

Kuželosečky

TRIBONACCI

Obsah

Úvod	5
I Základy teorie kuželoseček	7
1 Kružnice	8
1.1 Různé charakterizace kružnice	8
1.2 Mocnost bodu ke kružnici a rovnice kružnice	9
1.2.1 Zavedení mocnosti bodu ke kružnici ve školské matematice	11
1.3 Apollóniova kružnice	13
2 Kuželosečky obecně	16
2.1 Definice a klasifikace kuželoseček	16
2.2 Planimetrické definice kuželoseček a řezy kuželové plochy	17
2.3 Jednotná rovnice kuželoseček	20
2.3.1 Interpretace ε v případě elipsy	21
2.4 Rovnice kuželoseček v kartézských a v polárních souřadnicích	22
2.5 Rovnice elipsy v polárních souřadnicích	23
2.6 Parabola jako „limitní případ“ elipsy	24
3 Elipsa	26
3.1 Planimetrická definice elipsy a rovnice elipsy	26
3.2 Souměrnost elipsy	27
3.3 Parametrické vyjádření elipsy	28
3.4 Elipsa jako afinní obraz kružnice	29
3.5 Obsah oblasti ohraničené elipsou	30
3.6 Délka elipsy	31
3.7 Elipsa jako řez válcovou plochou	33
3.8 Rozvinutí válcové plochy do roviny	34
3.9 Zahradnická konstrukce elipsy	35
3.10 Proužková součtová konstrukce elipsy	35
3.11 Trojúhelníková konstrukce elipsy	36
3.12 Oskulační kružnice	37
3.13 Ohnisková vlastnost elipsy – odvození analytickou metodou	39
3.14 Tečna elipsy	41
3.15 Ohnisková vlastnost elipsy – jednoduchý syntetický důkaz	42
3.16 Pól a polára	42
3.17 Feynmanova konstrukce elipsy	42
3.18 Konstrukce elipsy pomocí dotýkajících se kružnic	44

4 Parabola	45
4.1 Rovnice tečny paraboly	45
4.2 Konstrukce tečny paraboly	47
4.3 Ohnisková vlastnost paraboly	47
4.4 Subtangenta a subnormála	48
4.5 Avicennova konstrukce paraboly	48
5 Hyperbola	50
5.1 Parametrické vyjádření hyperboly	50
5.2 Obsah trojúhelníku ohraničeného asymptotami a tečnou	51
5.3 Hyperbola v běžném životě	52
6 Vztahy mezi kuželosečkami	54
6.1 Konfokální elipsy a hyperboly	54
6.2 Souvislosti mezi elipsou a parabolou	55
II Projektivní přístup ke kuželosečkám a metoda invariantů	56
7 Elementy projektivní geometrie a lineární algebra	57
7.1 Úvod – o čem to je	57
7.2 Maticová reprezentace kuželosečky	57
7.3 Homogenní souřadnice	59
7.3.1 Geometrické znázornění homogenních souřadnic bodu $X = [x, y]$	59
7.3.2 Výhoda homogenních souřadnic: nevlastní body a homogenizace	60
8 Transformace kuželosečky a metoda invariantů	62
8.1 Posunutí	62
8.2 Otočení	64
8.3 Vlastní čísla a invarianty	65
8.3.1 Invarianty	66
8.4 Praktické provedení (u regulární kuželosečky)	67
8.4.1 Elipsa a hyperbola	68
9 Tečny a asymptoty	70
9.1 Tečna kuželosečky	70
9.1.1 Tečna elipsy – středoškolský přístup	70
9.1.2 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – analogie	72
9.1.3 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – sečna přejde v tečnu	73
9.2 Rovnice asymptot hyperboly	74
9.3 Nevlastní body regulárních kuželoseček	75
9.3.1 Hledání nevlastních bodů	75
10 Další prvky kuželoseček	78
10.1 Osa paraboly	78

11 Klasifikace kuželoseček**82**11.1 Regulární kuželosečky $h(K) = 3$, tj. $\Delta \neq 0$ 8211.2 Singulární kuželosečky $h(K) < 3$, tj. $\Delta = 0$ 83

11.3 Výpočet jednotlivých prvků kuželoseček 84

Úvod

Co v tomto textu (ne)najdeme

Text, který právě čtete, je věnován kuželosečkám. Jeho pojetí je specifické. Nebudujeme celou teorii, některé základní znalosti o kuželosečkách jen předpokládáme. Používáme tak bez dalšího vysvětlení některé základní pojmy, např. *ohnisko, vrchol, hlavní a vedlejší poloosa, řídicí přímka*.

Při výběru témat, kterým se věnujeme, a při volbě celkové koncepce se řídíme několika cíli.

- Chceme poskytnout dostatečně široký výběr zajímavostí ze světa kuželoseček při zachování elementárního charakteru celého textu. Učitel by měl takovými poznatky disponovat; dodávají mu přesvědčení o kráse matematiky i o její užitečnosti, které pak (byť třeba implicitně) může předávat svým žákům.
- Některé významné zajímavosti v textu nejsou obsaženy, neboť budou obsahem předmětu Dějiny matematiky II (např.: co mohlo v dějinách vést ke zkoumání kuželoseček, odkud pocházejí názvy *elipsa, parabola a hyperbola*, souvislost kuželoseček a slunečních hodin, ...).
- Náš zájem je výrazně didaktický, reagujeme na některé koncepční nedostatky, které se vyskytují ve středoškolských učebnicích. Nejvýznamnější je problém tzv. „planimetrických definic“ kuželoseček, podmínky v nich obsažené nejsou ve středoškolských učebnicích ničím motivovány, nijak není ukazována souvislost s řezy kuželové plochy. Dalším problémem je nalezení tečny kuželosečky: nebývá jasné, proč je tečna tak důležitá.
- Nepracujeme pouze analytickou metodou, užíváme i syntetické postupy. Uvádíme také několik konstrukcí elipsy, které podávají zajímavé interpretace rovnic elipsy; jsou také základem mechanických pomůcek, které vykreslují elipsu. Tyto mechanické pomůcky lze snadno modelovat např. v Geogebře.
- Chceme také naznačit souvislosti mezi kuželosečkami, které buď nebývají formulovány vůbec, nebo jen vágně. Například:
 - Ukazujeme, že parabola vznikne z elipsy, pokud délku hlavní poloosy „pošleme do nekonečna“.
 - Zkoumáme vlastnost řídicí kružnice elipsy, která přechází v řídicí přímku paraboly.
 - Na ohniskové vlastnosti kuželoseček (prozkoumané standardními elementárními prostředky) se pak pokoušíme pohlížet jednotně: paprsek vyslaný z jednoho ohniska elipsy se odráží do druhého ohniska elipsy, stejně je tomu tak i u paraboly, jen to druhé ohnisko leží „v nekonečnu“, a tak se paprsek odráží rovnoběžně s osou paraboly.

Poslední bod přímo vybízí k otázkám: „*Nešlo by to pojmut jednotněji?*“ Nezkoumat vlastnosti jednotlivých kuželoseček zvlášť, ale dokázat jednotlivé vlastnosti zároveň pro všechny kuželosečky? Navíc tu přirozeně vzniká potřeba pracovat s body ležícími „v nekonečnu“. Velmi by se hodilo, kdybychom jim mohli přiřadit souřadnice (konečná čísla) a bylo by tak možno s nimi provádět výpočty.

Tento text je tedy vhodnou přípravou na obecnější teorii kuželoseček. Ta je obsahem druhého dílu. Tam je tento jednotný přístup ke kuželosečkám naznačen: kuželosečky jsou reprezentovány maticí, odvodit rovnici tečny je otázka několika jednoduchých řádků. Díky elementům projektivní geometrie lze pracovat s ohnisky, vrcholy a body kuželoseček, které leží „v nekonečnu“. Například asymptota hyperboly je pak opět jen tečnou v bodě hyperboly, který leží „v nekonečnu“, její rovnici tedy není potřeba zvlášť odvozovat. Zároveň se objevuje významná aplikace lineární algebry, zejména teorie bilineárních a kvadratických forem, matic, vlastních čísel, determinantů.

Kuželosečky a školská matematika

Pozornost věnovaná kuželosečkám na středních školách (ostatně i na školách vysokých) byla v posledních sto padesáti letech velmi proměnlivá. Pohybovala se mezi dvěma extrémy:

- značným zájmem, bohatou hodinovou dotací, vyučováním hlubokých výsledků a zajímavých aplikací;
- téměř úplným nezájmem, rezignací na syntetické metody, redukcí tématu na odvození rovnic z tzv. „planimetrických definic“ padajících z nebe a na hledání průsečíků s přímkami pomocí řešení rovnic.

Téma pojaté druhým z uvedených způsobů však není příliš zajímavé. Není tedy divu, že jsou v současné době kuželosečky zařazeny jen v RVP pro gymnázia. Dnešní dobu tak můžeme řadit k obdobím, kdy je téma kuželoseček na ústupu.

Vzdělání, kterého se nám na univerzitě dostává, by však mělo být obecnějšího charakteru, měli bychom být připraveni na dobu, kdy bude kuželosečkám ve školské matematice věnována taková pozornost, která odpovídá jejich významu. Současné pojetí analytické geometrie, kdy je pozornost věnována jen velmi jednoduché práci se souřadnicemi, vektory a lineárními útvary, považujeme za nešťastné. Zcela totiž chybí něco zajímavého a aplikovatelného. Podporuje se tak dojem, že matematika je nezáživná, nudná, k ničemu. Není to však problém matematiky, ale její prezentace v učebnicích, kurikulu, případně při samotném vyučování.

V tomto textu jsme se proto pokusili naznačit několik zajímavostí, které mohou ukázat, že kuželosečky nejsou nezáživným a neužitečným tématem.

Při vytváření kurikula je důležitá *vyváženost*.

- Přílišná snaha o zjednodušení vede k redukcí matematiky na příliš jednoduché poznatky. Žáci cítí, že se „nic nenaučili“, že jsou jim takové poznatky jen málo platné. Není co aplikovat, případné aplikace jsou nereálné, triviální, nezajímavé. Zkušenosti ukazují, že obliba matematiky pak výrazně klesá.
- Žák nesmí být novými poznatky zahlcen. Je-li téma probíráno příliš do hloubky a/nebo do šíře, stává se neúnosným. Žáci se pak dostávají do podobné situace, jako v předchozím bodě: ve výsledku toho mnoho neumějí, nedovedou dobře probírané poznatky aplikovat. Dostavuje se pocit frustrace a bezvýslednosti. I v tomto případě obliba matematiky výrazně klesá.

Při používání nápadů z tohoto textu při výuce na střední škole je tedy potřeba postupovat velmi uvážlivě.

Whetting Your Appetite

O Archimédovi se traduje, že pronesl: „*Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí.*“ Naštěstí pevný bod neobdržel, a tak si naše Země dál krouží po kuželosečce – elipse...

Na následující obrázku je typický čtenář tohoto skriptu – v očích odhodlání a výzva:

„*Dejte mi kuželovou plochu a vyrobím Vám kuželosečku!*“



Část I

Základy teorie kuželoseček

Kapitola 1

Kružnice

1.1 Různé charakterizace kružnice

I. Kružnice je standardně definována jako množina všech bodů X v rovině, které mají od daného bodu S (nazývá se střed kružnice) vzdálenost rovnou dané kladné konstantě r (nazývá se poloměr kružnice). Dostáváme tak základní charakterizaci kružnice:

$$\boxed{|XS| = r.}$$

Ve zbytku této kapitoly budeme bez újmy na obecnosti pro jednoduchost uvažovat pouze kružnici se středem v počátku.

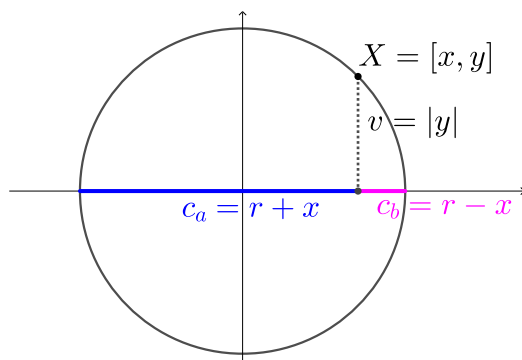
II. Zvolíme-li tedy kartézskou soustavu souřadnic tak, že $S = [0, 0]$ a označíme-li souřadnice bodu $X = [x, y]$, můžeme snadno odvodit rovnici kružnice v této kartézské soustavě souřadnic:

$$|XS| = r \iff \sqrt{x^2 + y^2} = r \iff \boxed{x^2 + y^2 = r^2}.$$

Všimněme si, že vyjádření vzdálenosti bodu od počátku je odvozeno na základě Pýthagorovy věty. Právě uvedené odvození je tedy založeno na Pýthagorově větě.

III. Na kružnici však můžeme pohlížet i takto: pomocí Eukleidovy věty o výšce (z Thalétovy věty plyne, že trojúhelník nad průměrem je pravoúhlý) můžeme vyjádřit přímo vzdálenost v bodu X od osy x :

$$v^2 = c_a \cdot c_b \iff y^2 = (r+x) \cdot (r-x) \iff \boxed{y^2 = r^2 - x^2}.$$



S trochou nadsázky tedy můžeme na Eukleidovu větu o výšce pohlížet spíše jako na větu o kružnici (umožňuje totiž přímo charakterizovat y -ovou souřadnici bodu kružnice) než jako na větu o pravoúhlém trojúhelníku.

1.2 Mocnost bodu ke kružnici a rovnice kružnice

- **Definice mocnosti:** Mocnost bodu M ke kružnici $k(S, r)$ (značíme $m(M, k)$) se často zavádí přímo jako číslo

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2.$$

Tento postup je sice rychlý, je však nutné, aby mu předcházela řádná motivace k zavedení tohoto pojmu. Náležitý postup naznačíme níže. Nyní se však podívejme na geometrickou interpretaci tohoto výrazu v rámci analytické geometrie.

- **Mocnost bodu ležícího na kružnici:** Leží-li bod M přímo na kružnici $k(S, r)$, je $|MS|$ rovna poloměru r a platí

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0.$$

Jelikož platí i opačná implikace (je-li $|MS|$ rovna poloměru r , pak $M \in k(S, r)$), můžeme mocnost bodu ke kružnici použít k charakterizaci bodů ležících na kružnici:

$$M \in k(S, r) \iff m(M, k) = 0.$$

Pro zajímavost rozeberme i případ, kdy bod M neleží na kružnici $k(S, r)$.

