punc" vysoké hodnoty.)

Descartes vyřešil i řadu dalších geometrických úloh algebraickým kalkulem, který vylepšil výhodnější symbolikou, než byla Viètova. Až na znaménka rovnosti a nerovnosti použil způsoby zápisu výrazů a rovnic, které jsou dodnes běžné. Pokoušel se však bez úspěchu vyřešit Apollóniovu úlohu pro kružnice (vede k rovnici 8. stupně) a chybně řešil úlohy o křivkách v prostoru (pracoval s jejich průměty do roviny a chyboval v tom, že průměty normál křivek považoval za kolmé k průmětu křivky). Normály rovinných křivek určoval algebraicky tak, že hledal střed vhodné kružnice, která prochází bodem křivky; při výpočtu společných bodů takové kružnice a křivky dostával rovnici s vícenásobným kořenem. Tečny křivek sestrojoval až jako kolmice k normálám. Descartes také ukázal, že základní konstrukce kružítkem a pravítkem vedou k řešení rovnic 2. stupně; na základě toho vyslovil hypotézu, že těmito konstrukčními prostředky nelze vyřešit úlohy, jež po analytickém vyjádření vedou k rovnicím lichého stupně. (To není přesná formulace kritéria pro rozhodování o řešitelnosti úloh kružítkem a pravítkem.)

Jak jsme si všimli na obr. 97, Descartes se neomezoval na soustavy souřadnic s kolmými osami, proto název kartézská soustava souřadnic nemá historické opodstatnění. Nelze hovořit ani o osách souřadnic, protože Descartes vyznačoval jen jednu osu a na ní počátek. Také *Pierre de Fermat* (1601 – 1665) napsal:

„Jakmile v rovnici vystupují dvě neznámé veličiny (= proměnné úsečky), existuje geometrické místo, koncový bod jedné veličiny opisuje přímku či křivku .... Rovnice můžeme znázornit, když obě neznámé veličiny nanášíme v nějakém úhlu (který většinou bereme jako pravý) a dáme jedné polohu (tj. na pevné přímce od zvoleného bodu) a druhé koncový bod."

Fermat pracoval s Viètovou symbolikou, v ní vyjádřil kanonické tvary rovnic kuželoseček, které dnes zapisujeme

$$xy = a^2, \quad x^2 = ay, \quad y^2 = ax, \quad a^2 - x^2 = y^2, \quad x^2 + a^2 = y^2,$$

vědomě přitom sledoval antické vzory, Archiméda a Apollónia. Fermat popsal také transformace souřadnic posunutím i otočením; jeho text z doby kolem r. 1635 však koloval jen v opisech, tiskem vyšel až v r. 1679, kdy se už ujala Descartova symbolika. Fermat se věnoval teorii čísel, algebře a vypracoval algebraickou metodu určování lokálních extrémů proměnných veličin, vyjádřil přírůstek veličiny a extrém hledal v bodě, kde přírůstek veličiny je nulový. Obdobně se přiblížil pojmu derivace i při určování tečen křivky. Do geometrie přispěl také formulací a řešením prostorové obdoby Apollóniových úloh, tzv. Fermatových úloh o kulových plochách.

Když aplikoval algebru při řešení geometrických úloh, Descartes překonal i další bariéry, jež vytvořila teoretická matematika v antickém Řecku a jež si dnes vůbec neuvědomujeme. Byl to předně strohý zákaz (formulovaný Aristotelem) dokazovat geometrickou větu aritmetickými, a tedy i algebraickými postupy, dále pak tzv. princip homogenity při studiu veličin. Ten byl dán geometrickou algebrou – délky lze porovnávat s délkami, plochy s plochami, tělesa s tělesy; dodržoval ho i Viète, proto získával jen algebraické výrazy obsahující členy stejného stupně:

$$A^3 + A^2B + 3AB^2 + 4B^3, \qquad \frac{A^2 - B^2}{A + B} = A - B$$

Descartes vědomě algebru zbavil těchto pout a svůj postup zdůvodnil: „... symboly a^2, b^2 a jim podobnými rozumím jen úsečky, i když je nazývám čtverci nebo krychlemi .... všude, kde je příliš mnoho nebo příliš málo rozměrů, lze spatřovat jednotku, takže když je nutno určit kubický kořen z $aabb - b$, je třeba si představit, že veličina $aabb$ se dělí jednotkou a druhá veličina b je jednotkou dvakrát vynásobena." [To znamená, že $\sqrt[3]{aabb - b}$ je úsečka, protože lze napsat

$$aabb - b = \frac{aabb}{1} - b \,.\, 1 \,.\, 1,$$ což je „krychle" (rozdíl členů 3. stupně).]

Počátky analytické geometrie byly tedy projevem revolučního zvratu v matematice, který umožnil studovat geometrické objekty pomocí jejich analytického vyjádření a dávat algebraickým výrazům a rovnicím geometrický význam pomocí proměnných úseček. Matematici získali možnost studovat změny, pohyby, hledat optimální řešení problémů, jež přinášela mechanika, optika a další obory. Bez analytické geometrie 17. století by si neosvojili tolik zkušeností se studiem křivek, které jim (spolu s představou pohybu) umožnily položit základy diferenciálního a integrálního počtu.

Seznamme se stručně s rozvojem analytické geometrie, která se však v 17. století vůbec nevyčleňovala z matematiky jako samostatná disciplína (až v r. 1796 použil S. F. Lacroix tento název a až v r. 1808 vydal J. G. Garnier první samostatnou učebnici nazvanou Analytická geometrie). Obdobně tomu bylo s vývojem terminologie, bez níž si dnes nedovedeme texty z analytické geometrie představit.

Descartes ani Fermat nepoužívali termín souřadnice, ale jen „veličina" nebo „úsečka". Latinský termín „abscissa" pro úsečku na zvolené ose s počátkem použil G. W. Leibniz (1646–1716) až v r. 1675, termín „ordinata" (= pořadnice) se užíval v překladech Apollóniových děl, ale až v r. 1692 zavedl Leibniz termín „coordinata" (= souřadnice). Slovo „axis" (= osa) užil I. Barrow v r. 1670, slovo „initium" (= počátek) J. de Witt v r. 1659, slovo „origine" v témž smyslu zavedl F. Lahire v r. 1679. Terminologie nebyla jednotná až do poloviny 18. století, kdy se poněkud ustálila vlivem Eulerova díla.

Po vydání Descartovy Geometrie (1637) se objevila řada komentářů s ukázkami dalších úloh zvládnutelných jeho metodou, především je psali jeho nizozemští přátelé, u nichž žil. Všichni však volili souřadnice tak, aby nemuseli počítat se zápornými čísly, teprve v r. 1656 použil J. Wallis (1616–1703) i záporné souřadnice. I. Newton (1643–1727) v r. 1676 provedl důkladnou klasifikaci křivek 3. stupně (udal 72 typů ze 78 existujících), popsal také přechod od pravoúhlých souřadnic k polárním a zpět. J. Stirling v r. 1717 začal důsledně kreslit obě osy, ale osu y považoval za podružnou.

Ve stereometrii se analytická metoda prosazovala zprvu jen tak, že se zkoumaly rovinné řezy těles (rotačních kuželů, ale i hyperboloidů aj.) a osy souřadnic se volily v rovině řezu. Tři souřadnice použil F. Lahire (1679) v málo známém spise, příležitostně i jiní při studiu ploch, například A. Parent (1666–1716), který odvodil rovnice kulové plochy v tvaru středovém (r. 1700). V r. 1715 se J. Bernoulli (1667–1748) v dopise Leibnizovi zmínil o možnosti určovat souřadnice x, y, z bodu prostoru pomocí kolmic na tři navzájem kolmé roviny.