- **Mocnost bodu neležícího na kružnici:** Leží-li bod M ve vnější oblasti kružnice $k(S, r)$, je $|MS| > r$ a platí

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 > 0.$$

Pokud naopak bod M leží ve vnitřní oblasti kružnice $k(S, r)$, je $|MS| < r$ a platí

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 < 0.$$

- **Zápis pomocí souřadnic:** Pokusme se předchozí rovnici zapsat pomocí souřadnic. Zvolme pro jednoduchost kartézskou soustavu souřadnic tak, že střed S bude ležet v počátku, tj. $S = [0, 0]$. Bod M nechť má souřadnice $M = [x, y]$. Potom $|MS|^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$ a dostaneme

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2.$$

Rovnice $m(M, k) = 0$ je tedy ekvivalentní se standardní rovnicí kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ obvykle zapisované ve tvaru:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

- **Střed neleží v počátku:** V předchozím pozorování nebylo podstatné, že jsme kartézskou soustavu zvolili tak, aby střed S kružnice ležel v počátku. Pokud by $S = [s_1, s_2]$, dostali bychom

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 = (x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 - r^2$$

a rovnice $m(M, k) = 0$ by opět přešla v obvyklou rovnici kružnice:

$$(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2.$$

- **Závěr – interpretace výrazu v rovnici kružnice:** Pozorovali jsme, že výraz $x^2 + y^2 - r^2$ známý z rovnice kružnice má jasnou interpretaci: jedná se o mocnost bodu ke kružnici. Dostáváme tedy:

$$\boxed{M \in k(S, r) \iff m(M, k) = 0 \iff x^2 + y^2 - r^2 = 0,}$$

případně $x^2 + y^2 - r^2 > 0$, leží-li bod o souřadnicích $[x, y]$ ve vnější oblasti kružnice, a $x^2 + y^2 - r^2 < 0$, leží-li $[x, y]$ ve vnitřní oblasti kružnice. Všechny tyto rovnosti i nerovnosti platí, protože

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2.$$

Analogicky pro kružnici se středem neležícím v počátku:

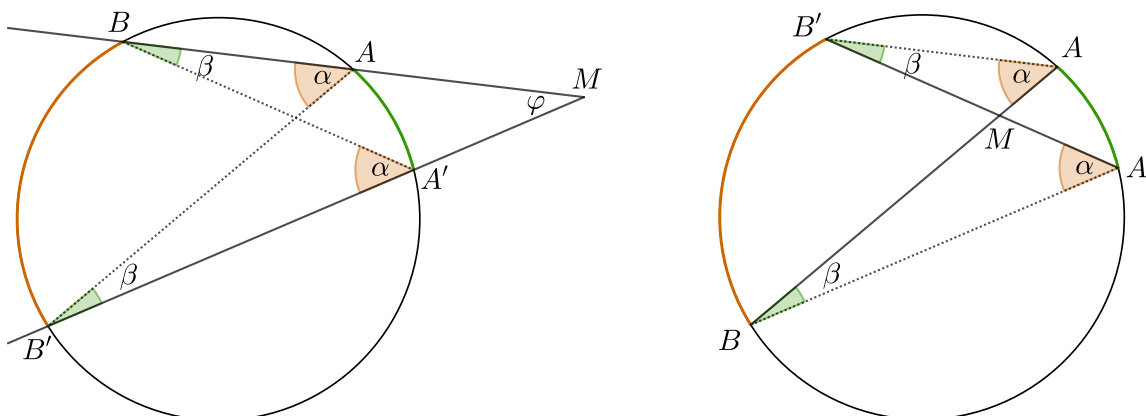
$$M \in k(S, r) \iff m(M, k) = 0 \iff (x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 - r^2 = 0.$$

- **Dodatek – od konstantního $|MA| \cdot |MB|$ k rovnici kružnice:** Pokud bychom neměli pojem mocnosti bodu ke kružnici zaveden výše uvedeným způsobem, ale pouze na základě toho, že pro daný bod M (může být bodem vnější oblasti kružnice, bodem vnitřní oblasti kružnice, bodem kružnice) nezávisí hodnota součinu $|MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky kružnice $k(S, r)$ s libovolnou její sečnou vedenou bodem M , na volbě této sečny, mohli bychom i tak provést podobné odvození rovnice kružnice, jako výše. Jen je třeba mít hotov aspoň stručný rozbor všech případů:

- Bod M leží na kružnici $k(S, r)$: součin $|MA| \cdot |MB| = 0$, neboť $M \in k(S, r)$ právě tehdy, když je M roven jednomu z bodů A, B .
- Neleží-li M na kružnici $k(S, r)$, tak $|MA| \neq 0$ a $|MB| \neq 0$ (protože $M \neq A$ a $M \neq B$), tudíž i $|MA| \cdot |MB| \neq 0$.

Zvolme nyní sečnu tak, abychom mohli mocnost co nejjednodušeji vypočítat. Tomu odpovídá volba sečny procházející středem S kružnice $k(S, r)$. Pak dostáváme $|MA| = ||MS| - r|$, $|MB| = |MS| + r$. Rozlišme nyní případy, kdy M je bodem vnitřní a vnější oblasti kružnice. Výraz $|MS| + r$ je v obou případech kladný. Avšak výraz $|MS| - r$ nabývá pro M ležící ve vnitřní oblasti kružnice záporné hodnoty; proto jsme museli užít absolutní hodnotu.

Lepším řešením problému se znaménkem pro M náležící vnitřní oblasti kružnice by bylo místo délky úsečky uvažovat délku orientované úsečky opatřenou znaménkem respektujícím její orientaci. Jelikož se pohybujeme pouze na jediné přímce AB , je situace jednoduchá. Zvolme na přímce AB libovolně orientaci (zkrátka právě jeden z vektorů \vec{AB} , \vec{BA} prohlásíme za kladně orientovaný, druhý z nich tedy bude orientován záporně).



Hezčí bude prohlásit za kladně orientovaný vektor \vec{AB} , neboť je souhlasný¹ s vektorem \vec{MB} a hodnota výrazu $|MS| + r$ je vždy kladná. Délka orientované úsečky MB (body v tomto pořadí) pak bude tedy kladná, i když připojíme znaménko respektující orientaci (kladně).

K délce orientované úsečky MA (body v tomto pořadí) však připojíme záporné znaménko, neboť vektor \vec{MA} není souhlasný s vektorem \vec{AB} , tato délka opatřená znaménkem tedy bude rovna přímo $|MS| - r$, neboť je tento výraz záporný.

Celkově pak platí formálně jednoduché vztahy (označíme-li délku orientované úsečky XY opatřenou znaménkem respektujícím její orientaci symbolem $|XY|_z$): $|MA|_z = |MS| - r$, $|MB|_z = |MS| + r$ a dostáváme

$$m(M, k) = |MA|_z \cdot |MB|_z = (|MS| - r) \cdot (|MS| + r) = |MS|^2 - r^2.$$

¹ Dva nenulové kolineární vektory budeme nazývat souhlasné, je-li jeden kladným násobkem druhého. Je zřejmé, že např. vektory \vec{AB} a \vec{BA} nejsou souhlasné. Je-li M bodem vnitřní oblasti kružnice, tak opět vektory \vec{MA} a \vec{MB} nejsou souhlasné; délky orientovaných úseček MA a MB tedy opatříme různými znaménky.

Ke stejnému výsledku bychom dospěli i v případě, že bychom zvolili opačnou orientaci, tj. za kladný bychom prohlásili vektor \overrightarrow{BA} . S ním souhlasný je \overrightarrow{MA} , naopak vektory \overrightarrow{BA} a \overrightarrow{MB} nejsou souhlasné. Proto $|MA|_z = -(|MS| - r) > 0$, $|MB|_z = -(|MS| + r) < 0$ a dostáváme opět

$$m(M, k) = |MA|_z \cdot |MB|_z = [-(|MS| - r)] \cdot [-(|MS| + r)] = |MS|^2 - r^2.$$

Jelikož je $|MS|^2 = x^2 + y^2$ (Pýthagorova věta), dostáváme interpretaci výrazu známého z rovnice kružnice

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2,$$

a tím i výše odvozená tvrzení:

$$M \in k(S, r) \iff m(M, k) = 0 \iff x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

1.2.1 Zavedení mocnosti bodu ke kružnici ve školské matematice

Výše uvedené poznámky jsou spíše komentářem k souvislosti mocnosti bodu ke kružnici a rovnice kružnice. Samotný výklad mocnosti bodu ke kružnici by mohl být veden následujícím způsobem.

I. Planimetrie: od základního pozorování k obecné definici

- **Základní pozorování:** $|MA| \cdot |MB|$ nezávisí pro daný bod M a danou kružnici na volbě sečny.
- **Náznak argumentace:** Tvrzení je založeno na podobnosti trojúhelníků.

Úhly při vrcholech B a B' jsou shodné, neboť přísluší stejnému oblouku (zeleně). Je-li M bodem vnější oblasti kružnice, je úhel φ při vrcholu M společný oběma trojúhelníkům, v případě, že M je bodem vnitřní oblasti kružnice, jsou úhly $\angle B'MA$ a $\angle BMA'$ při vrcholu M vrcholové, jsou tedy shodné. Dle věty uu tedy platí:

$$\triangle MB'A \sim \triangle MBA'.$$

Odtud plyne

$$\frac{|MA|}{|MB'|} = \frac{|MA'|}{|MB|} \implies |MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|.$$

- **Pokus o definici mocnosti:** Nyní začíná snaha o definici mocnosti bodu ke kružnici: součin $|MA| \cdot |MB|$ je pro dané M konstantní, může se tedy zdát, že je dobrý nápad definovat mocnost bodu M vzhledem ke kružnici $k(S, r)$ jako hodnotu součinu $|MA| \cdot |MB|$.
- **Výpočet mocnosti:** Hodnotu součinu $|MA| \cdot |MB|$ lze relativně snadno vypočítat v případě, kdy sečna prochází středem S kružnice $k(S, r)$:

$$|MA| \cdot |MB| = ||MS| + r| \cdot ||MS| - r| = ||MS|^2 - r^2|$$

Vidíme, že hodnota tohoto součinu závisí pouze na vzdálenosti bodu M od středu S kružnice $k(S, r)$ a na jejím poloměru r . Vyjadřuje tedy polohu bodu M vzhledem ke kružnici $k(S, r)$. Na soustředných kružnicích (tj. pro pevné $|MS|$) je konstantní.

- **Pozorování hodnot $|MS|^2 - r^2$ v závislosti na poloze bodu M vzhledem ke kružnici $k(S, r)$:**
 - leží-li bod M na kružnici, je $|MA| \cdot |MB| = ||MS|^2 - r^2| = 0$, neboť $M \in k(S, r)$ právě tehdy, když je M roven jednomu z bodů A, B .
 - Neleží-li M na kružnici $k(S, r)$, tak $|MA| > 0$ a $|MB| > 0$ (protože $M \neq A$ a $M \neq B$), tudíž i $|MA| \cdot |MB| = ||MS|^2 - r^2| > 0$.

Všimněme si, že hodnota součinu nabývá svého minima (nula) právě pro $M \in k(S, r)$.

- **Problémy s definicí:**

- Bohužel neplatí, že by existovala bijekce mezi vzdáleností $|MS|$ a hodnotou součinu $|MA| \cdot |MB| = ||MS|^2 - r^2|$, problémem je absolutní hodnota. Pokud bychom uvažovali přímo $|MS|^2 - r^2$, už bychom bijekci dostali.
- Absolutní hodnota ve výrazu $||MS|^2 - r^2|$ je navíc formální komplikací, která je sice drobná, ale vlastně zbytečná.

Zdá se tedy, že výraz bez absolutní hodnoty $|MS|^2 - r^2$ by charakterizoval polohu bodu M vzhledem k dané kružnici $k(S, r)$ lépe, než $|MA| \cdot |MB| = ||MS|^2 - r^2|$.

Součin $|MA| \cdot |MB|$ lze přitom zachovat: stačí, když budeme místo délky úsečky uvažovat *orientovanou délku úsečky*; pak bude platit:

$$|MA| \cdot |MB| = |MS|^2 - r^2.$$

Pro samotnou definici použijeme přímo vztahu $|MS|^2 - r^2$, neboť je jednoduchý a lze jej relativně dobře vypočítat. Navíc nezávisí na tvrzení o konstantnosti součinu $|MA| \cdot |MB|$ (bez platnosti tohoto tvrzení by však tento pojem neměl valného smyslu).

- **Definice:** mocností bodu M vzhledem ke kružnici $k(S, r)$, značíme ji $m(M, k)$, rozumíme reálné číslo

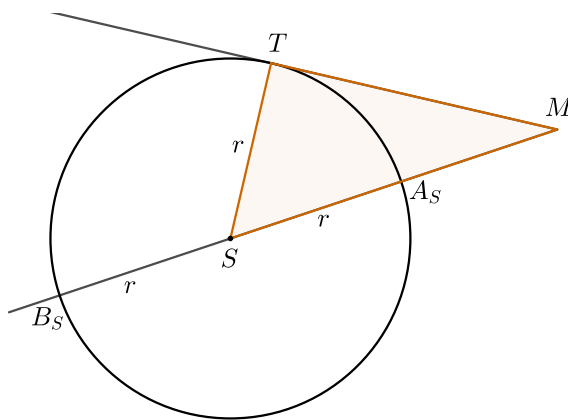
$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2.$$

- **Prošetření případu tečny:** Je-li M bodem vnější oblasti kružnice $k(S, r)$, tj. $|MS| > r$, můžeme kromě sečen uvažovat i tečnu. Ukažme, že pak $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$. Názorně si to můžeme představit tak, že body A a B splynou s bodem dotyku T .

Skutečně, z Pýthagorovy věty plyne:

$$|MT|^2 = |MS|^2 - r^2,$$

což je samozřejmě také rovno $(|MS| - r) \cdot (|MS| + r) = |MA_S| \cdot |MB_S|$.



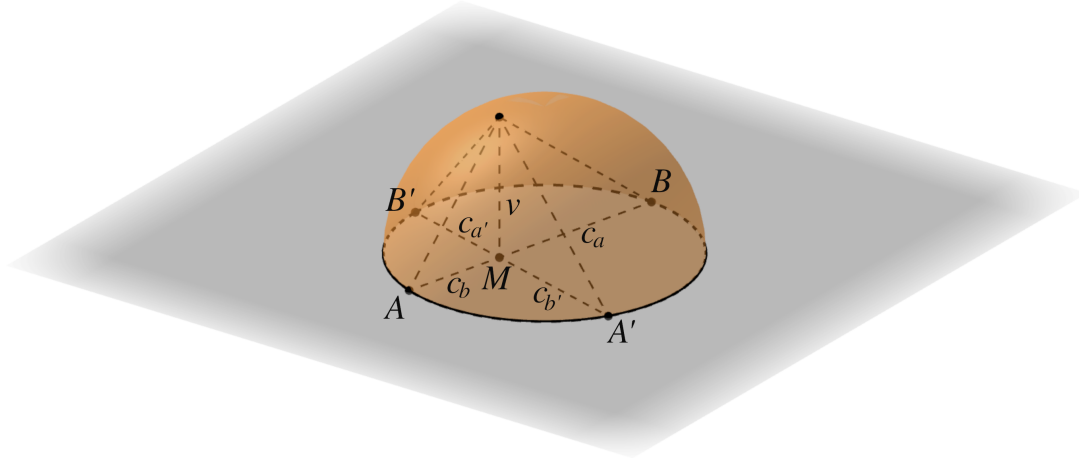
II. Analytická geometrie: interpretace rovnice kružnice

Didaktický postup shrneme jen v několika stručných bodech.