A. C. Clairaut (1713–1765) vydal anonymně v r. 1731 knihu Výzkum křivek s dvojí křivostí, v níž používal rovnici roviny, odvozoval rovnice rotačních kvadrik, soustavou dvou rovnic vyjadřoval prostorové křivky. L. Euler (1707 až 1783) napsal dvousvazkový Úvod do analýzy ..., ve 2. svazku (1748) podal velmi přístupný systematický výklad analytické geometrie v rovině a v prostoru s úplnou diskusí geometrického významu kvadratických rovnic s dvěma a třemi proměnnými (poprvé popsal hyperbolický paraboloid).

Pojem funkce výrazně uplatnil při parametrickém vyjadřování křivek v prostoru pomocí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; rovnicemi popsal také různá zobrazení v prostoru, např. rotaci kolem osy, použil je též k úpravě obecného tvaru rovnice kvadriky v prostoru na kanonický tvar.

Francouzští encyklopedisté vyjádřili v polovině 18. století mínění své doby,

když studium přímek a rovin ponechávali elementární syntetické geometrii (v Euklidově duchu), zatímco studium kvadrik zahrnovali do analytické geometrie. (Tento názor byl poplatný stavu algebry, kde ještě nevznikl výhodný kalkul lineární algebry.) *Gaspard Monge* (1746–1818) řešil v jedné své průkopnické práci z r. 1771 metrické úlohy o přímkách a rovinách, vzdálenostech, velikostech úhlů apod., v pozdějších učebnicích pro porevoluční školy záměrně (z didaktických důvodů) probíral analyticky nejprve lineární útvary, pak kvadratické. Kapitoly věnované v učebnicích analytické geometrii vycházely tehdy bez obrázků, a to zcela úmyslně, protože se v nich předváděly algebraické výpočty; pro zobrazování útvarů se právě vytvářely metody deskriptivní geometrie. V učebnicích Mongeových, Lacroixových a Garnierových (vydaných kolem r. 1800) lze nalézt všechny tvary rovnic přímek a rovin, všechny vzorce pro velikosti apod., ale bez determinantů, vektorů a matic.

Po celé sledované období se do analytického studia geometrie prolínaly infinitezimální úvahy, které dnes zařazujeme do diferenciální geometrie, a také úvahy o útvarech vyšších stupňů, jež dnes patří do algebraické geometrie. O výsledcích dosažených v těchto směrech jsme zde nehovořili, i když velmi pomohly kartografii, mechanice, optice, astronomii apod. Geometrické problémy také významně podněcovaly rozvíjení teorie diferenciálních rovnic a variačního počtu.

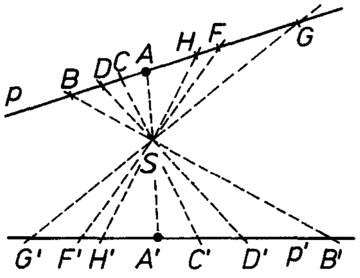
6.7 Zaměření syntetické geometrie v 17. – 19. století

Stručněji než o analytické geometrii můžeme hovořit o geometrii pěstované v klasickém duchu, bez souřadnic, které se pro odlišení začalo říkat syntetická geometrie. Její hlavní prostředky studia geometrických útvarů se zprvu omezovaly jen na shodnost a podobnost trojúhelníků, stejnolehlost kružnic, poměry úseček, nanejvýš některé trigonometrické vztahy apod. Díky malířským technikám a kartografii pronikly však do ní představy o promítáních kulové plochy na rovinu, roviny na rovinu a prostoru na rovinu.

Práce stavitelů už ve starověku vyvolávala potřebu zobrazit prostorový objekt v rovině; v půdě vyznačené základy stavby se svislými stěnami byly přirozeným „kolmým průmětem" objektu do roviny. Skutečnou představu o promítání využívali evropští malíři od 13. století n. l. při zdůvodňování pravidel perspektivy (název použil polský umělec Witello při přepracování Euklidova díla Optika). Až v 16. století se někteří italští matematici (E. Danti, F. Commandino, G. Benedetti) věnovali teoretickému zdůvodnění praktik popisovaných v dílech malířů: Guidubaldo del Monte (1545–1607) napsal Šest knih o perspektivě (1600), kde zavedl pojem „úběžník", a F. d'Aiguillon (1566–1617) Šest knih o optice (1613), kde kromě perspektivy zkoumal i stereografickou projekci.

Vlámský geograf Gerhard Mercator (1512–1594) popsal v r. 1569 konstrukci mapy zemského povrchu, na níž byly zobrazeny poledníky jako přímky svislé a rovnoběžky jako úsečky na vodorovných přímkách (povrch koule se promítá ze středu koule na válcovou plochu, jež se koule dotýká podél rovníku, válcová plocha se pak rozvine do roviny). Pro mořskou navigaci to byly výhodné mapy, protože čáry stálého kursu se zobrazovaly úsečkami, vzdálenosti mezi poledníky byly stejné; vzorec pro vzdálenost rovnoběžek našel už v r. 1599 anglický navigátor E. Wright.

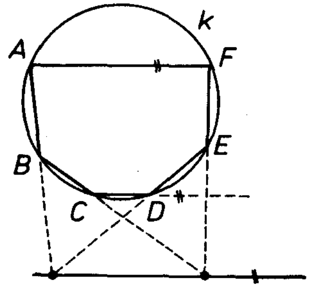
Již vzpomenuté Koperníkovo dílo uvolnilo cestu hypotézám o drahách planet a komet. *Johannes Kepler* se v díle Optická astronomie (1604) zabýval kuželosečkami, popsal spojitý proces, kterým hyperbola přechází v parabolu, když se jedno její ohnisko vzdaluje do nekonečna. Představoval si však jeho pohyb i „dál", kdy se objeví „na druhém konci" osy a začne určovat elipsy až do splynutí s pevným ohniskem, kdy vznikne kružnice. Kepler zavedl pojem „ohnisko" (focus) a „nekonečně vzdálený bod", vyslovil též tzv. zákon spojitosti (lex continuitatis) a jeho zkratkové znění „Příroda nedělá skoky". Bez teoretických zábran antiky uplatňoval Kepler úvahy o tenkých proužcích, v kruhu je zkracoval v daném poměru a vytvářel tak elipsu (dnes hovoříme o obrazu kružnice v osové afinitě), odvodil vzorec pro její obsah. Tak se až na počátku 17. století v syntetické geometrii vytvořila představa o možnosti definovat kuželosečky pouze jako rovinné křivky, bez pomoci kuželů.



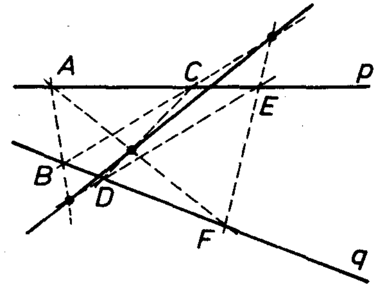
Obr. 98

V souvislosti s rozvojem inženýrského školství ve Francii, Nizozemí a Anglii vycházelo mnoho učebnic o perspektivě, které kromě praktických návodů obsahovaly i teoretickou část. Nejpozoruhodnější spisy publikoval Gérard Desargues (1593 až 1661), který kolem r. 1640 překvapoval svou „botanickou" terminologií (stvol, větev, květ, pupen apod.), ale podal teoretická zobecnění zkušeností z promítací (= projektivní) geometrie. Už v práci z r. 1636 byla obsažena věta o perspektivních trojúhelnících nazývaná nyní Desarguova (viz odstavec 5.6); v práci z r. 1639 studoval svazky přímek (i s nevlastním středem) a svazky rovin. Pomocí konstantních součinů $AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF$ (obr. 98) zavedl pojem involuce na přímce jako zobrazení přiřazující $B \leftrightarrow H$, $C \leftrightarrow G$, $D \leftrightarrow F$, klasifikoval involuce, sestrojoval jejich samodružné body a dokázal větu o harmonické čtveřici tvořené dvěma samodružnými body a libovolnou dvojicí vzoru a obrazu. Involuci přenášel do svazků přímek a ukazoval, že involuce na přímce se středovým promítáním „přenáší" na obraz přímky (obr. 98). Dokázal také větu o svazku kuželoseček procházejících čtyřmi danými body a o involuci vytvořené svazkem na libovolné přímce v rovině. V souvislosti s tím promítal involuci i na kuželosečku; popsal také konstrukční využití těchto poznatků při hledání os průmětu kuželosečky.

Je obdivuhodné, co všechno Desargues znal; jeho ideu převzal (16letý!) *Blaise Pascal* (1623–1662) a už v r. 1640 publikoval stručný spisek o kuželosečkách, kde dokázal větu o šestiúhelnících vepsaných do kružnice a projekcí ji přenesl na kuželosečky. V případě, kdy kuželosečka je složená ze dvou přímek, platí věta také (viz odstavec 5.7); tuto její variantu ovšem uvedl již Pappos kolem r. 300 n. l. (Na obr. 99a je znázorněna situace na kružnici – průsečíky dvojic přímek AB, DE a BC, EF a CD, FA leží na jedné přímce; na obr. 99b je těchto šest bodů střídavě umístěno na dvě přímky.) Dalším pokračovatelem Desargua byl už citovaný *F. de la Hire* (též de Lahire), v díle Kuželosečky v devíti knihách (1685) vyšel z polárních vlastností kružnice a promítáním je přenášel na ostatní kuželosečky.



Obr. 99a



Obr. 99b

Projektivní geometrie se začínala rozvíjet dvakrát. Její první etapa, kterou jsme sledovali, dozněla ještě v 17. století. V průběhu 18. století se měnila společenská objednávka zobrazovacích metod, díky technickému rozvoji se projevovala rostoucí potřeba přesných výkresů, z nichž by bylo možné odměřovat rozměry předmětů. Těmto požadavkům nevyhovovala už perspektiva, ale kolmá promítání na tři k sobě kolmé roviny. *Gaspard Monge* (1746–1818) vypracoval spis Deskriptivní geometrie (1798), jímž dal jméno novému oboru syntetické geometrie. Škola École Polytechnique, kterou zřídila francouzská buržoazie po upevnění svého vítězství, vzdělávala vojenské a civilní inženýry; matematika tam byla rozdělena na analýzu a deskriptivní geometrii. To ukazuje, že syntetické metody se přisuzovaly deskriptivní geometrii a ta že byla pojata značně široce. Někteří Mongeovi spolupracovníci a žáci přispěli velmi významně k novému rozmachu syntetické geometrie a k znovuzrození projektivní geometrie.

Lazare Carnot (1753 – 1823) byl stoupencem syntetické metody natolik, že požadoval „osvobození geometrie od hieroglyfů analýzy". V knize Geometrie polohy (1803) vypracoval kalkul s orientovanými úsečkami, předchůdce pozdější vektorové algebry. Uvažoval $AB = -BA$, tři kolineární body A, B, C charakterizoval rovnicí $AB + BC + CA = 0$, vyjádřil jimi Menelaovu větu, protože snadno rozepsal dělicí poměry atd.

Obdobný přístup rozvinul *G. Bellavitis* (1803 – 1880) ve své teorii ekvipolencí (1835) a tzv. geometrických rovnic; šlo o svérázný geometrický kalkul, který umožňoval řešení obtížných úloh.

Victor Poncelet (1788 – 1867) se stal znovuzakladatelem projektivní geometrie (1822), využíval středové promítání, poznal zásadní význam dvojpoměru jako jeho invariantu, rozlišil projektivní a metrické vlastnosti útvarů, rozšířil přímku, rovinu a prostor o nevlastní body, využíval polaritu a princip spojitosti, objevil princip duality atd. J. D. Gergonne (1771 – 1859) soupeřil s Ponceletem, už v r. 1824 zapisoval dvojice duálních vět projektivní geometrie v sloupcích vedle sebe. Po celé 19. století se projektivní geometrie pěstovala jako „nová geometrie" či „vyšší geometrie", zhruba do poloviny století převážně synteticky.

V rámci dobového úsilí o zpřesnění základů matematiky (včetně geometrie) se projektivní geometři snažili vyrovnat s problémem, že projektivní pojmy, ač polohové, se dosud vyjadřují pomocí metrických vztahů (velikosti úseček a úhlů vystupovaly i v definici dvojpoměru). Snahu odstranit ze základů projektivní geometrie metrické vztahy dovedl k cíli *Christian von Staudt* (1798 – 1867) ve své práci Geometrie polohy (1847). Vyslovil čistě geometrickou definici harmonické čtveřice bodů (pomocí tzv. úplného čtyřrohu) a definoval pomocí ní projektivní zobrazení. V r. 1857 podal i geometrickou konstrukci imaginárních prvků.

Jakob Steiner (1796 – 1863) byl patrně nejúspěšnější syntetický geometr od dob antiky, obohatil elementární i vyšší geometrii mnoha idejemi. Ve spise Systematický rozvoj vzájemné závislosti geometrických tvarů (1832) vyložil projektivní zobrazení jako složení promítání (perspektivností), vytvářel křivky 2. stupně pomocí projektivních svazků přímek, křivky 3. stupně pomocí svazků přímek a svazků křivek 2. stupně atd. atd. Steiner se zabýval konstrukčními úlohami, vyřešil mnoho desítek obtížných úloh, přitom dokázal složité a náročné věty. Způsob řešení úloh pomocí pravítka a jediné narýsované kružnice se nazývá „steinerovská konstrukce"; ač jde o oslabení konstrukčních prostředků ve srovnání s euklidovskými konstrukcemi, lze jimi vyřešit tytéž úlohy. (Je zřejmé, že jediná narýsovaná kružnice se „vtahuje do hry" pomocí stejnolehlosti s kteroukoli jinou kružnicí.)

18. a 19. století přineslo i obohacení syntetické geometrie novými poznatky o trojúhelníku a kružnici; jmenujme aspoň Eulerovu přímku v trojúhelníku, kružnici devíti bodů v trojúhelníku (tzv. Feuerbachovu kružnici), Brocardův bod,

Lemoinův bod v trojúhelníku atd. L. Mascheroni (1750 – 1800) zkoumal konstrukce pouhým kružítkem, jež jsou rovnocenné s konstrukcemi euklidovskými, K. F. Gauss euklidovsky sestrojil v r. 1797 pravidelný 17úhelník vepsaný do kružnice atd. atd.

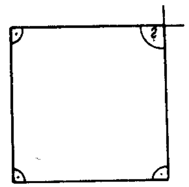
Problematika syntetické geometrie v 18. a 19. století zahrnovala i otázky neeuklidovských geometrií, geometrických zobrazení a konečného rozhodování o neřešitelnosti klasických úloh (kvadratury kruhu, trisekce úhlu apod.). Tyto záležitosti probereme v dalších odstavcích.

6.8 Vznik neeuklidovských geometrií

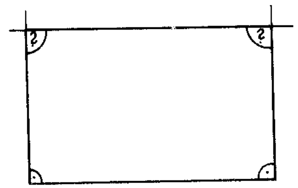
V odstavci 6.4 jsme hovořili o námitkách vůči 5. postulátu Euklidových Základů, které měli antičtí teoretičtí matematici. Nemožnost rozhodnout o rovnoběžnosti přímek na základě její definice vedla Poseidonia už v 1. století před n. l. k vyslovení jiné definice: Rovnoběžky jsou přímky, které jsou od sebe v každém místě stejně vzdálené. S touž definicí vystupovali Aganis a Simplikios v 6. století n. l.; je v ní skryto tvrzení, že ekvidistantou přímky je přímka, a to už postačí k důkazu 5. postulátu (v jednom z pozdějších komentářů an-Najrizího je tento postulát dokázán až jako 35. věta systému, takže 34 zřejmějších vět může rovněž být východiskem k „důkazu").