- standardní odvození rovnice kružnice pomocí Pýthagorovy věty
- návrat k učivu v rámci analytické geometrie (cyklický postup)
- otázka po geometrické interpretaci levé strany $x^2 + y^2 - r^2$ rovnice kružnice
- $m(X, k) = |XS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$, výraz v rovnici kružnice je tedy přímo mocností bodu $X = [x, y]$ vzhledem k této kružnici $k(S, r)$

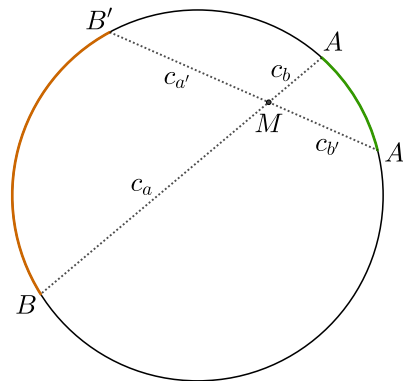
- $|XS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$, získáváme další argument pro obecnou definici $m(M, k)$ pomocí výrazu $|XS|^2 - r^2$ bez absolutní hodnoty

Poznámka: Leží-li bod M ve vnitřní oblasti kružnice, můžeme součin $|MA| \cdot |MB|$ interpretovat takto: nad kružnicí $k(S, r)$ si představme polosféru, v bodě M vztyčme výšku v (sahající až k polosféře) kolmou na rovinu kružnice.



Nyní vedme řez polosférou obsahující výšku v a body A, B (tudíž obsahující i bod M). Tento řez bude tvořen půlkružnicí (z polosféry) a její průměr bude právě AB . Tento průměr bude rozdělen bodem M a v něm bude vztyčena výška. Dle Eukleidovy věty o výšce tak dostaneme:

$$v^2 = c_a \cdot c_b = |MA| \cdot |MB|.$$



Teď si stačí uvědomit, že řez jsme mohli bodem M (a výškou v) vést libovolným směrem, stále by však byl dle Eukleidovy věty o výšce součin roven druhé mocnině stále téže výšky v :

$$|MA| \cdot |MB| = c_a \cdot c_b = v^2 = c_{a'} \cdot c_{b'} = |MA'| \cdot |MB'|.$$

Odtud plyne elegantně konstantnost součinů

$$|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|.$$

1.3 Apollóniova kružnice

Věnujme se nyní úloze najít všechny body X v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů A, B . Je tedy třeba najít všechny body X , $X \neq A$ a $X \neq B$, vyhovující pro dané

$c > 0$ rovnici

$$\frac{|XA|}{|XB|} = c, \quad c > 0.$$

Řešení provedeme analytickou metodou. Zvolme tedy pro jednoduchost bez újmy na obecnosti kartézskou soustavu souřadnic tak, že $A = [-1, 0]$, $B = [0, 0]$ a označme souřadnice bodu $X = [x, y]$. Potom

$$\frac{|XA|}{|XB|} = c \iff |XA| = c \cdot |XB| \iff |XA|^2 = c^2 \cdot |XB|^2,$$

což snadno přepíšeme pomocí souřadnic:

$$(x + 1)^2 + y^2 = c^2 \cdot (x^2 + y^2).$$

Tuto rovnici nyní upravme:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + y^2 &= c^2 \cdot (x^2 + y^2) \\ (1 - c^2)x^2 + 2x + 1 + (1 - c^2)y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Je-li $c = 1$, přejde tato rovnice na tvar

$$2x + 1 = 0,$$

což je rovnice přímky $x = -\frac{1}{2}$. Tato přímka je osou úsečky AB .

Je-li $c \neq 1$, můžeme celou rovnici vydělit $1 - c^2$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{1 - c^2} + \frac{1}{1 - c^2} + y^2 = 0,$$

provést doplnění na čtverec

$$\left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{1 - c^2} + \left(\frac{1}{1 - c^2} \right)^2 \right) + \frac{1}{1 - c^2} + y^2 = \left(\frac{1}{1 - c^2} \right)^2$$

a mírně upravit

$$\left(x + \frac{1}{1 - c^2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{(1 - c^2)^2} - \frac{1}{1 - c^2}.$$

Konstanta na pravé straně je rovna

$$\frac{1}{(1 - c^2)^2} - \frac{1}{1 - c^2} = \frac{1 - (1 - c^2)}{(1 - c^2)^2} = \frac{c^2}{(1 - c^2)^2}.$$

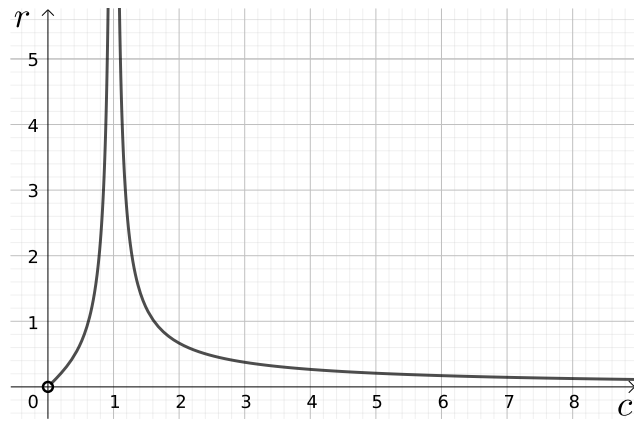
Dostali jsme tak rovnici

$$\boxed{\left(x + \frac{1}{1 - c^2} \right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{(1 - c^2)^2}}.$$

Tato rovnice je rovnicí kružnice se středem $S = \left[-\frac{1}{1 - c^2}, 0 \right]$ a poloměrem $\frac{c}{|1 - c^2|}$.

Zjistili jsme tedy, že hledaná množina bodů je kružnicí; nazývá se *Apollóniova kružnice* po Apollóniovi z Pergé (kolem roku 200 př. Kr.).

Na následujícím obrázku je znázorněna závislost poloměru Apollóniové kružnice na kladném c , tedy závislost $r = \frac{c}{|1 - c^2|}$.



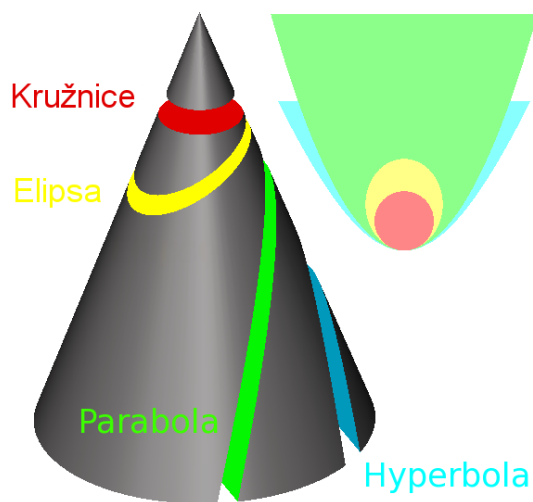
Kapitola 2

Kuželosečky obecně

2.1 Definice a klasifikace kuželoseček

Stručně naznačme některé způsoby, jak lze definovat kuželosečky, s nimiž se setkáváme nejčastěji: elipsu, parabolu a hyperbolu.

Na obrázku (staženo z internetu) jsou zřetelně vidět jednotlivé typy kuželoseček jakožto řezů kuželové plochy (včetně kružnice).



Uvažujme v eukleidovském prostoru \mathbb{E}_3 rotační kuželovou plochu \mathcal{C} a rovinu ϱ , která neprochází jejím vrcholem (tj. rovinu, která není *vrcholová*). Na kuželovou plochu můžeme pohlížet jako na soustavu přímk procházejících vrcholem (tzv. *površky* či *povrchové přímky*).

Snadno nahlédneme, že v \mathbb{E}_3 má rovina ϱ s kuželovou plochou \mathcal{C} vždy neprázdný průnik, protíná tedy aspoň jednu povrchovou přímku.

Podle „počtu“ protínaných povrchových přímk můžeme provést klasifikaci řezů kuželové plochy \mathcal{C} rovinou ϱ , která není vrcholová.

Definice: Protíná-li rovina ϱ všechny povrchové přímky rotační kuželové plochy \mathcal{C} , nazýváme průnik $\mathcal{C} \cap \varrho$ *elipsou*.

Poznamenejme, že elipsa je uzavřená křivka.

Pokud rovina ϱ neprotíná všechny povrchové přímky, lze snadno rozlišit dva případy. Ani v jednom už není řezem uzavřená křivka.

- Rovina ϱ protíná povrchové přímky pouze na jedné straně (vzhledem k vrcholu) kuželové plochy. V tom případě je rovnoběžná právě s jednou povrchovou přímkou.

- Rovina ρ protíná povrchové přímky na obou stranách (vzhledem k vrcholu) kuželové plochy, řezem je pak soustava dvou křivek. V tomto případě je ρ rovnoběžná s právě dvěma povrchovými přímkami.

Pro klasifikaci i definici kuželoseček zvolíme z uvedených dvou kritérií to pohodlnější: počet rovnoběžných povrchových přímek s rovinou řezu. Ekvivalence podmínek uvedených u obou případů (počet rovnoběžných povrchových přímek, průnik s jednou či oběma částmi kuželové plochy) je zřejmá z následující úvahy: stačí si představit rovinu π rovnoběžnou s rovinou ρ procházející vrcholem kuželové plochy; pouze v této rovině mohou ležet povrchové přímky (rovina prochází vrcholem) rovnoběžné s ρ (rovina je rovnoběžná s ρ). Z této představy je také zřejmé, že jiné možnosti nastat nemohou; ρ musí být rovnoběžná aspoň s jednou povrchovou přímkou (jinak by protínala všechny povrchové přímky a řezem by byla elipsa) a více povrchových přímek rovnoběžných s ρ než dvě nemůže existovat (musejí totiž ležet v rovině π , všechny povrchové přímky mají společný bod – vrchol, jsou tedy různoběžné, takové povrchové přímky mohou v jediné rovině π ležet nejvýše dvě).

Nyní tedy můžeme na základě kompletní klasifikace vzájemných poloh kuželové plochy \mathcal{C} a roviny ρ neprocházející jejím vrcholem přistoupit k definici zbylých kuželoseček.

Definice: Je-li rovina řezu ρ rovnoběžná právě s jednou povrchovou přímkou rotační kuželové plochy \mathcal{C} , nazýváme průnik $\mathcal{C} \cap \rho$ *parabolou*.

Poznamenejme ještě, že tato jediná přímka udává směr *osy paraboly*, kterou můžeme definovat jako průnik roviny řezu ρ s rovinou procházející osou kuželové plochy \mathcal{C} a právě onou jedinou povrchovou přímkou rovnoběžnou s ρ . Průnik paraboly s její osou se nazývá *vrchol* paraboly. Tento název je přirozený, uvědomíme-li si jeho polohu na parabole vyznačené přímo na kuželové ploše.

Definice: Je-li rovina řezu ρ rovnoběžná právě se dvěma povrchovými přímkami rotační kuželové plochy \mathcal{C} , nazýváme průnik $\mathcal{C} \cap \rho$ *hyperbolou*.

Poznamenejme opět, že tyto dvě povrchové přímky udávají směry *asymptot hyperboly*.

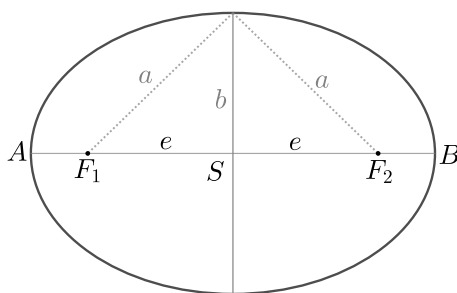
Definici všech tří typů kuželoseček lze založit i na jiných principech, běžně používanou možností, které se budeme věnovat později, je např. projektivní přístup.¹

2.2 Planimetrické definice kuželoseček a řezy kuželové plochy

Ve středoškolských učebnicích se vyskytují většinou tzv. *planimetrické definice* kuželoseček:

Definice: *Elipsou* rozumíme množinu všech bodů X v rovině, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 , tj.

$$|F_1X| + |F_2X| = \text{konst.}$$



¹ Kuželosečkou pak rozumíme obraz kružnice ve středové kolíneaci v rovině. Jednotlivé typy kuželoseček pak lze klasifikovat podle počtu jejich nevlastních bodů („bodů v nekonečnu“):

- žádný nevlastní bod: elipsa,
- jeden nevlastní bod: parabola,
- dva nevlastní body: hyperbola.

Tato klasifikace v podstatě kopíruje klasifikaci předchozí: nevlastní body odpovídají rovnoběžným povrchovým přímkám, neboť mají s rovinou řezu ρ průsečík v nevlastním bodě.

Dodejme ještě, že body F_1, F_2 se nazývají *ohniska* elipsy. Navíc lze ukázat, že konstanta z definice je rovna délce hlavní osy; označíme-li délku hlavní poloosy a , je konstanta rovna $2a$. Proto se vztah z planimetrické definice elipsy často uvádí ve tvaru

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

Definice: *Hyperbolou* rozumíme množinu všech bodů X v rovině, které mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 , tj.

$$||F_1X| - |F_2X|| = \text{konst.}$$

Definice: *Parabolou* rozumíme množinu všech bodů X v rovině, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu F a od dané přímky d (tzv. *řídící přímka*), tj.

$$|FX| = |Xd|.$$

Výhody těchto definic jsou zřejmé: není potřeba pracovat se stereometrickou situací, jednotlivé kuželosečky jsou charakterizovány jednoduchou podmínkou pro body v rovině (proto se také tyto definice nazývají *planimetrické*). Snadno pak také lze odvodit rovnice těchto kuželoseček.

Nevýhody těchto definic jsou však zásadní: není zřejmé, proč jsou křivky definované jako množiny bodů v rovině splňující uvedené charakteristické vlastnosti *kuželo-sečkami*, z celé teorie se zcela vytratil základní prvek – zkoumání řezů *kuželové plochy*.

Tento problém se týká i didaktického pojetí látky. Na žáky nepůsobí dobře, když se na jedné straně učebnice hovoří o kuželosečkách jako řezech kuželové plochy, na další straně se však bez jakéhokoli upozornění formulují definice kuželoseček, které s kuželovou plochou zdánlivě vůbec nesouvisejí.

Pokud se na úvod povídání o kuželosečkách svítí na stěnu svítlnou vytvářející při styku kuželu světla a rovné stěny kuželosečky, působí to na žáky názorně. Následující netriviální skok ke kuželosečkám jako jistým množinám bodů v rovině definovaným pomocí vzdálenosti však působí nekonzistentně a rušivě.

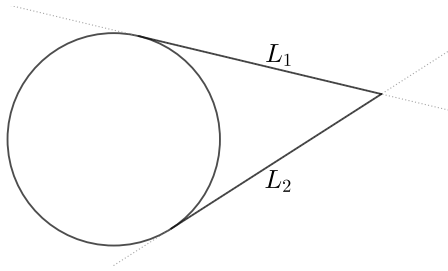
Pomoc je však překvapivě snadná. Zdánlivě složitě vypadající stereometrická situace je naštěstí poměrně přehledná a snadná. Žákům tedy lze poměrně jednoduše vyplnit vzniklou nepříjemnou mezeru a podmínky z planimetrických definic odvodit. Není přitom potřeba provádět kompletní důkazy, postačuje subdůkaz zvýrazňující základní myšlenku.