Islámští matematici už v 9. století samostatně meditovali nad problémem rovnoběžek. Abbas *al-Džauharí* napsal dílo Zdokonalení knihy Základy, kde použil jinou „zřejmou" tezi, že když jedna příčka tvoří s dvěma přímkami shodné střídavé úhly, pak každá příčka tvoří s nimi shodné střídavé úhly. Z toho vyvodil, že střední příčka trojúhelníku se rovná polovině třetí strany a že každým bodem ležícím uvnitř úhlu lze vést přímku protínající obě ramena.

Thábit ibn Quarra (830 – 901) rovněž publikoval spisy, jež už v názvu ohlašovaly důkaz 5. postulátu; v jednom se opřel o „zřejmost" tvrzení, že když se dvě přímky na jedné straně příčky vzdalují, musí se na druhé straně přibližovat. Pak dokázal existenci rovnoběžníku (to je další možné východisko „důkazu" 5. postulátu).



Obr. 100a



Obr. 100b

Ibn al-Hajtham (965 – 1039) rozvinul jinou ideu ibn Quarry — využít představu pohybu úsečky kolmé k přímce, jejíž pata se pohybuje po této přímce. Z teze, že dráha volného konce úsečky je přímka, „dokázal" opět 5. postulát; přitom podrobně zkoumal čtyřúhelník s třemi pravými úhly (obr. 100a) a exhaustní metodou dokazoval, že pak i čtvrtý vrchol je pravý. Z jiných jeho tvrzení uveďme: „kolmice a nekolmice k téže přímce se protnou“, „dvě různoběžky nemohou být rovnoběžné s touž přímkou“ apod.

Umar Chajjám (1048 – 1131) odmítl al-Hajthamovy úvahy o pohybu jako odporující Euklidovým zásadám vyhýbat se v geometrii pohybu. Kromě už zmíněných „zřejmých vět“ uvádí, že dvě kolmice k téže přímce jsou ekvidistantní. Zkoumal také čtyřúhelník s dvěma pravými úhly u základny a se shodnými rameny (obr. 100b), opět exhaustivní metodou „dokázal“, že je obdélníkem.

Nasír ad-Dín at-Túsí (1201 – 1274) přehledně shrnul výsledky předcházejících autorů; jako své řešení navrhl postup, kde uplatnil tezi: „Jestliže se dvě přímky (v rovině) v jednom směru sbíhají, pak se nemohou v tomto směru rozbíhat, leda že by se protínaly.“ Nové v jeho práci bylo poznání ekvivalencí vět o součtu úhlů v trojúhelníku s hypotézami o tupém, ostrém a pravém úhlu v čtyřúhelnících na obr. 100. Jedno z děl at-Túsího vyšlo v Římě arabsky (1594) a latinsky (1657).

Problém 5. postulátu byl natolik teoretický (týkal se logického uspořádání systému vět a jeho výchozích tvrzení), že nezajímal praktické geometry ve středověké Evropě, i když v překladech z arabštiny mohli nalézt o něm zmínky. Jen hebrejský autor Lévi ben Geršun vypracoval v 1. polovině 14. století komentář k problematice. Až v 16. století se jí výrazněji zabýval Ch. Clavius (1537 – 1612), ale hlavní podnět znamenal až překlad díla at-Túsího (1657).

John Wallis už v r. 1663 napsal práci O pátém postulátu, kde zvolil výchozí tezi, že ke každému útvaru existuje podobný mu útvar; z ní už lze postulát dokázat. (Vrátil se tak k ideji al-Džauharího.) Také ostatní badatelé tak či onak dospěli k výchozím tezím, které už byly v islámské matematice použity. *Girolamo Saccheri* (1667 – 1733) uveřejnil spis Euklides vší poskvrny zbavený (1733), jehož těžiště bylo ve studiu čtyřúhelníku na obr. 100b, který byl pak v Evropě nazván „Saccheriho čtyřúhelník“. Význam práce spočíval v dlouhé řadě pouček vycházejících z negace 5. postulátu, kterou autor sestavil, aby mohl dospět ke sporu, že „přirozenosti přímky“ odporuje, aby se dvě různé přímky v nekonečnu „protínaly“ pod nulovým úhlem. (To prozrazuje, že neuznával limitní situaci dotyku rovnoběžek v nevlastním bodě.)

Je zajímavé, že už v r. 1763 shromáždil G. S. Klügel ve své disertační práci přehled 30 „důkazů“ 5. postulátu, které byly publikovány.

Johann H. Lambert (1728 – 1777) rozvinul své úvahy v díle Teorie rovnoběžek (1766, vydáno 1786) tak, že využil čtyřúhelník z obr. 100a. Opět vyvodil řadu důsledků z neplatnosti 5. postulátu; spor spatřoval v tom důsledku, který tvrdil, že ekvidistantou přímky není přímka. Mimořádným výkonem byly trigonometrické důsledky neplatnosti 5. postulátu; Lambert vypracoval tzv. hyperbolickou trigonometrii, v níž vystupují funkce sinh x, cosh x a vzorce odpovídají vzorcům sférické trigonometrie, zamění-li se reálný poloměr r poloměrem $r \, . \, i$ — imaginárním poloměrem. Usilovným dokazovatelem 5. postulátu byl A. M. Legendre (1752 – 1833),

který vystřídal řadu výchozích tezí, jež jsme si připomněli u islámských matematiků.

Problematika rovnoběžnosti se řešila koncem 18. století a na počátku 19. století na mnoha univerzitách; za svých studií ji promýšlel K. F. Gauss a jeho přítel W. Bolyai, jejich učitel Bartels ji přenesl do daleké Kazaně, kde studoval N. I. Lobačevskij. Tak došlo k jevu, že se stejná problematika obdobně řešila na odlehlých místech Evropy (Gauss v Göttingen, syn W. Bolyaie János v Sedmihradsku a Lobačevskij v Kazani).

Zrekapitulujeme-li po 2 000 let se opakující (byť sporadické) snahy dokázat 5. postulát, zjistíme, že na počátku 19. století n. l. byly známy dvě skupiny vět:

A. Věty považované za zřejmé, z nichž bylo možno postulát dokázat, ale které z něho také vyplývaly, tj. věty ekvivalentní s 5. postulátem.

B. Věty, které byly odvozovány z negace 5. postulátu a používány jako doklady neplatných důsledků negace (při důkazech postulátu sporem).

Za této situace vystupovalo do popředí *kritérium pravdivosti* matematické poučky, na základě čeho jedny věty přijímáme jako zřejmé a jiné odmítáme jako nemožné, nepřípustné. Tak se s ryze teoretickým problémem deduktivního systému spojila filozofická problematika. Euklidovská geometrie měla oporu v praxi, kde se osvědčovala v malých rozměrech, s nimiž lidé pracovali; nikdo nepřipouštěl, že by byla myslitelná jiná geometrická abstrakce ze světa, ve kterém žijeme. Filozof I. Kant (1724 – 1804) vyjádřil idealistický názor, že představa o prostoru je nám vrozená, že předchází i první zkušenosti dítěte s okolním světem, a určuje jeho nazírání na svět. To je *teze o apriornosti představy prostoru*, která samozřejmě byla představou založenou na euklidovské geometrii. Proto nebylo snadné získat uznání pro geometrii prostoru, která se lišila od euklidovské a byla jen logicky bezesporným systémem (v dosud zpracované části), a tedy geometrií, jejíž platnost si lze představovat snad ve vesmírných rozlohách.

Věty skupiny B asi spojil do určitého systému *Karl Friedrich Gauss* (1777 – 1855) už na počátku 19. století, ale nic nepublikoval z obavy, že by nemohl takovou teorii obhájit. Nezávisle na něm se propracovávali k témuž systému na počátku 20. let János Bolyai (1802 – 1863) a Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792 – 1856), první začal patrně o něco dříve, ale druhý dříve zveřejnil své výsledky (1826) a vydal celou řadu publikací, zatímco Bolyai jen proslulý 26stránkový Appendix (= Dodatek) k jedné knize svého otce (1832). Oba mladí vědci prožili velké zklamání a strádání, protože zůstali nepochopeni po celý zbytek života. Lobačevskij se snažil potvrdit svou geometrii měřením úhlů v trojúhelnících určených stálicemi v kosmu, ale výsledky byly v mezích pozorovacích chyb, tedy neprůkazné. Ukazoval také, že pomocí trigonometrie, kterou vypracoval pro svou geometrii, lze úspěšně počítat určité integrály, ale nic nebylo přesvědčující. Bolyai zdůraznil systém pouček, které lze dokázat z ostatních axiómů bez použití 5. postulátu nebo jeho negace, tzv. *absolutní geometrii*. Snažil se odvodit co nejvíce jejích pouček, dále pak porovnávat dvě její možná rozšíření (po přijetí 5. postulátu či jeho negace).

V odstavcích 5.13 *a* 5.14 *jsou obsaženy poučky, definice a ilustrace k výkladu o absolutní geometrii a geometrii Lobačevského. Odstavce* 5.1 – 5.12 *však nereprodukují výstavbu geometrie běžnou v* 19. *století, uplatňují přístup, který zdůrazňuje algebraické struktury a pochází až z* 20. *století.*

Vznik neeuklidovských geometrií byl dramatický, protože provázel další abstrakční zdvih ve vývoji matematiky, který přinesl zrod různých geometrií a různých algeber, různých kalkulů apod. Přerod v myšlení matematiků však proběhl až v 60. letech 19. století, kdy se objevily první práce propagující neeuklidovskou geometrii. Plného vítězství dosáhla až po vytvoření názorných modelů Lobačevského roviny; Kleinův model (1871) a Poincarého modely (1882) ukázaly, že v eukleidovské rovině lze nalézt objekty, které splňují při vhodné interpretaci všechny axiómy Lobačevského geometrie. Brzy se ukázalo, že naopak v Lobačevského prostoru lze najít plochu (horosféru), na které jsou objekty, jež při vhodné interpretaci splňují axiómy euklidovské geometrie v rovině. Lobačevského geometrie je tedy bezesporná právě tehdy, když je bezesporná euklidovská geometrie.

Existence různých geometrií, jež jsou bezespornými logickými systémy, byla významnou porážkou Kantova apriorismu a potvrzením dialektické podstaty lidského poznávání světa. Reálný svět, v němž žijeme, je zdrojem různorodých geometrických abstrakcí, které dílčím způsobem odrážejí některé jeho stránky.

6.9 Obohacení geometrie idejemi moderní algebry

Dostáváme se k tomu stupni historického vývoje matematiky, který proběhl zvlášť intenzívně po r. 1830 a přinesl další proměnu jazyka geometrie od doby, kdy vznikla analytická geometrie. Přispěl také k tomu, že spojenými silami moderní algebry i teorie čísel se dosáhlo konečného řešení problémů otevřených po 2 000 let.

Začněme aspoň letmým přehledem vývoje algebraické problematiky od konce 18. století. Algebra chápaná dosud jako nauka o řešení rovnic si začala vytvářet prostředky k rozhodnutí, zda jsou pomocí čtyř racionálních operací a nejvýše n-tých odmocnin řešitelné všechny rovnice n-tého stupně o jedné neznámé (v oboru reálných čísel). Nejprve se podařilo zvládnout binomické rovnice $x^n - 1 = 0$, a to výhodně v oboru komplexních čísel (de Moivre, Euler). Geometrickou interpretaci všech n-tých odmocnin z jedné jako vrcholů pravidelného n-úhelníku využil K. F. Gauss (1795) k odvození nutné podmínky pro n jako počet stran mnohoúhelníku, který lze sestrojit kružítkem a pravítkem; platí $n = 2^k . p_1 . p_2 \dots p_r$, kde p_i jsou prvočísla typu $2^m + 1$ a $m = 2^s$, k, r, s jsou celá nezáporná čísla. Pravidelný sedmiúhelník tedy není euklidovsky sestrojitelný, zatímco pravidelný 17úhelník ano (Gauss popsal konstrukci).

P. Ruffini (1799, nedokonale) a N. H. Abel (1826) definitivně dokázali neřešitelnost obecné rovnice stupně $n > 4$ pomocí racionálních operací a nejvýše n-tých odmocnin. É. Galois (1832) se zabýval obecnými podmínkami řešitelnosti rovnic pomocí odmocnin, ale práce byla publikována až v r. 1846. Přesto už v r. 1837 vypracoval *J. Wantzel* základy teorie, jež umožnila rozhodnout o tom, zda kořeny rovnice 3. stupně lze vypočítat z jejích koeficientů pomocí racionálních operací a druhých odmocnin; na základě toho prokázal neřešitelnost duplikace krychle a trisekce úhlu pomocí kružítka a pravítka. Na základě důkazu transcendentnosti čísla e (Liouville 1855) dokázal F. Lindemann (1882) transcendentnost čísla π, a tím neřešitelnost kvadratury kruhu pomocí kružítka a pravítka.

Společným rysem všech těchto důkazů bylo vyjádření konstrukční úlohy rovnicí (s jednou neznámou), jejíž koeficienty patří do určitého konečného souboru čísel; pak se popsaly operace, jež máme s prvky souboru provádět, a hledalo se kritérium, jak o libovolném čísle rozhodnout, zda patří mezi výsledky dosažitelné konečným počtem těchto operací. V algebře šlo o vytváření (generování) struktur, jež vedlo především ke studiu grup, okruhů a těles.

Zmiňme se o jednom „opačném pochodu", kdy algebře prospělo geometrické znázornění objektů, se kterými pracovala už 250 let. Byla to *komplexní čísla*, jež se dočkala znázornění v rovině na počátku 19. století. J. R. Argand (1806, 1813) je popsal, ale teprve Gaussův výklad (1831) je natrvalo vtiskl do arzenálu matematiky. W. R. Hamilton (1837) algebraicky přesně zavedl komplexní čísla $x + yi$ jako uspořádané dvojice $[x, y]$ reálných čísel; v r. 1843 však vytvořil kvaterniony $x + yi + uj + vk$ a věnoval se zejména jim, pro složku x zavedl název *skalár* a pro $r = yi + uj + vk$ název *vektor*. Tím uvedl do matematiky vektory jako součty reálných násobků jednotek; termín se však v matematice ujal až daleko později.

Další problematikou algebry, která se ukázala jako velký přínos pro geometrii, bylo *řešení soustav lineárních rovnic*. V 18. století se obohatil algebraický kalkul o determinanty, jejichž dnešní zápis a bohatá teorie se vyvinuly až v 19. století (A. L. Cauchy 1815, C. G. Jacobi 1827 – 1841, A. Cayley 1841 – 1843 aj.). Při aplikaci determinantů se zcela přirozeně sjednocovaly postupy při analytickém řešení geometrických úloh v rovině a v prostoru; přitom algebra „mohla jít dál", tj. řešit i soustavy rovnic o čtyřech a více neznámých, zatímco geometrie nikoli. Prvním narušením meze 3 pro počet souřadnic bodů byl tzv. barycentrický kalkul, který vypracoval A. F. Möbius (1827) jako první soustavu souřadnic vhodnou pro analytické vyjádření projektivních útvarů (včetně nevlastních elementů). Mimořádné zásluhy o *zavedení homogenních souřadnic* v projektivní geometrii měl *Julius Plücker* (1801 – 1868) svými četnými pracemi publikovanými od r. 1828. Ten také předvedl analytická vyjádření svazků přímek, rovin, kvadrik pomocí parametrů, vyjádření kolineací lineárními rovnicemi a korelací bilineárními rovnicemi; našel analytické vyjádření principu duality atd.