Naznačený problém souvislosti planimetrických definic kuželoseček a kuželoseček jako řezů rotační kuželové plochy řeší Quételetova–Dandelinova věta. Znění i srozumitelný důkaz této věty pro elipsu, parabolu i hyperbolu je zde:

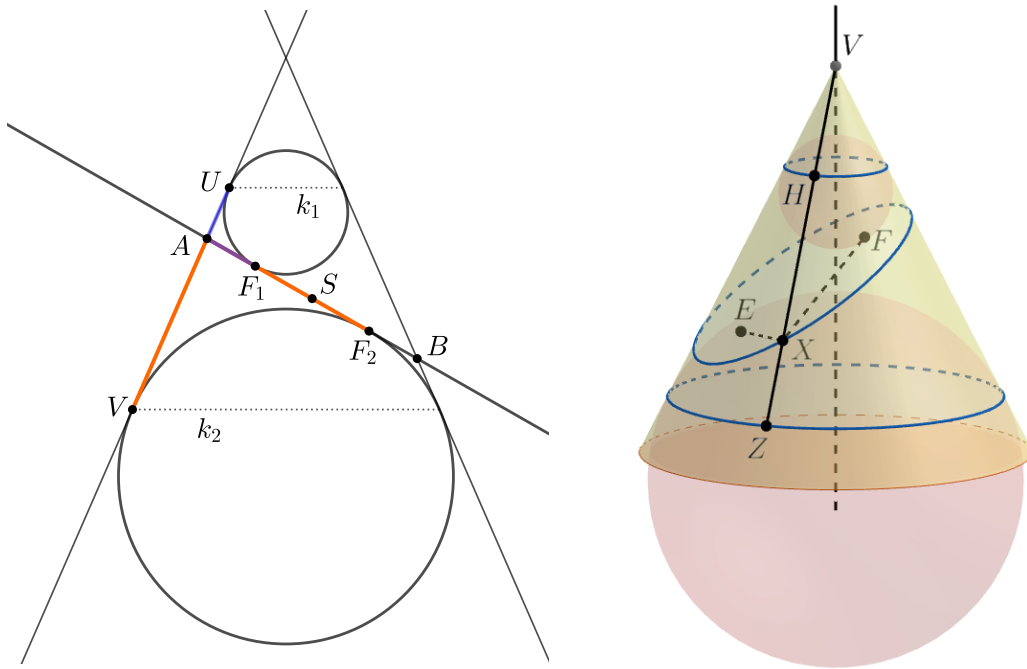
<https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=qdvK&pqdv=1>.

Předpokládáme, že se čtenář se zněním všech tří vět i s jejich důkazy pečlivě seznámil. Zde uvedeme jen stručné didaktické poznámky k elipse. Je nutno upozornit, že budeme pracovat výhradně s rotační kuželovou plochou.

- QD věta má ohromnou výhodu v tom, že názorně ukazuje, kde na rovině ϱ řezu rotační kuželové plochy \mathcal{C} jsou ohniska.
- Poloha těchto ohnisek je určena přímo fascinujícím způsobem: do „komůrky“ vytvořené kuželovou plochou a rovinou ϱ vepíšeme kouli. Podobně i „pod“ tuto rovinu řezu vepíšeme do \mathcal{C} kouli, která se roviny řezu ϱ dotýká v jediném bodě. Každá z těchto koulí se tedy dotýká roviny ϱ v jediném bodě. Ukážeme, že tyto body jsou právě ohniska elipsy, tj. body, od nichž má bod elipsy konstantní součet vzdáleností.
- Důkaz QD věty stojí na jednoduchém planimetrickém pozorování: vyznačené délky L_1 a L_2 na tečnách jsou si rovny.



- Podstata důkazu je dobře patrná např. v bodě A : jelikož je $|AF_1| = |AU|$ a $|AF_2| = |AV|$, dostáváme $|AF_1| + |AF_2| = |AU| + |AV| = |UV|$. Podobně bychom získali $|XF_1| + |XF_2| = |UXV_X|$. Jelikož jsou kružnice, v nichž se vepsané sféry dotýkají kuželové plochy \mathcal{C} , umístěny rovnoběžně, je $|U_XV_X|$ konstantní.



Na druhém obrázku je dobře vidět jádro důkazu Quételetovy–Dandelinovy věty:

$$|XE| = |XZ|, \quad |XF| = |XH| \quad \implies \quad |XE| + |XF| = |XZ| + |XH| = |HZ| = \text{konst.}$$

- Dokažme ještě, že $|AF_1| = |F_2B|$. Stačí předchozí formule napsat pro body A i B :

$$\begin{aligned} |UV| &= |AF_1| + |AF_2| = |AF_1| + (|AF_1| + |F_1F_2|) = 2 \cdot |AF_1| + |F_1F_2|, \\ |UV| &= |BF_1| + |BF_2| = (|BF_2| + |F_1F_2|) + |BF_2| = 2 \cdot |BF_2| + |F_1F_2|. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovností (stačí uvažovat začátek a konec) dostaneme:

$$0 = 2 \cdot |AF_1| - 2 \cdot |F_2B|,$$

odkud již plyne

$$\boxed{|AF_1| = |F_2B|}.$$

- Z rovnosti $|AF_1| = |F_2B|$ ihned plyne, že konstanta $|UV|$ je rovna právě délce hlavní osy $|AB|$, tj. $2a$:

$$|UV| = |AF_1| + |AF_2| = |F_2B| + |AF_2| = |AB| = 2a.$$

Základní vztah z planimetrické definice elipsy tedy můžeme psát ve tvaru

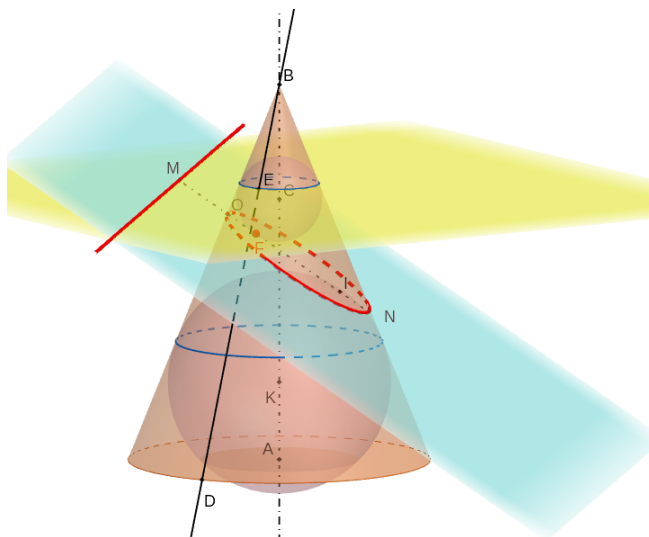
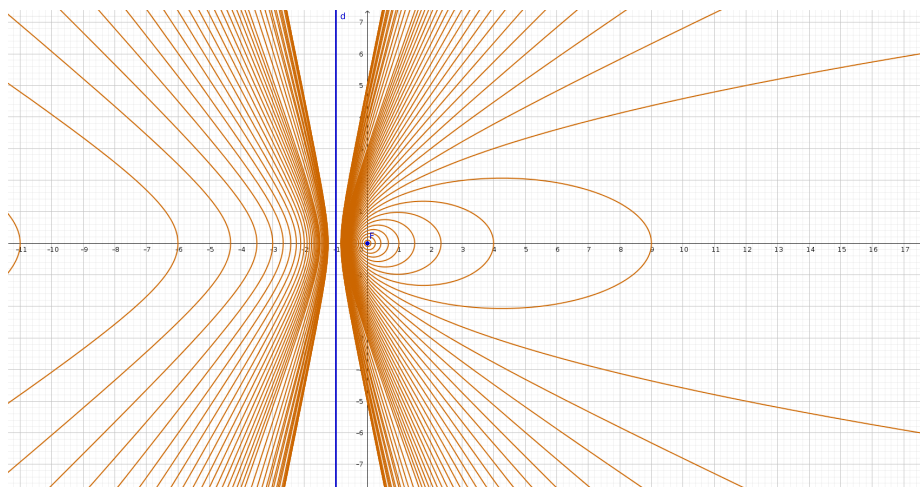
$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

2.3 Jednotná rovnice kuželoseček

Pro jednodušší orientaci předešleme, že jednotná rovnice kuželoseček bude ve tvaru

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

přičemž bod F je libovolný pevně zvolený bod (nazývá se *ohnisko*) a d je přímka (tzv. *řídící přímka*), která bodem F neprochází. Množina všech bodů X v rovině obsahující F i d , pro něž platí, že poměr vzdáleností od ohniska a od řídící přímky je konstantní, je pak jednou ze tří kuželoseček (elipsa pro $\varepsilon < 1$, parabola pro $\varepsilon = 1$ a hyperbola pro $\varepsilon > 1$).



Provedme nyní příslušnou analýzu geometrické situace.

Podobně jako v předchozí kapitole budeme uvažovat pouze rotační kuželovou plochu. Označme α odchylku roviny ϱ řezu (obsahuje kuželosečku) a roviny obsahující kružnici k_2 . Označme dále σ odchylku povrchové přímky (kterékoli) a osy rotační kuželové plochy \mathcal{C} . Jelikož vyloučíme kruhové řezy (tj. $\alpha = 0$), budeme uvažovat pouze $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Je zřejmé, že $\sigma \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Konstantnost poměru $\frac{|XF|}{|Xd|}$ pro všechny body X průniku $\mathcal{C} \cap \varrho$ plyne z několika jednoduchých pozorování.

- Jelikož je vzdálenost k jednomu i druhému bodu dotyku stejná, platí:

$$|XF| = |Xk_2|.$$

- $\sin \alpha$ je konstanta daná sklonem α roviny řezu:

$$\sin \alpha = \frac{v}{|Xd|} \implies v = |Xd| \cdot \sin \alpha$$

- podobně $\cos \sigma$ je konstantou danou rotační kuželovou plochou \mathcal{C} :

$$\cos \sigma = \frac{v}{|Xk_2|} \implies v = |Xk_2| \cdot \cos \sigma = |XF| \cdot \cos \sigma$$

- Do poměru $\frac{v}{v} = 1$ dosadíme za v z obou předchozích vztahů:

$$1 = \frac{v}{v} = \frac{|XF| \cdot \cos \sigma}{|Xd| \cdot \sin \alpha}.$$

Odtud již plyne:

$$\boxed{\frac{|XF|}{|Xd|} = \frac{\sin \alpha}{\cos \sigma}},$$

příčemž kladnou konstantu ($\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $\sigma \in (0, \frac{\pi}{2})$, proto je $\sin \alpha > 0$ i $\cos \sigma > 0$) na pravé straně označme

$$\varepsilon = \frac{\sin \alpha}{\cos \sigma}.$$

V závislosti na hodnotě kladné konstanty ε dostáváme postupně všechny tři základní typy kuželošek.

- $\varepsilon = 1$, **parabola**: Rovina řezu je rovnoběžná s právě jednou povrchovou přímkou právě tehdy, když $\alpha = 90^\circ - \sigma$ pro $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. V tom případě je $\varepsilon = \frac{\sin(90^\circ - \sigma)}{\cos \sigma} = \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma} = 1$. Dostáváme tak charakterizaci paraboly:

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = 1, \quad \text{tj.} \quad \boxed{|XF| = |Xd|}.$$

- $\varepsilon < 1$, **elipsa**: Rovina řezu protíná všechny povrchové přímky právě tehdy, když $\alpha < 90^\circ - \sigma$ pro $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. V tom případě je $\varepsilon = \frac{\sin \alpha}{\cos \sigma} < \frac{\sin(90^\circ - \sigma)}{\cos \sigma} = \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma} = 1$. Dostáváme tak charakterizaci elipsy:

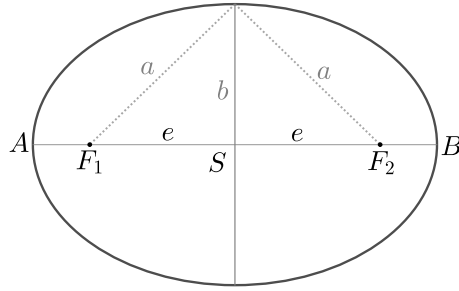
$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon < 1.$$

- $\varepsilon > 1$, **hyperbola**: Rovina řezu protíná povrchové přímky na obou stranách (vzhledem k vrcholu) kuželové plochy právě tehdy, když $\alpha > 90^\circ - \sigma$ pro $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. V tom případě je $\varepsilon = \frac{\sin \alpha}{\cos \sigma} > \frac{\sin(90^\circ - \sigma)}{\cos \sigma} = \frac{\cos \sigma}{\cos \sigma} = 1$. Dostáváme tak charakterizaci hyperboly:

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon, \quad \text{kde} \quad \varepsilon > 1.$$

2.3.1 Interpretace ε v případě elipsy

Nejsnáze uvidíme geometrickou interpretaci ε v případech, kdy $X = A$ (tj. X je hlavním vrcholem elipsy, který leží nejbližší řídicí přímky d) a $X = C$ (tj. X je jedním z vedlejších vrcholů elipsy).



Z obecné rovnice kuželosečky plyne:

$$\frac{|AF|}{|Ad|} = \varepsilon = \frac{|CF|}{|Cd|}.$$

Vyjádříme nyní délky $|AF|$, $|Ad|$, $|CF|$, $|Cd|$ pomocí a , e a ε . Předně ihned máme:

$$|AF| = \varepsilon|Ad|.$$

Také snadno vidíme (viz obrázek a přeponu v pravoúhlém $\triangle SFC$), že

$$|AF| = a - e \quad \text{a} \quad |CF| = a.$$

Dále odvodíme:

$$|AF| = \varepsilon|Ad| \quad \implies \quad |Ad| = \frac{|AF|}{\varepsilon} = \frac{a - e}{\varepsilon},$$

Délku $|Cd|$ lze najít takto:

$$|Cd| = |Sd| = |SA| + |Ad| = a + \frac{a - e}{\varepsilon}.$$

Jelikož je C bodem kuželosečky, vyhovuje její rovnici; dosadíme dále za $|CF|$ i $|Cd|$, dostaneme

$$\varepsilon = \frac{|CF|}{|Cd|} = \frac{a}{a + \frac{a - e}{\varepsilon}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - \frac{e}{a}}{\varepsilon}}.$$

Porovnejme výrazy úplně vlevo a vpravo, dostaneme rovnici, z níž vyjádříme ε :

$$\frac{1}{1 + \frac{1 - \frac{e}{a}}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

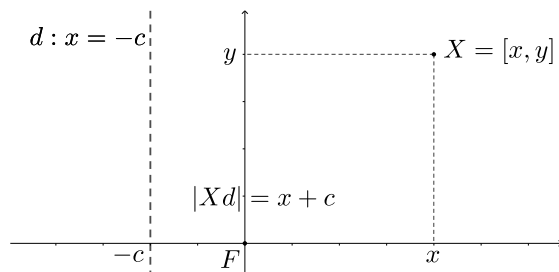
$$1 = \varepsilon + \left(1 - \frac{e}{a}\right), \quad \implies \quad \boxed{\varepsilon = \frac{e}{a}}.$$

2.4 Rovnice kuželoseček v kartézských a v polárních souřadnicích

Vyjďeme z jednotné rovnice kuželoseček (elipsy, paraboly a hyperboly):

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Jak bude tato rovnice vypadat v konkrétní kartézské soustavě souřadnic? Tuto kartézskou souřadnicovou soustavu zvolme tak, aby bylo vše co nejjednodušší: bod F necht' leží přímo v počátku, řídicí přímka d necht' je kolmá na osu x ; její rovnice pak bude $d: x = -c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}^+$. V takto zvolené kartézské soustavě souřadnic necht' $X = [x, y]$.