Bohatě rozvinutá algebra forem n proměnných umožnila Jacobimu (1834) a Cayleymu (1843) předvést algebraické postupy, které odpovídaly řešením různých úloh v rovině a v prostoru při $n = 2, 3$, ale byly zapsány pro n proměnných. Proto Cayley dal své práci název Kapitoly o analytické geometrii n rozměrů (1843), ačkoliv šlo o ryze algebraické postupy a n-rozměrný geometrický prostor se neuvažoval. Ideu n-rozměrného prostoru popsal *Hermann Grassmann* (1809 – 1877) poprvé v r. 1844, lépe v r. 1862, ale poměrně nesrozumitelným jazykem, název „lineární protažení“ skrýval orientované úsečky a (volné) vektory; Grassmann zkoumal jejich lineární kombinace, skalární a vektorové součiny, smíšené součiny apod. Dnes používanou terminologii pro n-rozměrné prostory vytvořil E. Betti (1871) a C. Jordan (1872).

Samostatnou zmínku zasluhuje přednáška, kterou v r. 1854 proslovil *Bernhard Riemann* (1826 – 1866) v Göttingen. Název O hypotézách, které tvoří základ geometrie naznačuje její programový charakter; Riemann vyslovil názor, že lze rozvíjet různé geometrie v prostorech, jež mají odlišné vlastnosti (výslovně uvedl zakřivení prostoru vlivem rozložení hmoty). Doporučil studovat „n-násobné rozlehlosti“ (dnes říkáme variety) s danými metrikami a tak vytvořil základ dnes rozsáhlé teorie riemannovských prostorů a variet. Uvědomme si časovou osu – Riemannova idea znamenala plnou rehabilitaci Lobačevského geometrie, zatímco euklidovskou geometrii „snášela z trůnu“ jako jeden z možných případů.

V letech 1850 – 60 vytvořila lineární algebra další nástroj výhodného kalkulu – *matice*. Termín zavedl J. J. Sylvester (1850), násobení matic, invertování matic a maticový zápis bilineárních a kvadratických forem popsal A. Cayley (1854), který také v r. 1858 podal algebraickou charakteristiku okruhu matic. Důležitý pojem hodnost matice zavedl až G. Frobenius (1879), který také dovršil teorii řešení soustav lineárních rovnic. Všechny uvedené pojmy se brzy uplatnily v analytické geometrii a slouží tam dodnes; navíc se dnes běžně považují řádky či sloupce matic za vektory.

Termín „vektorový prostor“ se rodil poněkud složitě; matematici 2. poloviny 19. století s ním nepracovali, vektory více využívali fyzici (Maxwell, Gibbs, Heaviside). Heaviside je také autorem označování vektorů tučnými písmeny (1891) a jejich komponent stejnými písmeny s indexy. Teprve v r. 1888 G. Peano vytvořil axiomatický základ „lineárního systému“, který byl vlastně reálným vektorovým prostorem. Termínu „vektor“ se matematici nadále vyhýbali, místo o „vektorových prostorech“ hovořili raději o modulech nad tělesy, až Bourbakiho Algebra vydaná v r. 1947 zavedla tento termín do matematiky jako sjednocující pojem.

Názvy algebraických struktur, které běžně používáme (grupa, okruh, těleso, obor integrity aj.), byly zavedeny většinou ve 2. polovině 19. století nebo ve 20. století; pro geometrii má mimořádný význam pojem grupa, o kterém se zmíníme v dalším odstavci.

6.10 Grupy transformací jako předmět studia geometrie

Pojem grupa byl v 18. století spojen s úvahami o skládání permutací kořenů rovnic (Lagrange 1770), použil ho i Galois (1832). Cayley se pokusil v r. 1854 o definici abstraktní grupy, Kronecker ji zformuloval (1870). V témže roce vyšla závažná kniha Pojednání o substitucích, kterou zpracoval C. Jordan (1838 – 1922) a zavedl v ní základní terminologii. Za studijního pobytu u Jordana se s pojmem grupa seznámil F. Klein a S. Lie; oba pak věnovali studiu grup velkou pozornost a přenesli tento pojem do geometrie.

Felix Klein (1849 – 1925) proslovil v r. 1872 na univerzitě v Erlangen nástupní přednášku, ve které vytyčil program nového pojetí geometrie:

„Obecný pojem, který je nezbytný ..., je pojem grupy prostorových transformací. ... (Dále Klein objasňoval pojem grupy transformací vzhledem ke skládání, invariant grupy, geometrická vlastnost, grupa transformací variety apod.) ... Geometrické vlastnosti jsou charakteristické svou neměnností vůči transformacím grupy. ... Jako zobecnění geometrie vzniká dosti rozsáhlý problém: Je dána varieta a na ní grupa transformací; je třeba vyšetřit útvary, jež patří do variety, a to z hlediska vlastností, jež se nemění při transformacích z grupy. ... Je dána varieta a na ní grupa transformací. Je třeba vypracovat teorii invariantů vůči té grupě.“

Klein naznačil i výčet grup transformací, kterými se zabývala dosavadní geometrie; odhlédneme-li od dobové terminologie, můžeme jeho řetězec inkluzí grup zapsat takto:

grupa shodností – grupa podobností – grupa kolineací – grupa projektivit

Je nápadné, že nezařadil vůbec grupu afinit; vysvětleme si proto historickou situaci:

V odstavci 6.7 jsme poznali Keplerovu aplikaci kolmé osové afinity mezi kruhem a elipsou, kterou (bez slova afinita) využil k určení obsahu elipsy. Protože uplatnil postup, který později vyjádřil Cavalieri jako princip, lze se domnívat, že obdobně postupovali i jiní. L. Euler (1748) napsal o křivkách získaných zobrazením $x = X : m$, $y = Y : n$ tuto poznámku:

„Protože si tyto křivky zachovávají určitou příbuznost (affinitatem), budeme je nazývat afinní.“

A. F. Möbius (1827) vypracoval návrh na členění geometrie podle různých typů „příbuzností“ a vyjmenoval shodnost, podobnost, afinitu a projektivitu; rovnicemi popsal příslušné transformace. Zdá se, že dával slovu *afinita* jiný význam než Euler, vyjadřoval jím spíše samodružnost „u konců“, tj. v nevlastních partiích útvarů (*ad* = k, u, *finis* = konec); afinity také definoval tímto způsobem.

V té době však byla analytická projektivní geometrie na prudkém vzestupu, středem zájmu byly kolineace jako vrcholné představitelky lineárních zobrazení, proto afinity jako jejich zvláštní případy ustoupily na periférii zájmu, obdobně jako vektory. Právě tento postoj se odrazil v Kleinově „přehlédnutí" afinit. Jejich postavení se radikálně změnilo až ve 20. století.

H. Weyl ve spise Prostor, čas, hmota (1923) ukázal a axiomaticky fundoval afinní geometrii a geometrii vektorového prostoru ve vzájemné souvislosti a ve výhodném spojení s lineární algebrou. Teprve pak se pozornost autorů učebnic postupně soustřeďovala na grupy afinit ve vektorových prostorech, výklad o nich opanoval úvodní kursy přednášek, zatímco obecnější grupy se zařazují obvykle až po nich a v daleko menším rozsahu než před sto lety.