Potom lze rovnici

$$|XF| = \varepsilon \cdot |Xd|$$

přepsat ve tvaru

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon \cdot (x + c),$$

případně

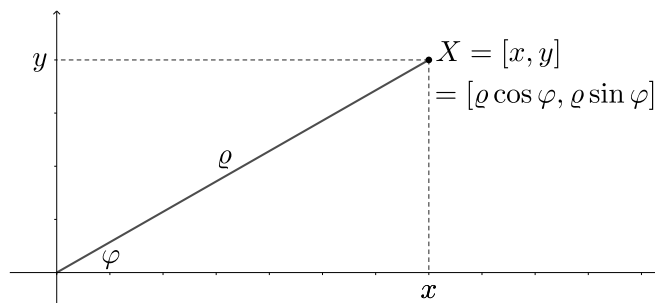
$$\boxed{x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot (x + c)^2.}$$

Jelikož ohnisko leží v počátku, nazývá se tato rovnice *ohniskovou rovnicí kuželosečky*.

Přejdeme nyní k polární soustavě souřadnic: pól nechť leží v počátku a polární poloosa nechť splývá s kladnou poloosou x . Potom můžeme rovnici $\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon \cdot (x + c)$ psát ve tvaru:

$$\varrho = \varepsilon \cdot (\varrho \cos \varphi + c).$$

Tento prepis získáme dosazením základních vztahů mezi oběma souřadnicovými soustavami: z Pythagorovy věty ihned plyne $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ a z příslušného pravoúhlého trojúhelníku $x = \varrho \cdot \cos \varphi$, $y = \varrho \cdot \sin \varphi$.



Nyní stačí z rovnice $\varrho = \varepsilon \cdot (\varrho \cos \varphi + c)$ vyjádřit ϱ :

$$\varrho \cdot (1 - \varepsilon \cos \varphi) = \varepsilon c.$$

Označíme-li výraz na pravé straně $p = \varepsilon c$ (písmeno p jsme zvolili proto, že se jedná o tzv. *parametr kuželosečky*), dostaneme

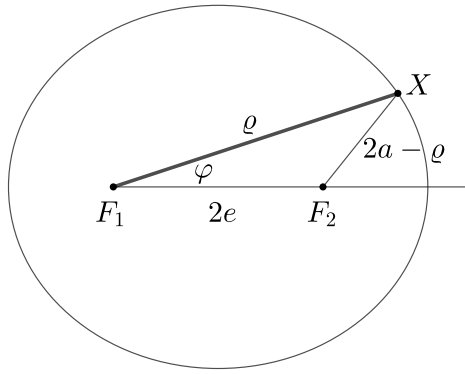
$$\boxed{\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.}$$

2.5 Rovnice elipsy v polárních souřadnicích

Rovnici elipsy v polárních souřadnicích lze snadno odvodit i přímo z planimetrické definice elipsy:

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

Odvození je založeno na kosinové větě aplikované na trojúhelník $\triangle F_1F_2X$.



Zvolme polární soustavu souřadnic tak, že pól umístíme přímo do ohniska F_1 a polární poloosa bude splývat s polopřímku $\overrightarrow{F_1F_2}$. Je-li X bodem elipsy, je

$$\rho = |F_1X|, \quad |F_1F_2| = 2e, \quad \angle F_2F_1X = \varphi.$$

Délku zbývající strany F_2X vyjádříme přímo z planimetrické definice elipsy: $|F_2X| = 2a - \rho$.

V trojúhelníku $\triangle F_1F_2X$ známe délky všech stran a velikost jednoho vnitřního úhlu φ . Chceme získat vztah mezi φ a ρ , použijeme tedy kosinovou větu.

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + (2e)^2 - 2 \cdot \rho \cdot 2e \cdot \cos \varphi$$

$$4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4e^2 - 4\rho e \cos \varphi$$

Odečteme ρ , vydělme celou rovnost čtyřmi a převedme všechny členy obsahující ρ na pravou stranu:

$$a^2 - e^2 = a\rho - \rho e \cos \varphi.$$

Jelikož je $a^2 - e^2 = b^2$, dostáváme

$$b^2 = \rho \cdot (a - e \cos \varphi),$$

$$\rho = \frac{b^2}{a - e \cos \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a} \cos \varphi}.$$

Označme $p = \frac{b^2}{a}$ (tzv. *parametr kuželosečky*), a $\varepsilon = \frac{e}{a}$ (tzv. *numerická excentricita*). Všimněme si, že v každé elipse je $e < a$, proto je nutně $\varepsilon < 1$. Nyní dostáváme rovnici elipsy v polárních souřadnicích:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

2.6 Parabola jako „limitní případ“ elipsy

Na parabolu můžeme pohlížet jako na elipsu, kde jeden z hlavních vrcholů (v obrázku označen modře) „pošleme do nekonečna“. Ilustrovat to můžeme pomocí následujícího výpočtu. Klíčové formule barevně zvýrazňujeme.

Rovnice elipsy, jejíž jeden hlavní vrchol leží v počátku (kvůli snadnému porovnání s rovnicí paraboly, volíme tedy $S = [a, 0]$), má tvar

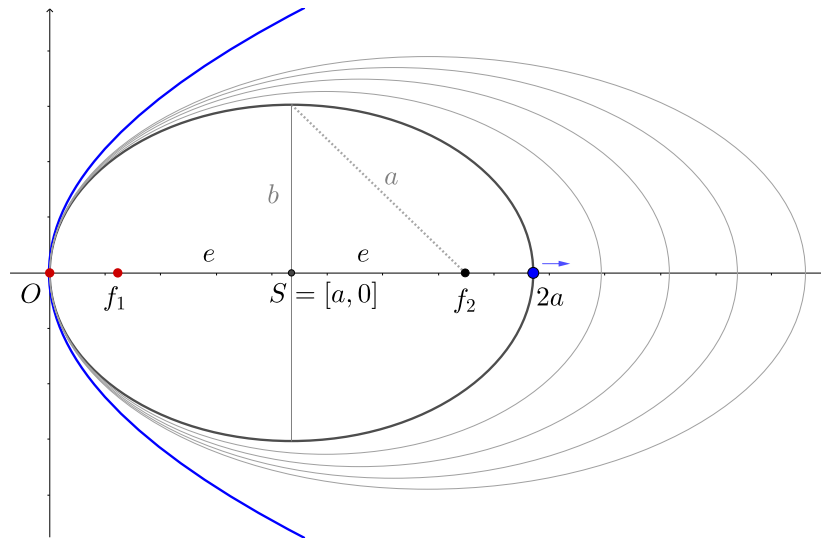
$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

což postupně upravíme:

$$\frac{x^2 - 2ax}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2ax}{a^2} - \frac{x^2}{a^2},$$

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$



Hlavní vrchol elipsy, který leží v počátku (červeně), a ohnisko s x -ovou souřadnicí f_1 (červeně) fixujeme, druhý hlavní vrchol elipsy (modře) „pošleme do nekonečna“, tj. provedeme limitní přechod $a \rightarrow +\infty$. V právě upravené rovnici elipsy se kromě a vyskytuje ještě b^2 , a tak jej vyjádříme pomocí a a f_1 . Vydeme ze vztahu $a^2 = b^2 + e^2$ mezi poloosami a , b a excentricitou e (Pýthagorova věta) a dostaneme (viz též obrázek):

$$b^2 = a^2 - e^2 = (a - e) \cdot (a + e) = f_1 \cdot f_2,$$

označíme-li x -ové souřadnice obou ohnisek po řadě $f_1 = a - e$ a $f_2 = a + e$. Nyní první ohnisko (se souřadnicí f_1) je fixní, f_1 je tedy konstantní. Druhé ohnisko vyjádříme pomocí a a f_1 :

$$f_2 = a + e = a + (a - f_1) = 2a - f_1,$$

je tedy

$$b^2 = f_1 \cdot f_2 = f_1 \cdot (2a - f_1).$$

Dosazením do rovnice elipsy obdržíme

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 = 2 \frac{f_1 \cdot (2a - f_1)}{a} x - \frac{f_1 \cdot (2a - f_1)}{a^2} x^2.$$

Nyní stačí provést limitní přechod, kdy v obrázku modře označený vrchol elipsy „pošleme do nekonečna“, což realizujeme, pokud $a \rightarrow +\infty$.

$$y^2 = 2 \frac{f_1 \cdot (2a - f_1)}{a} x - \frac{f_1 \cdot (2a - f_1)}{a^2} x^2 \quad / a \rightarrow +\infty$$

S přihlédnutím k tomu, že f_1 je konstantou, vznikne

$$y^2 = 2 \cdot 2f_1 x - 0x^2,$$

což je přesně rovnice paraboly s parametrem $p = 2f_1$ (parametr paraboly vyjadřuje vzdálenost ohniska od řídicí přímky, f_1 je pouze vzdálenost ohniska od vrcholu paraboly, proto $p = 2f_1$). Skutečně tak limitním přechodem $a \rightarrow +\infty$ dostáváme z rovnice elipsy rovnici paraboly

$$y^2 = 2p x.$$

Kapitola 3

Elipsa

V této kapitole se budeme věnovat odvození kanonické rovnice elipsy, konstrukcím elipsy, vlastnostem tečny elipsy a jejich důsledkům, případně některým dalším zajímavostem, které se k elipse váží.

3.1 Planimetrická definice elipsy a rovnice elipsy

Připomeňme klasické školské odvození rovnice elipsy ze vztahu z planimetrické definice elipsy. Planimetrická definice elipsy je založena na Queteletově–Dandelinově větě, které jsme se věnovali v předchozí kapitole. Elipsou (dle planimetrické definice) rozumíme množinu všech bodů X v rovině, pro něž platí, že součet jejich vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 je konstantní, tj.:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a.$$

Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, $X = [x, y]$, pak:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Umocněním na druhou dostaneme

$$\begin{aligned}(x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 + 2 \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= 4a^2, \\ 2x^2 + 2e^2 + 2y^2 - 4a^2 &= -2 \cdot \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Vydělením dvěma a opětovným umocněním na druhou dostaneme

$$\begin{aligned}(x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2)^2 &= ((x+e)^2 + y^2) \cdot ((x-e)^2 + y^2), \\ (x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2)^2 &= (x^2 + e^2 + y^2 + 2ex) \cdot (x^2 + e^2 + y^2 - 2ex), \\ (x^2 + e^2 + y^2)^2 - 2 \cdot (x^2 + e^2 + y^2) \cdot (2a^2) + (2a^2)^2 &= (x^2 + e^2 + y^2)^2 - (2ex)^2.\end{aligned}$$

Po vydělení čtyřmi a převedení některých členů na druhou stranu

$$e^2x^2 - (x^2 + e^2 + y^2) \cdot a^2 = -a^4$$

a vynásobením obou stran minus jedničkou dostaneme:

$$(-e^2 + a^2)x^2 + y^2a^2 = a^4 - e^2a^2.$$

Nyní si stačí uvědomit, že $a^2 = e^2 + b^2$; dosazením obdržíme:

$$\begin{aligned}b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2), \\ b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2.\end{aligned}$$

Nyní stačí rovnici vydělit a^2b^2 a dostaneme kanonickou rovnici elipsy:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

3.2 Souměrnost elipsy

Uvažujme elipsu z předchozí kapitoly, jejíž rovnici jsme právě odvodili:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

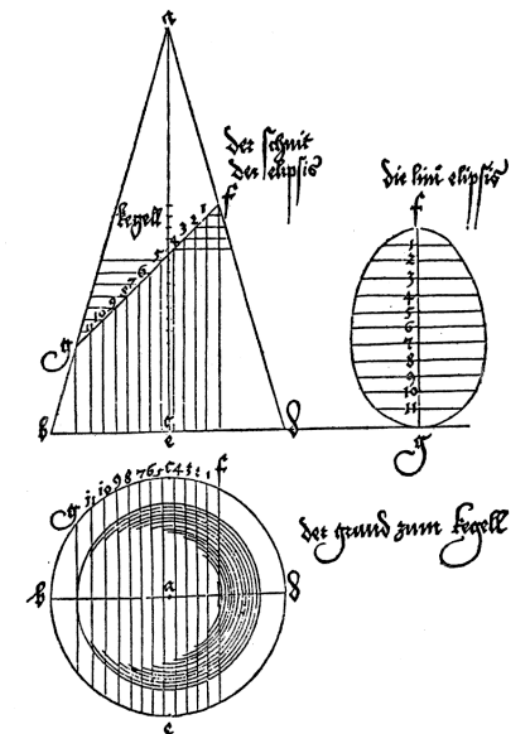
Její střed leží v počátku, přímka obsahující hlavní osu elipsy i její ohniska splývá s osou x a přímka obsahující vedlejší osu elipsy (kolmá na hlavní osu elipsy a procházející jejím středem elipsy) splývá s osou y .

Z právě odvozené kanonické rovnice elipsy ihned plyne, že elipsa je křivkou souměrnou:

- středově podle středu elipsy: s každým bodem elipsy $X = [x, y]$ totiž náleží elipse i bod $X' = [-x, -y]$ středově souměrný podle počátku, v němž střed uvažované elipsy leží;
- osově podle přímky obsahující hlavní osu elipsy (tj. podle osy x): s každým bodem elipsy $X = [x, y]$ totiž náleží elipse i bod $X' = [x, -y]$ osově souměrný podle přímky obsahující hlavní osu elipsy;
- osově podle přímky obsahující vedlejší osu elipsy (tj. podle osy y): s každým bodem elipsy $X = [x, y]$ totiž náleží elipse i bod $X' = [-x, y]$ osově souměrný podle přímky obsahující vedlejší osu elipsy.

Pozorujeme-li však eliptický řez přímo na kuželové ploše, může nám připadat zvláštní, že by elipsa měla být středově souměrnou křivkou, případně křivkou osově souměrnou podle přímky obsahující vedlejší osu elipsy. Hlavní vrchol elipsy, který leží blíže vrcholu kuželové plochy, budí dojem, že by měl být „špičatější“ než hlavní vrchol elipsy ležící dál od vrcholu kuželové plochy.

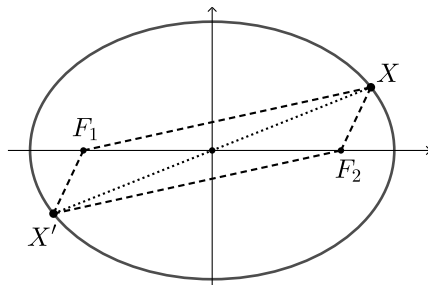
Stejný dojem měl například i slavný umělec Albrecht Dürer (1471–1528). V roce 1525 vydal v Norimberku dílo *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien Ebenen unnd gantzen corporen, ...*, v němž popsal a provedl konstrukci elipsy přímo na základě práce s řezem kuželové plochy, viz obrázek č. 34 v jeho knize (cca str. 35), který zde uvádíme (převzato z [Wikipedie](#)).



Vpravo je dobře patrný mírně vejčitý útvar, který měl být elipsou. Je třeba poznamenat, že konstrukce elipsy, kterou A. Dürer zvolil, je citlivá na přesnost, není tedy snadné ji provést dostatečně přesně. Souměrnost elipsy je zřejmá i přímo z její planimetrické definice

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

Stačí pozorovat následující obrázek. Zvolme na elipse libovolný bod X a narýsujme bod X' s ním středově souměrný podle středu úsečky F_1F_2 (tj. podle středu elipsy). Ukažme, že X' je také bodem elipsy.



Ze středové souměrnosti je zřejmé, že trojúhelníky $\triangle F_1XF_2$ a $\triangle F_2X'F_1$ jsou shodné. Proto je

$$|F_1X| = |F_2X'| \quad \text{a} \quad |F_2X| = |F_1X'|,$$

odkud plyne:

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a \quad \implies \quad |F_2X'| + |F_1X'| = 2a.$$

Je-li tedy bod X bodem elipsy, pak X' také leží na elipse. Elipsa je tedy středově souměrná dle svého středu.

3.3 Parametrické vyjádření elipsy

Odvoďme nyní parametrické rovnice elipsy. Velmi jednoduchý postup vychází z tzv. „goniometrické jedničky“, tj.

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Porovnáním s kanonickou rovnicí elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ihned dojdeme ke vztahům, které jsou základem parametrického vyjádření:

$$\cos \varphi = \frac{x}{a}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{b}.$$

Geometrickou interpretaci obou těchto vztahů názorně uvidíme u proužkové a trojúhelníkové konstrukce elipsy. Náhrady podílů $\frac{x}{a}$ a $\frac{y}{b}$ za kosinus a sinus jsou možné, neboť $-a \leq x \leq a$ a $-b \leq y \leq b$. Oba uvedené zlomky tedy nabývají hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ stejně jako $\cos \varphi$ a $\sin \varphi$.

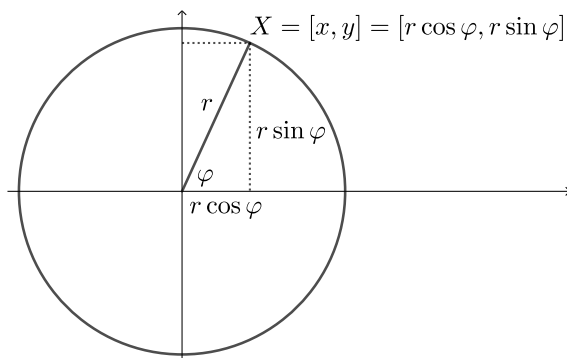
Po úpravě ihned dostáváme jedno z možných parametrických vyjádření elipsy:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Poznamenejme ještě, že speciálním případem je parametrizace kružnice o poloměru r (tj. $a = b = r$):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Tyto rovnice jsou důsledkem definice goniometrických funkcí sinus a kosinus.



Formální ověření, že se jedná o body kružnice, lze provést prostým dosazením:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2.$$

Analogicky by proběhl důkaz pro elipsu. Bod $X = [a \cos \varphi, b \sin \varphi]$ je bodem elipsy pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$, neboť jeho souřadnice vyhovují rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

3.4 Elipsa jako afinní obraz kružnice

Tato kapitolka je spíše drobnou poznámkou. Někdy se uvádí, že elipsa je vlastně více či méně „spláclá“ kružnice. Pokusme se o exaktnější formulaci tohoto vyjádření a ukažme, proč tomu tak je.

Uvažujme elipsu s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b , bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tato elipsa má střed v počátku. Její parametrické vyjádření je tedy

$$x_e = a \cos \varphi, \quad y_e = b \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Pokud jej porovnáme s parametrickým vyjádřením kružnice o poloměru a :

$$x_k = a \cos \varphi, \quad y_k = a \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

dostaneme ihned srovnání obou křivek. Pro dané $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ dostáváme jedno společné x , neboť v případě kružnice i elipsy je $x = a \cos \varphi$. Pro toto $x \in \langle -a, a \rangle$ je poměr vzdáleností bodů $[x, y_e]$ a $[x, y_k]$ od osy x (tj. od hlavní osy elipsy) konstantní:

$$\frac{|y_e|}{|y_k|} = \frac{b |\sin \varphi|}{a |\sin \varphi|} = \frac{b}{a}.$$

Lze tedy říci, že úsečky kolmé na hlavní osu elipsy (úsečka u_e s krajními body $[x, 0]$, $[x, y_e]$ pro elipsu a úsečka u_k s krajními body $[x, 0]$, $[x, y_k]$ pro kružnici) jsou pro dané x podobné s koeficientem podobnosti $\frac{b}{a}$, tj.

$$|u_e| = \frac{b}{a} \cdot |u_k|.$$

Zformulujme nyní toto pozorování pomocí osové afinity. Elipsa je obrazem kružnice v osové afinitě, přičemž osou této afinity je přímka obsahující hlavní osu elipsy (což je přímka F_1F_2), směr této afinity je kolmý k hlavní ose elipsy (někdy se taková osová afinita nazývá *pravoúhloú afinitou*) a její charakteristikou je poměr délek poloos elipsy $\frac{b}{a}$.

Nyní lze snadno napsat analytické vyjádření této osové afinity převádějící body kružnice na body elipsy:

$$x' = x, \quad y' = \frac{b}{a} \cdot y.$$

Při odvozování jsme mohli vyjít z kanonických rovnic. Porovnejme tedy rovnici kružnice o poloměru a a rovnici elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b (střed obou kuželoseček je v počátku):

$$\left(\frac{x_k}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_k}{a}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x_e}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_e}{b}\right)^2 = 1.$$

Okamžitě vidíme, že člen $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ se vyskytuje v obou rovnicích, tj. $x_e = x_k$, čemuž odpovídá $x' = x$ v analytickém vyjádření osové afinity zobrazující body kružnice na body elipsy.

Ve členech $\left(\frac{y_k}{a}\right)^2$ a $\left(\frac{y_e}{b}\right)^2$ jsou však rozdílné koeficienty: $\frac{1}{a}$ u y_k (kružnice), resp. $\frac{1}{b}$ u y_e (elipsa). Zvolíme-li tedy jedno společné x , tj. $x = x_e = x_k$, jsou si v rovnicích rovny první členy $\left(\frac{x}{a}\right)^2$. Jelikož má být součet obou členů v obou případech roven 1, musí si být rovny i druhé členy v rovnicích:

$$\frac{|y_e|}{b} = \frac{|y_k|}{a}, \quad \text{tj.} \quad |y_e| = \frac{b}{a} \cdot |y_k|.$$

Je tedy zřejmé, že u elipsy došlo oproti kružnici ve směru vedlejší poloosy k „přeskálování“, tedy vynásobení koeficientem $\frac{b}{a}$.

3.5 Obsah oblasti ohraničené elipsou

Obsah oblasti ohraničené elipsou lze poměrně snadno vypočítat pomocí integrálů. Jednodušší postup nabízí užití Cavalieriho principu. Pro porovnání provedeme odvození oběma postupy.

Zadána je elipsa s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b , obsah ani délka nezávisí na umístění daného útvaru, a tak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že má elipsa střed v počátku.

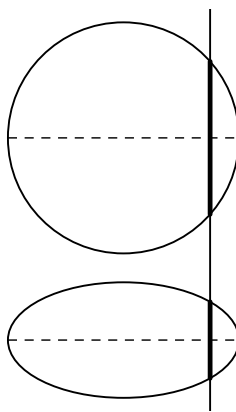
Cavalieriho princip

Odvodíme tedy obsah oblasti ohraničené zadanou elipsou pomocí známého vztahu pro obsah kruhu. Budeme k tomu potřebovat poměr délek vertikálních řezů oblasti ohraničené elipsou a délek řezů v kruhu o poloměru a , který jsme odvodili v předchozí kapitole:

$$\frac{2|y_e|}{2|y_k|} = \frac{b}{a}.$$

Podle Cavalieriho principu pak budou ve stejném poměru obsah oblasti ohraničené elipsou S_e a obsah kruhu S_k , tj.

$$\frac{S_e}{S_k} = \frac{b}{a}.$$



Jelikož je obsah kruhu S_k o poloměru a roven $S_k = \pi a^2$, dostáváme vzorec pro obsah oblasti ohraničené elipsou:

$$S_e = \frac{b}{a} \cdot S_k = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab.$$

Odvodili jsme tak vztah pro obsah oblasti ohraničené zadanou elipsou:

$$\boxed{S_e = \pi ab.}$$

Hezká je analogie se vzorcem pro obsah kruhu: místo $\pi \cdot r \cdot r$ máme $\pi \cdot a \cdot b$.

Při odvozování poměru $\frac{2|y_e|}{2|y_k|} = \frac{b}{a}$ lze použít standardní rovnici elipsy. Příslušný výpočet je shrnut v následující tabulce.

kruh	elipsa
$x^2 + y_k^2 = a^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1$
$y_k = \sqrt{a^2 - x^2}$	$y_e = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$
délka řezu: $2 \cdot y_k$	délka řezu: $2 \cdot y_e$
$S_k = \pi a^2$	$S_e = ?$

Závěr je stejný, jako v předchozím případě. Jelikož je $\frac{2 \cdot y_e}{2 \cdot y_k} = \frac{b}{a}$, dostáváme dle Cavalieriho principu

$$S_e = \frac{b}{a} \cdot S_k = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab.$$

Integrální počet

Výpočet obsahu oblasti ohraničené elipsou pomocí integrálů je poměrně snadný. Vyjádření $y_e(x)$ z rovnice elipsy jsme provedli už u výpočtu pomocí Cavalieriho principu, můžeme tedy ihned psát příslušný integrál:

$$S_e = 4 \cdot \int_0^a y_e(x) dx = 4 \cdot \int_0^a \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Zavedeme substituci $x = a \cdot \sin \varphi$, neboť potom $a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \cdot \sin^2 \varphi = a^2 \cdot (1 - \sin^2 \varphi) = a^2 \cos^2 \varphi$. Potom:

$$S_e = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a} \cdot a \cos \varphi \cdot (a \cdot \cos \varphi) d\varphi = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Ze vztahu $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ vyjádříme $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Primitivní funkcí k této funkci je

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin 2x) + c,$$

dosazením mezí tedy dostaneme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{4},$$

uvážíme-li, že funkce $\sin 2x$ nabývá v bodě 0 i v $\frac{\pi}{2}$ nulové hodnoty. Celkově tedy dostáváme

$$S_e = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

3.6 Délka elipsy

Hledání délky elipsy je nepoměrně náročnější než hledání obsahu oblasti ohraničené elipsou, které jsme provedli výše. Délku elipsy se pro porovnání pokusme vypočítat pomocí integrálů.

Je zadána elipsa s délkou hlavní poloosy a a délkou vedlejší poloosy b . Její rovnice je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

případně její parametrické vyjádření

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Délku této elipsy vypočteme na základě vzorce pro délku křivky $X = [x(t), y(t)]$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, zadané parametricky:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Na tomto vzorci odvozovaném v rámci integrálního počtu zřetelně vidíme, že je založen na Pýthagorově větě. Nyní stačí dosadit parametrické rovnice elipsy:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

přičemž potřebné derivace jsou $x' = -a \sin \varphi$, $y' = b \cos \varphi$; uvážíme-li ještě souměrnost elipsy, můžeme počítat pouze délku jedné čtvrtiny ($\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$). Dostaneme tak

$$L = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Výraz pod odmocninou můžeme vyjádřit pomocí kosinu:

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2(1 - \cos^2 \varphi) + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi.$$

Jelikož je $a^2 - b^2 = e^2 a^2$ a označíme-li numerickou excentricitu $\varepsilon = \frac{e}{a}$, dostaneme

$$a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi = a^2 - e^2 a^2 \cos^2 \varphi = a^2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi).$$

Délku elipsy tak můžeme vyjádřit vztahem

$$L = 4a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Tento integrál bohužel patří mezi vyšší transcendentní funkce, příslušnou primitivní funkci totiž nelze vyjádřit pomocí konečného počtu operací s elementárními funkcemi a jejich skládání.

Tento integrál můžeme ještě upravit pomocí substituce $\varphi = \frac{\pi}{2} - t$, dostaneme tak $\cos \varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$. Záměna mezi a a změna znaménka díky $d\varphi = -dt$ se vzájemně ruší, dostáváme tak

$$L = 4a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Dostáváme tak *úplný eliptický integrál druhého druhu* (úplný – meze od 0 do $\frac{\pi}{2}$), značíme jej $E(\varepsilon)$. Můžeme tedy psát:

$$L = 4a \cdot E(\varepsilon).$$

Aproximace délky elipsy

Obvod elipsy lze s dobrou přesností aproximovat.

- Pro $a < 3b$ je dobrou aproximací (chyba je pak méně než pětiprocentní):

$$L \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Všimněme si, že se jedná o 2π -násobek kvadratického průměru a , b .

- Pokud bychom použili aritmetický průměr, dostali bychom poměrně špatnou aproximaci:

$$L \approx 2\pi \cdot \frac{a + b}{2}.$$

Oba předchozí vztahy jsou jistou analogií vztahu pro obvod kruhu: $o = 2\pi r$.

- Slavná je aproximace Ramanujanova:

$$L \approx \pi \cdot \left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right).$$

Přesné vyjádření obvodu elipsy lze provést pomocí nekonečných číselných řad. Jednou z možností je

$$L = \pi(a+b) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{\frac{1}{2}}{n}^2 \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{2n} \right].$$

Prvních několik členů vypadá takto:

$$L = \pi(a+b) \left(1 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{8^2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \frac{1}{16^2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^6 + \left(\frac{5}{128} \right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^8 + \dots \right)$$

3.7 Elipsa jako řez válcovou plochou

Situaci známe z běžného života: elipsu můžeme pozorovat na hladině vody v nakloněné sklenici válcového tvaru. Nebo na řezu válcového salámu, krájíme-li jej „šikmo“, tj. ne kolmo k ose válce (to bychom dostali kruhový řez).