Tzv. Erlangenský program se v geometrii prosadil a podstatně změnil vnitřní uspořádání geometrie. V jeho duchu je podána a uspořádána látka i v této učebnici; varietami jsou prostory (euklidovský, afinní, projektivní) a jejich podprostory, grupy transformací jsou podrobně popsány (viz přehled v závěru odstavce 2.9) a jejich invarianty zdůrazněny. Výstižnou úvahu o naplňování Erlangenského programu obsahuje odstavec 3.5.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Kapitola 1

1.2 Analytické vyjádření afinního zobrazení

1. $x' = -3x + y + 7$
2. $p = 2/3$, $q = 7$
3. $p = -8$, $q = 10$, $r = 21$, $x' = (2b - 5)x + by + 12 - 4b$, $y' = (2d + 3)x + dy - 4d - 2$, $z' = (2f + 8)x + fy - 4f - 11$
4. T je samodružný.
5. T je samodružný.

1.4 Samodružné body a směry afinních zobrazení

1. Rovina $x - y + 3z - 1 = 0$ samodružných bodů, samodružné směry dány vektory $(v - 3w, v, w)$, $(2, 1, -1)$.
2. $x' = (3b + 1)x + by - 5b$, $y' = 3(d - 1)x + dy + 5(1 - d)$
3. $[0, 3, 5]$, $(-3, -1, 1)$ se zobrazí na nulový vektor.
4. $[7, -16, -6]$, vektor $(0, 1, 1)$ se zobrazí na nulový vektor, žádný samodružný směr.
5. $[-4, -2]$, $(1, 0)$
8. $a \neq 0$ nebo $a = 0$, $b = 1$, jednoznačně určeno pro $a \neq 0$. Pro $b = 2$ žádný samodružný bod, pro $b \neq 2$ samodružný bod $[1/(2 - b), a/(2 - b)]$. Pro $b < 1$ žádný samodružný směr, pro $b \geqq 1$ samodružné směry určené vektory $(\pm\sqrt{b - 1}, a)$.

1.5 Posunutí, stejnolehlost

1. $p = 3$, $2x' = x + 3$, $2y' = y + 2$
2. $2x' = x + 5$, $2y' = y - 2$
3. $x' = x - 1$, $y' = y - 1$, žádné samodružné body
4. stejnolehlost, koeficient 4, střed $[-1, 0, 2]$

1.6 Základní afinity

1. $x' = 5x - 4y + 4$, $y' = 6x - 5y + 6$
2. Ano, středová souměrnost.
3. Identita nebo elace.

5. Posunutí indukovaná každou z elací v nadrovině samodružných bodů druhé elace musí být stejná, nadroviny různé.
8. $x - y + 2z - 1 = 0,\ k = 1/3$

Kapitola 2

2.1 Základní vlastnosti shodných zobrazení

1. Ne.
2. $y = 1,\ z = -1$ nebo $y = -1,\ z = 1$
3. Osm.
4. 24

2.2 Analytické vyjádření shodného zobrazení

1. Trojúhelník ABC musí být rovnostranný.
2. Není možné.
3. $a = b = 0,\ c = \pm\sqrt{3}/2$

2.3 Grupa shodností

1. $s = \pm 3,\ 25x' = 24x + 7y + 125,\ \pm 25y' = -7x + 24y$ nebo $x' = y + 5,\ y' = \pm x,\ [49/5, \pm 7/5],\ [5, \pm 5]$
2. $x' = \pm x,\ y' = \pm y$ nebo $x' = \pm y,\ y' = \pm x$, celkem 8 možností
3. $p = -1,\ q = 0,\ [0, 1]$, žádný samodružný směr
4. žádný samodružný bod, $(1, -5, 4)$, $(5v - 4w, v, w)$
5. $4b = \sqrt{7},\ 4a = \mp\sqrt{7},\ 4c = \pm 3$ nebo $4b = -\sqrt{7},\ 4a = \pm\sqrt{7},\ 4c = \pm 3$

2.4 Souměrnost podle nadroviny

1. $13x' = 5x + 12y - 4,\ 13y' = 12x - 5y + 6$
2. $13x' = 12x - 5y + 13,\ 13y' = -5x - 12y + 65$
4. $21x' = 20x + 5y - 4z,\ 21y' = 5x - 4y + 20z,\ 21z' = -4x + 20y + 5z$
5. body přímky $[t + 1, t, 0]$

2.5 Souměrnosti v euklidovském prostoru

1. $x' = y + 1,\ y' = x - 1$
2. $3x' = -2x - 2y - z + 10,\ 3y' = -2x + y + 2z + 4,\ 3z' = -x + 2y - 2z + 2$

2.8 Podobné zobrazení. Grupa podobností

2. $p = 0,\ [2, 0],\ (1 \pm \sqrt{2}, -1)$
3. $17x' = x - 4y,\ 17y' = 4x + y$ nebo $17x' = 4x + y,\ 17y' = x - 4y$
4. $x' = ax + 1 - a,\ y' = ay + 1 - a$ nebo $x' = by + 1 - b,\ y' = bx + 1 - b$
5. Bod K, pro který je C středem úsečky BK. Bod L, pro který je A středem úsečky DL.
6. Čtyři.
7. $x' = -2x + y + 3,\ y' = -x - 2y + 4$ nebo $x' = x - 2y + 6,\ y' = -2x - y + 3$
8. $a = b = \pm\sqrt{6}/2$

2.10 Sférická inverze

5. Průsečík přímky AB s tečnou kružnice opsané trojúhelníku ABC v bodě C; jsou-li rovnoběžné, neexistuje inverze.
6. $[0, 0]$ a $[3, 0]$
7. $[0, -1],\ \varkappa = 2,\ x' = 2x/(x^2 + (y + 1)^2),\ y' = -1 + 2(y + 1)/(x^2 + (y + 1)^2)$
8. $[0, 0],\ \varkappa = 9;\ [0, \frac{1}{2}],\ \varkappa = 17/4$

2.12 Transformace roviny v komplexní souřadnici

1. $(1 - \mathrm{i})(1 \pm \sqrt{3})/2$
2. Například $z' = -\mathrm{i}\bar{z},\ z' = 1 + 2/(\bar{z} - 1)$
3. $z' = -3 + 12/(4 - z),\ z' = -3 + 12/(4 - \bar{z})$
4. Například $z' = 4 + 12/(\bar{z} - 4),\ z' = -\bar{z} + 1$
5. Například $z' = -\bar{z} + 1,\ z' = -3 + 12/(\bar{z} + 3)$
6. Řešení kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel.
7. Rovnici pro samodružné body rozepište do reálné a imaginární části.
8. Využijte rovnice z předcházejícího cvičení.

Kapitola 3

3.4 Projektivní rozšíření afinního prostoru

1. $P = (2, 1, 1, -2)$

Kapitola 4

4.1 Bilineární formy

1. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano
2. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 10x_1y_1 + 5x_2y_2$
3. a) $\{\mathbf{o}\}$, b) $[\{(1, 2)\}]$

4.2 Kvadratické formy

1. a) $\begin{pmatrix} 1, & -5/2, & 2 \\ -5/2, & 1, & -1 \\ 2, & -1, & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0, & 1/2, & 0 \\ 1/2, & 0, & -1/2 \\ 0, & -1/2, & 0 \end{pmatrix}$

2. a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -5x_1'^2 - 10x_1'x_2' + 5x_1'x_3' - 5x_2'x_3' + 2x_3'^2$,
b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1'^2 + 3x_1'x_2' + x_2'^2$.