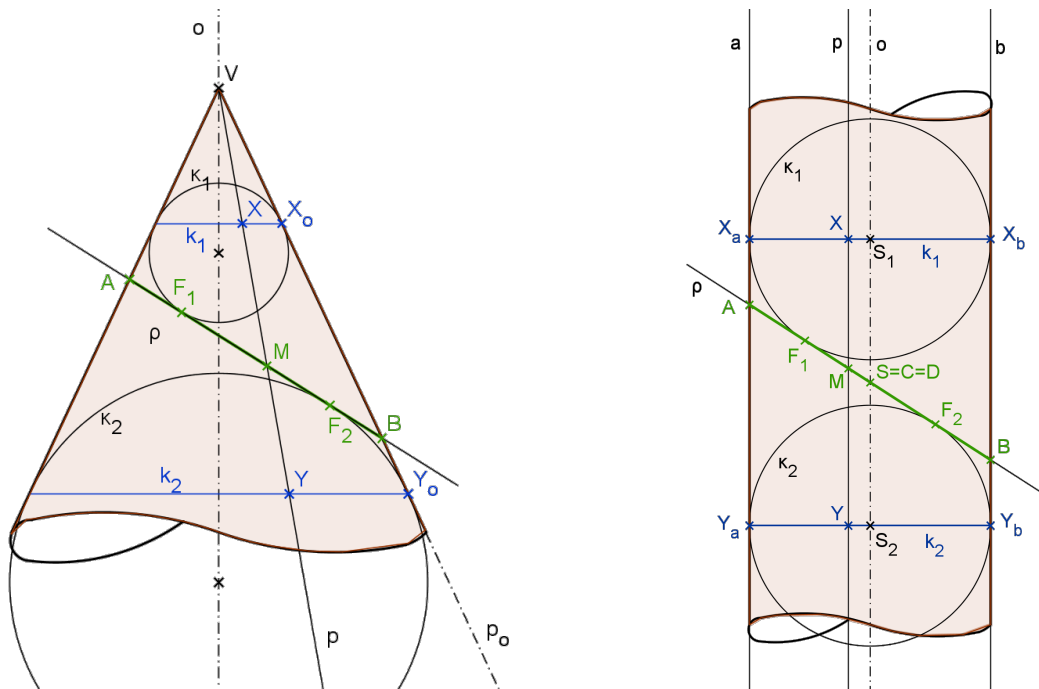
Důkaz je velmi jednoduchý a v podstatě kopíruje důkaz Quételetovy–Dandelinovy věty. Pro porovnání uvedme příslušné obrázky pro případ řezu kuželové i válcové plochy. Zdrojem jsou stránky

<https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=qdvK&pqdv=1>

a

<https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=qdvV&pqdv=1>.

Opět odtud doporučuji čerpat znění i důkaz „věty o salámu“, tj. varianty Quételetovy–Dandelinovy věty pro řezy válcové plochy rovinou.



Znění věty je z druhého obrázku zřejmé: řezem válcové plochy rovinou (není-li vedena kolmo či rovnoběžně s osou válcové plochy) je elipsa. Jejími ohnisky jsou právě body dotyku vepsaných koulí.

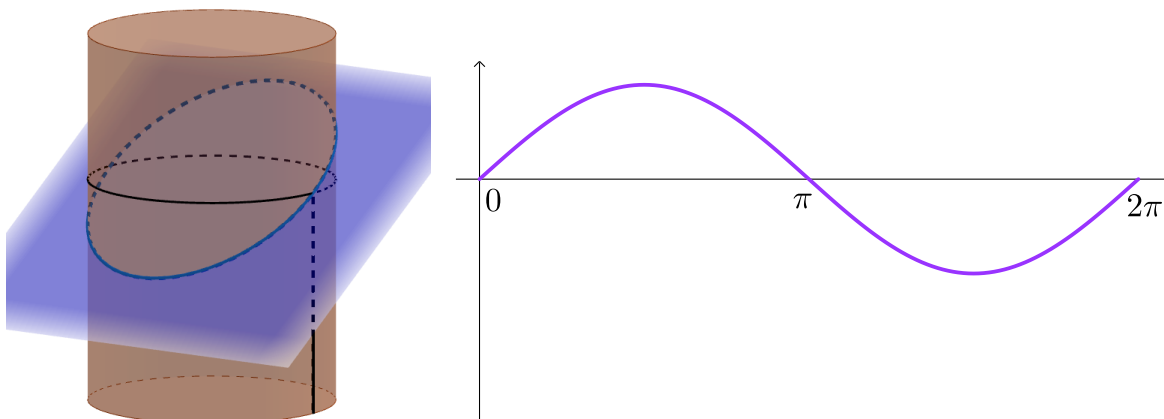
Jádro důkazu je snadné: uvažujme libovolnou povrchovou přímku p , ta protíná rovinu řezu ρ v bodě M . Body dotyku vepsaných koulí označme F_1 a F_2 . Potom $|MF_1| = |MX|$ a $|MF_2| = |MY|$. Sečtením dostaneme

$$|MF_1| + |MF_2| = |MX| + |MY| = |XY| = \text{konst.}$$

Konstantnost $|XY|$ opět plyne z rovnoběžného umístění obou kružnic dotyku k_1 a k_2 .

3.8 Rozvinutí válcové plochy do roviny

V předchozí kapitole jsme zjistili, že řezem válcové plochy je elipsa. Pokud bychom takto seříznutou válcovou plochu rozvinuli do roviny, vznikla by otázka, jakou rovinnou křivku by body původní elipsy vytvořily.



Uvažujme tedy rotační válcovou plochu. Zvolme nyní kartézskou soustavu souřadnic tak, že jednotka bude rovna poloměru řídicí kružnice, osa této válcové plochy bude splývat s osou z . Pracovat budeme s řídicí kružnicí válcové plochy, která leží v rovině xy .

Po rozvinutí válcové plochy do roviny („rozřízneme“ ji podle naznačené svislé čáry) by se zvolená řídicí kružnice zobrazila do osy x v rovině rozvinuté válcové plochy a body elipsy by v této rovině vytvořily naznačenou křivku. Odvodme nyní její rovnici.

Parametrizujme řídicí kružnici, vzhledem ke zvolené jednotce kartézské soustavy souřadnic je její poloměr $r = 1$:

$$k(S, 1) : \quad x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Popsat válcovou plochu $v(k)$ určenou řídicí kružnicí $k(S, 1)$ je nyní snadné:

$$v(k) : \quad x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = t, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zaměřme se nyní na rovinu ρ řezu, která vytváří elipsu (modře). Bez újmy na obecnosti zvolme její umístění tak, že její průsečnicí s rovinou xy bude osa x . Označme α odchylku roviny ρ a roviny xy . Je zřejmé, že eliptický řez vznikne pouze v případě, že $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Označíme-li $k = \text{tg } \alpha$ (je to vlastně směrnice přímky, která je průnikem ρ a roviny yz), dostaneme rovnici roviny řezu:

$$\rho : \quad z = k \cdot y.$$

Nyní již snadno popíšeme body elipsy v závislosti na φ , čímž dostaneme rovnici hledané křivky. Body elipsy e náleží průniku roviny ρ řezu a válcové plochy $v(k)$:

$$e = \rho \cap v(k).$$

Stačí tedy dosadit za y z rovnice válcové plochy $v(k)$ do rovnice roviny ρ :

$$z = k \cdot \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Vidíme, že hledanou křivkou je sinusoida. Změníme-li označení původních proměnných z prostoru na standardní značení v rovině (jedná se o rovinu rozvinuté válcové plochy, místo φ píšeme x , místo z pak y), dostaneme rovnici křivky tvořené body elipsy v rovině válcové plochy rozvinuté do roviny v přehledném tvaru:

$$y = k \cdot \sin x, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

3.9 Zahradnická konstrukce elipsy

Snad nejznámější konstrukcí elipsy je tzv. *zahradnická konstrukce*. Je založena na planimetrické definici elipsy

$$|F_1X| + |F_2X| = 2a.$$

Ke konstrukci je potřeba provázek délky $2a$, jehož konce jsou upevněny v ohniscích F_1 a F_2 ; jejich vzdálenost samozřejmě musí být menší než délka provázku: $|F_1F_2| < 2a$.

Tužkou (kolíkem, rydlem, ...) pohybujeme po rovině (papíře, trávníku, ...) tak, aby byl provázek stále napjatý. Křivkou, kterou tak postupně vykreslíme, je elipsa.

3.10 Proužková součtová konstrukce elipsy

Úloha o klouzajícím žebříku: Představme si následující situaci: při malování pokoje stojíme na žebříku (přibližně v jeho třetině), ten nám na kluzké podlaze náhle „ujede“, sklouzne tedy po podlaze, přičemž bude stále opřen o stěnu. Otázkou je, po jaké křivce se budou při sklouznutí žebříku pohybovat naše chodidla stále stojící na žebříku.

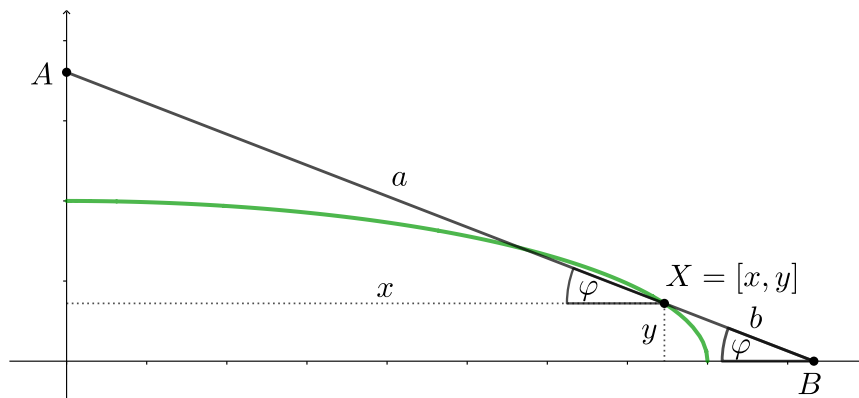
Uvažujme žebřík jako úsečku AB , její délka necht' je $|AB| = a + b$. Číslo b reprezentuje jednu část žebříku (od podlahy k příčce, na níž stojíme), číslo a pak zbylou část žebříku. Mezník – příčku na níž stojíme, vyznačme na úsečce AB jako bod X . Velikost úhlu svíraného žebříkem a podlahou označme φ .

Ilustrujme si popsanou situaci na obrázku a zjistíme souřadnice bodu $X = [x, y]$. Z malého pravoúhlého trojúhelníku s přeponou XB je patrné, že

$$\sin \varphi = \frac{y}{b},$$

podobně z velkého pravoúhlého trojúhelníku s přeponou XA je vidět, že

$$\cos \varphi = \frac{x}{a}.$$



Našli jsme tedy hledané souřadnice bodu X : $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, neboli

$$X = [a \cos \varphi, b \sin \varphi], \quad \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o parametrické vyjádření bodů elipsy, je hledanou křivkou oblouk elipsy.

Na popsaném principu je založen přístroj sloužící ke konstrukci elipsy, tzv. *elipsograf*. V bodě X je umístěna tužka, úsečka AB je pevnou tyčkou, která se svými konci pohybuje v kolejnicích, které jsou na sebe kolmé.

Mnohem oblíbenější je varianta založená na *proužkové rozdíllové* konstrukci elipsy. Úsečka AB není součtem hlavní a vedlejší poloosy ($|AB| = a + b$), ale má délku $|AB| = a$. Tužka je upevněna na jednom konci (v bodě B), rameno je usazeno v kolejnicích v bodě A a ve vzdálenosti $a - b$ od bodu A (tj. ve vzdálenosti b od bodu B).

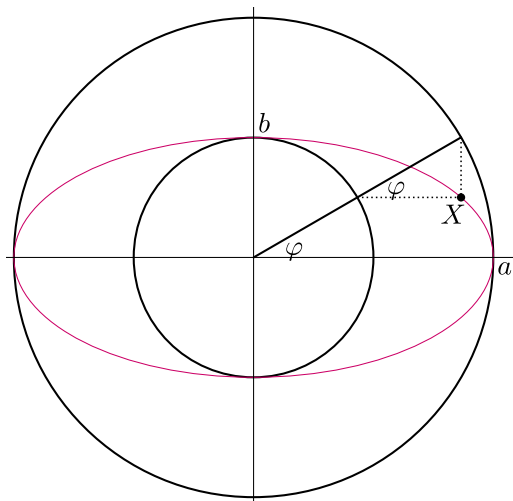
Na následujícím obrázku je elipsograf založený na proužkové rozdíllové konstrukci.



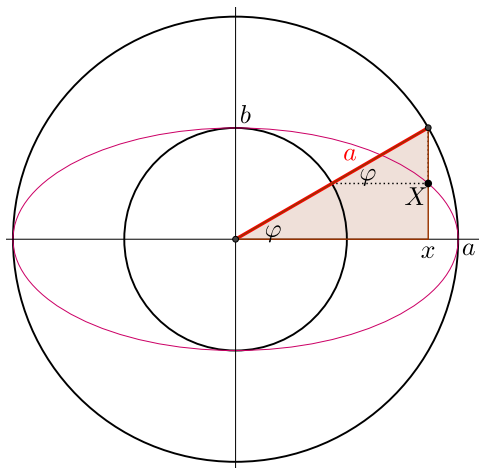
Viz <https://www.mathinstruments.ch/en/gallery/inv-9.008.html>

3.11 Trojúhelníková konstrukce elipsy

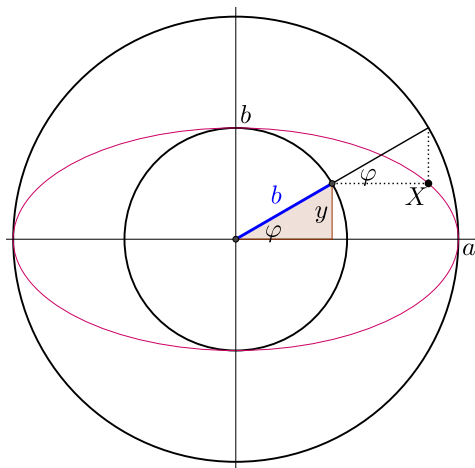
Jiný způsob, jak získat body elipsy, jejíž hlavní poloosa má délku a a vedlejší poloosa b , je narýsovat dvě soustředné kružnice: jednu o poloměru a a druhou o poloměru b . Uvažujeme-li orientovaný úhel s vrcholem ve společném středu obou kružnic, prvním ramenem splývajícím s kladnou poloosou x a druhým ramenem svírajícím s ním úhel velikosti $\varphi \in [0, 2\pi)$, dostaneme bod elipsy X jako vrchol pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a přeponu tvoří část druhého ramene obsažená v mezikružní, viz obrázek.



Důkaz toho, že takto zkonstruovaný bod X skutečně leží na elipse s hlavní poloosou délky a a vedlejší poloosou délky b vychází z výpočtu souřadnic bodu $X = [x, y]$. Vyjdeme přitom z příslušných pravoúhlých trojúhelníků.



$$\cos \varphi = \frac{x}{a}$$



$$\sin \varphi = \frac{y}{b}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Jelikož jsme dostali parametrické vyjádření elipsy ($x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$), je bod X skutečně bodem elipsy. Že souřadnice x, y bodu X vyhovují rovnici elipsy, je patrné také z tohoto výpočtu:

$$1 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

3.12 Oskulační kružnice

Bodové konstrukce elipsy, které jsme popsali, mají jednu velkou nevýhodu: umožňují zkonstruovat vždy jen jeden bod elipsy (případně dva body osově souměrné). Výsledkem konstrukce tak není křivka, ale jen jeden izolovaný bod, který na elipse leží.

Tuto situaci částečně řeší elipsografy, mechanické pomůcky založené na různých bodových konstrukcích. Pokud však takovou pomůcku nemáme, musíme si vystačit s pravítkem a kružítkem. Ke slovu pak přicházejí přibližné konstrukce.