3. a) $\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2' = -2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_3' = 19\boldsymbol{u}_1 + 14\boldsymbol{u}_2 + 8\boldsymbol{u}_3$ ($\boldsymbol{u}_3'$ dán až na nenulový násobek)
$f_2(\mathbf{x}) = x_1'^2 - 7x_2'^2 - 532x_3'^2$,
b) $\boldsymbol{u}_1' = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_2' = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_3' = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$ ($\boldsymbol{u}_3'$ dán až na nulový násobek)
$f_2(\mathbf{x}) = x_1'^2 - x_2'^2$.

4.4 Polární vlastnosti kvadratik

1. a) $\mathbf{P}' = \overleftrightarrow{PQ}$, kde např. $P = (1, 0, -1, 0)$, $Q = (2, -1, 0, 1)$, b) $\mathbf{P}' = \emptyset$, c) $\mathbf{P}' = \{R\}$, kde $R = (1, 0, 0, -1)$

2. $x_0 + 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0$

3. $t_1: x_0 - x_1 - x_2 = 0$, $t_2: x_0 + x_1 + x_2 = 0$, $T_1 = (2, 1, 1)$, $T_2 = (2, -3, 1)$

4. $\tau_1: -9x_0 + x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$, $\tau_2: -5x_0 + 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$,
$T_1 = (1, -4, 2, 1)$, $T_2 = (3, -1, 3, 1)$

4.5 Afinní vlastnosti kvadrik

1. a) $\mathbf{M} = \{S\}$, $S = [-5/4, -1/4]$; b) $\mathbf{M} = \emptyset$; c) $\mathbf{M}$ je přímka $x + 2y - 2 = 0$

2. a) $x - y - 1 = 0$, $3x - y + 1 = 0$, b) $x - y + 1 = 0$, $2x + 3y - 2 = 0$

3. 1a) hyperbola, 1b) parabola, 1c) dvě rovnoběžky, 2a) hyperbola, 2b) dvě různoběžky

4. a) imaginární elipsa, b) elipsa, c) imaginární rovnoběžky, d) imaginární různoběžky

5. a) $x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$, b) $2x^2 - 2xy + 5 = 0$

4.6 Metrické vlastnosti kvadrik

1. a) $\mathbf{Q}$ je elipsa, $S = [3/2, -1]$, $\boldsymbol{u}_1 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$, $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $\mathbf{Q}$: $2x'^2 + 12y'^2 = 1$
b) $\mathbf{Q}$ je singulární, tvoří ji přímky $x + 2y - 1 = 0$ a $2x - y + 3 = 0$
c) $\mathbf{Q}$ je hyperbola, $S = [-5/12, 1/4]$, $\boldsymbol{u}_1 = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, $\boldsymbol{u}_2 = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$, $\mathbf{Q}$: $36x'^2 - 24y'^2 = 1$
d) $\mathbf{Q}$ je singulární, tvoří ji přímky $2x + (1 + \mathrm{i})y + 1 - 2\mathrm{i} = 0$ a $2x + (1 - \mathrm{i})y + 1 + 2\mathrm{i} = 0$

e) $\mathbf{Q}$ je singulární, tvoří ji přímka $x - 2y + 3 = 0$
f) $\mathbf{Q}$ je parabola, $V = [-7/12, 1/12]$, $\boldsymbol{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}$: $y' = (\sqrt{2}/3)x'^2$
g) $\mathbf{Q}$ je imaginární elipsa, $S = [-6/7, -5/7]$, $\boldsymbol{u}_1 = (3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$, $\boldsymbol{u}_2 = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13})$, $\mathbf{Q}$: $x'^2 + 14y'^2 + 4/7 = 0$
h) $\mathbf{Q}$ je singulární, tvoří ji přímky $x + y + 2 - \mathrm{i} = 0$ a $x + y + 2 + \mathrm{i} = 0$

2. a) $xy + 3x - y - 3 = 0$, b) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x + y + 1 = 0$

LITERATURA

[G] Sekanina, M. – Boček, L. – Kočandrlc, M. – Šedivý, J.: Geometrie I. Praha, SPN 1986.
[1] Alexandrov, P. S.: Kurs analitičeskoj geometrii i linějnoj algebry. Moskva, Nauka 1979.
[2] Bican, L.: Lineární algebra. Praha, SNTL 1979.
[3] Blažek, J. a kol.: Algebra a teoretická aritmetika II. Praha, SPN 1985.
[4] Borsuk, K. – Smielew, W.: Podstawy geometrii. Warszawa, PWN 1970.
[5] Bydžovský, B.: Úvod do analytické geometrie. Praha, JČMF 1946.
[6] Cuberbiller, O. N.: Zadači i upražněnija po analitičeskoj geometrii. Moskva, FM 1961.
[7] Čech, E.: Základy analytické geometrie II. Praha, Přírodovědecké vydavatelství 1952.
[8] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. Berlin – Leipzig, Teubner 1930 (ruský překlad: Gilbert, D.: Osnovanija geometrii. Moskva – Leningrad, Ogiz 1948).
[9] Juškevič, A. P.: Dějiny matematiky ve středověku. Praha, Academia 1977.
[10] Kadeřávek, F.: Geometrie a umění v dobách minulých. Praha, J. Štenc 1935.
[11] Kolman, A.: Dějiny starověké matematiky. Praha, NČSAV 1968.
[12] Kutuzov, B. V.: Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie. Praha, NČSAV 1953.
[13] Lenz, H.: Grundlagen der Elementarmathematik. Berlin, DVW 1967.
[14] Mainzer, K.: Geschichte der Geometrie. Mannheim, B. I. – Wissenschaftsverlag 1980.
[15] Matematika XIX. veka. Geometrija. Teorija analitičeskich funkcij (red. A. N. Kolmogorov, A. P. Juškevič). Moskva, Nauka 1981.
[16] Modenov, P. S. – Parchomenko, A. S.: Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii. Moskva, Nauka 1976.
[17] Norden, A. P.: Elementarnoje vvedenije v geometriju Lobačevskogo. Moskva, Gos. iz. techn.-teor. lit. 1953.
[18] Nový, L. a kol.: Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století. Praha, NČSAV 1961.
[19] Pavlíček, J. B.: Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského. Praha, Přírodovědecké vydavatelství 1955.
[20] Peschl, E.: Analytická geometrie a lineární algebra. Praha, SNTL 1971.
[21] Pogorelov, A. V.: Osnovanija geometrii. Moskva, Nauka 1968.
[22] Struik, D. J.: Dějiny matematiky. Praha, MME Orbis 1963.
[23] Vančura, Z.: Analytická metóda v geometrii. I, II, III. Praha, SNTL 1957.
[24] Vilejtner, G.: Istorija matematiki ot Dekarta do serediny XIX. věka. Moskva, GI FML 1960.
[25] Vyšin, J.: Soustava axiómů euklidovské geometrie. Praha, NČSAV.

REJSTŘÍK

T

U

V

W

Z

Doc. RNDr. Milan Sekanina, CSc.
Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Milan Kočandrle, CSc.
Doc. RNDr. Jaroslav Šedivý, CSc.

GEOMETRIE II

Obálku navrhl Karel Mrázek. Obrázky narýsovala PhDr. Alena Šarounová. Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze roku 1988 jako svou publikaci č. 56-03-22/1. Edice Učebnice pro vysoké školy. Odpovědná redaktorka RNDr. Ilona Fořtová. Výtvarný redaktor Václav Hanuš. Technická redaktorka Jiřina Perglová. Ze sazby monofoto písmem Times vytiskl ofsetem Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, závod 1. Formát papíru 70 x 100 cm. Počet stran 308. AA 21,58 (20,37 AA textu, 1,21 AA grafiky) – VA 22,46. Náklad 2500 výtisků. Tematická skupina a podskupina 03/2. 1. vydání.

Cena vázaného výtisku Kčs 27,00.
104/21,852

14-574-88 Kčs 27,00