Jednou z možností je zkonstruovat místo elipsy tzv. ovál. Kolem hlavních vrcholů elipsy nahradíme kružnicí, která se k elipse co nejtěsněji přimyká. Pokud bychom zkonstruovali i oskulační kružnice ve vedlejších vrcholech, zjistili bychom, že s oskulačními kružnicemi v hlavních vrcholech na sebe nenavazují.

Mezi oskulačními kružnicemi v hlavních vrcholech je tedy třeba zkonstruovat jakýsi most tvořený kružnicovým obloukem procházejícím vedlejším vrcholem (a souměrně podle hlavní osy elipsy i pro druhý vedlejší vrchol).

Pokusme se nyní najít rovnici oskulační kružnice k v hlavním vrcholu B elipsy dané rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tato kružnice bude procházet hlavním vrcholem $B = [a, 0]$ dané elipsy. Vzhledem k její souměrnosti podle osy x bude střed oskulační kružnice ležet právě na ose x , jeho souřadnice tedy budou $[s, 0]$, přičemž $s \in (0, a)$. Poloměr oskulační kružnice pak bude $a - s$. Hledáme tedy kružnici $k([s, 0], a - s)$. Ta může mít s elipsou nejvýše tři průsečíky; se zmenšujícím se poloměrem se budou dva z těchto průsečíků blížit k bodu B . Kružnice k se stane oskulační kružnicí v okamžiku, kdy tyto tři průsečíky splynou.

Vyjáďřeme nyní tuto myšlenku rovnicemi a najdeme s tak, aby kružnice k byla oskulační kružnicí elipsy v jejím vrcholu B .

Rovnice elipsy a kružnice $k([s, 0], a - s)$ jsou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (x - s)^2 + y^2 = (a - s)^2.$$

Jejich společné body nalezneme řešením soustavy. Obě strany rovnice elipsy vynásobíme b^2 , aby se při odečtení jedné rovnice od druhé odečetl člen y^2 :

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} + y^2 = b^2, \quad (x - s)^2 + y^2 = (a - s)^2,$$

$$\frac{b^2 x^2}{a^2} - (x - s)^2 = b^2 - (a - s)^2.$$

Tuto kvadratickou rovnici upravíme tak, aby byly zřejmé její koeficienty:

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)x^2 - (-2sx + s^2) = b^2 - (a^2 - 2as + s^2),$$

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)x^2 + 2sx - b^2 + a^2 - 2as = 0.$$

Jelikož je $a^2 = b^2 + e^2$, můžeme rozdíl $a^2 - b^2$ nahradit e^2 :

$$-\left(\frac{e}{a}\right)^2 x^2 + 2sx + (e^2 - 2as) = 0.$$

Tato kvadratická rovnice bude mít jeden dvojnásobný kořen, bude-li mít nulový diskriminant:

$$D = 4s^2 + 4\left(\frac{e}{a}\right)^2 (e^2 - 2as) = 0.$$

Diskriminant ještě upravíme:

$$D = 4s^2 + 4\left(\frac{e}{a}\right)^2 (e^2 - 2as) = \frac{4}{a^2} \cdot (a^2 s^2 + e^4 - 2ase^2) = \frac{4}{a^2} \cdot (e^2 - as)^2 = 0.$$

Vidíme, že $D = 0$ právě tehdy, když $e^2 - as = 0$, neboli

$$\boxed{e^2 = as.}$$

Odtud již snadno nalezneme souřadnice středu i poloměr r_o oskulační kružnice:

$$s = \frac{e^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} = a - \frac{b^2}{a},$$

$$r_o = a - s = \frac{b^2}{a}.$$

Oskulační kružnici elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b v jejím hlavním vrcholu B je

$$k \left(\left[0, \frac{e^2}{a} \right]; \frac{b^2}{a} \right).$$

Zbývá však otázka, jak lze právě nalezenou oskulační kružnici zkonstruovat. Nabízí se hned několik možností.

- Odvozený vztah $e^2 = as$ můžeme interpretovat jako Eukleidovu větu o odvěsně. Pata výšky je pak středem oskulační kružnice. Poloměr hledat nemusíme, tato kružnice prochází bodem B .
- Pozorujme délku poloviny tětivy kolmé na hlavní osu elipsy, jejíž pata je ohniskem. Obecně jsou poloviny délek takových tětiv rovny y , tj. $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Pro bod $F_2 = [e, 0]$ dostáváme:

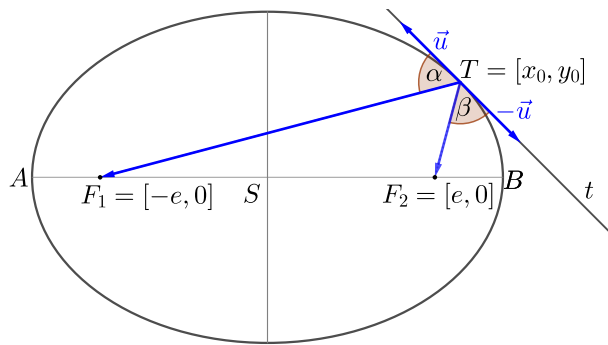
$$y(e) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2} = \frac{b}{a} \sqrt{b^2} = \frac{b^2}{a}.$$

To je přesně poloměr oskulační kružnice. Dostali jsme tak vztah

$$r_o = y(e).$$

3.13 Ohnisková vlastnost elipsy – odvození analytickou metodou

Ohnisková vlastnost elipsy je dobře známa: paprsek vyslaný z jednoho ohniska libovolným směrem se od elipsy odrazí vždy do druhého ohniska.



Důkaz analytickou metodou je myšlenkově jednoduchý, dovést výpočty do zdárného konce je však zdlouhavou prací. K popisu odrazu paprsku od elipsy v jejím bodě T s výhodou využijeme tečnu: místo odrazu od elipsy budeme uvažovat odraz paprsku od tečny. Její rovnici známe ze střední školy:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Normálovým vektorem je tedy

$$\vec{n}_t = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2} \right).$$

Za směrové vektory tečny t tedy můžeme volit

$$\vec{u} = \left(\frac{-y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2} \right), \quad -\vec{u} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{-x_0}{a^2} \right).$$

Nyní již stačí porovnat úhly příslušných vektorů a ověřit, že $\alpha = \beta$, tedy že platí:

$$\boxed{\angle(\overrightarrow{TF_1}, \vec{u}) = \angle(\overrightarrow{TF_2}, -\vec{u})}.$$

Výpočet je přímočarý: vektory zapíšeme pomocí souřadnic a využijeme skalárního součinu:

$$\angle\left((-e - x_0, -y_0); \left(\frac{-y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2}\right)\right) = \angle\left((e - x_0, -y_0); \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{-x_0}{a^2}\right)\right).$$

Odchylka vektorů se nezmění, nahradíme-li některý z vektorů jejich nenulovým násobkem (zde druhý vektor vynásobíme a^2b^2):

$$\angle((-e - x_0, -y_0); (-a^2y_0, b^2x_0)) = \angle((e - x_0, -y_0); (a^2y_0, -b^2x_0))$$

Vzhledem k tomu, že odchylka vektorů je číslo z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ a funkce kosinus je na tomto intervalu prostá, je rovnost odchylek vektorů ekvivalentní s rovností jejich kosinů, které vyjádříme pomocí vztahu

$$\cos \angle(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}:$$

$$\frac{ea^2y_0 + a^2x_0y_0 - b^2x_0y_0}{\|(-e - x_0, -y_0)\| \cdot \|(-a^2y_0, b^2x_0)\|} = \frac{ea^2y_0 - a^2x_0y_0 + b^2x_0y_0}{\|(e - x_0, -y_0)\| \cdot \|(a^2y_0, -b^2x_0)\|}.$$

Nyní tuto rovnost zjednodušíme vynásobením členem $\|(a^2y_0, -b^2x_0)\|$, který se vyskytuje v součinu na obou stranách. Následně provedeme rutinní úpravy.

$$\begin{aligned} \frac{ea^2y_0 + e^2x_0y_0}{\|(-e - x_0, -y_0)\|} &= \frac{ea^2y_0 - e^2x_0y_0}{\|(e - x_0, -y_0)\|} \\ ey_0 \cdot \frac{a^2 + ex_0}{\|(-e - x_0, -y_0)\|} &= ey_0 \cdot \frac{a^2 - ex_0}{\|(e - x_0, -y_0)\|} \end{aligned}$$

Obě strany umocníme na druhou, abychom mohli pohodlně rozepsat normu bez použití druhé odmocniny. Obě strany jsou kladné, jedná se tedy o ekvivalentní úpravu ($e < a$, $x_0 < a$, proto $a^2 - ex_0 > 0$).

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + ex_0)^2}{\|(-e - x_0, -y_0)\|^2} &= \frac{(a^2 - ex_0)^2}{\|(e - x_0, -y_0)\|^2} \\ (a^2 + ex_0)^2 \cdot \|(e - x_0, -y_0)\|^2 &= (a^2 - ex_0)^2 \cdot \|(-e - x_0, -y_0)\|^2 \\ (a^4 + 2a^2ex_0 + e^2x_0^2) \cdot (e^2 - 2ex_0 + x_0^2 + y_0^2) &= (a^4 - 2a^2ex_0 + e^2x_0^2) \cdot (e^2 + 2ex_0 + x_0^2 + y_0^2) \\ (a^4 + e^2x_0^2 + 2a^2ex_0) \cdot (e^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2ex_0) &= (a^4 + e^2x_0^2 - 2a^2ex_0) \cdot (e^2 + x_0^2 + y_0^2 + 2ex_0) \\ -(a^4 + e^2x_0^2)2ex_0 + 2a^2ex_0(e^2 + x_0^2 + y_0^2) &= (a^4 + e^2x_0^2)2ex_0 - 2a^2ex_0(e^2 + x_0^2 + y_0^2) \end{aligned}$$

Nyní vydělíme $2ex_0$ a roznásobíme závorky, psát budeme jen členy, které se evidentně neodečtou.

$$\begin{aligned} -(a^4 + e^2x_0^2) + a^2(e^2 + x_0^2 + y_0^2) &= (a^4 + e^2x_0^2) - a^2(e^2 + x_0^2 + y_0^2) \\ a^2(e^2 + x_0^2 + y_0^2) &= a^4 + e^2x_0^2 \\ (a^2 - e^2)x_0^2 + a^2y_0^2 &= a^4 - a^2e^2 \\ b^2x_0^2 + a^2y_0^2 &= a^2(a^2 - e^2) \\ b^2x_0^2 + a^2y_0^2 &= a^2b^2 \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} &= 1, \end{aligned}$$

což je platná rovnost, neboť $T = [x_0, y_0]$ je bodem elipsy, takže vyhovuje její rovnici. Dokázali jsme tedy, že $\alpha = \beta$, neboli

$$\angle(\overrightarrow{TF_1}, \vec{u}) = \angle(\overrightarrow{TF_2}, -\vec{u}).$$

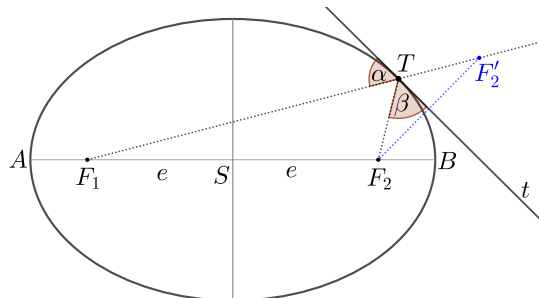
Zdlouhavost předchozího výpočtu vede k otázce, zda by nebylo možno dokázat ohniskovou vlastnost elipsy elegantněji. Budeme potřebovat charakterizaci tečny elipsy.

3.14 Tečna elipsy

Body elipsy T lze charakterizovat tím, že $|TF_1| + |TF_2| = 2a$. Narýsujme průvodiče TF_1 , TF_2 a přenesme na polopřímku $\overrightarrow{F_1T}$ úsečku TF_2 tak, že na této polopřímce dostaneme bod F'_2 , pro nějž platí

$$|TF_2| = |TF'_2| \quad \text{a} \quad |F_1F'_2| = |AB| = 2a.$$

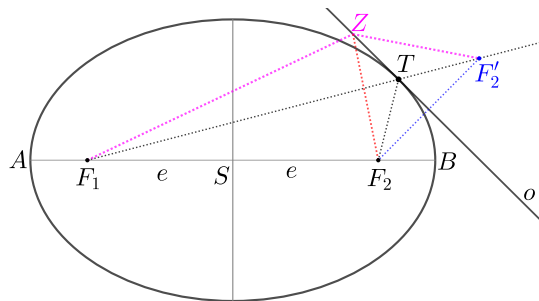
Trojúhelník $\triangle F_2F'_2T$ je tedy rovnoramenný.



Pozorujme nyní tečnu t elipsy v bodě T na následujícím obrázku. Vypadá to, jako by byla osou úhlu $\angle F_2TF'_2$. V tom případě by t byla kolmá na spojnici $F_2F'_2$ a rovnoramenný trojúhelník $\triangle F_2F'_2T$ by byl tečnou t půlen na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

Důkaz

Ukažme nyní, že tomu tak skutečně je, tj. že tečna t je osou úhlu $\angle F_2TF'_2$. Zkonstruujme osu o úhlu $\angle F_2TF'_2$ a ukažme, že je tato osa tečnou elipsy v bodě T , tj. že má s elipsou jediný společný bod T .



Osa o má s elipsou společný bod T . Pokud je o tečnou elipsy, je bod T jejich jediným společným bodem. Pokud by osa o byla sečnou elipsy, měla by s elipsou společný ještě jeden bod. Ukážeme, že tato varianta nemůže nastat. Kdyby totiž takový druhý společný bod elipsy a osy o existoval, mohli bychom jej označit Z a musel by vyhovovat charakteristické vlastnosti elipsy:

$$|ZF_1| + |ZF_2| = 2a.$$

Uvážíme-li však trojúhelník $\triangle F_1ZF'_2$, dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti

$$|ZF_1| + |ZF'_2| > |F_1F'_2| = 2a.$$

Jelikož je $|ZF'_2| = |ZF_2|$, což plyne z osové souměrnosti podle osy o (trojúhelník $\triangle F_2ZF'_2$ je tedy rovnoramenný), přejde předchozí nerovnost v

$$|ZF_1| + |ZF_2| > 2a,$$

bod Z tedy není bodem elipsy a elipsa má s osou o úhlu $\angle F_2TF'_2$ jediný společný bod. Osa o je tedy tečnou elipsy v bodě T :

$$\boxed{o = t.}$$

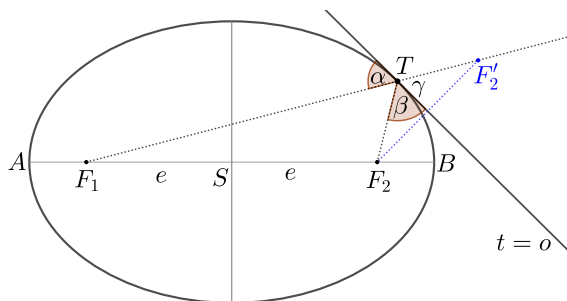
Dostáváme tak návod, jak tečnu elipsy v jejím daném bodě T zkonstruovat:

tečna je osou úsečky $F_2F'_2$.

Poznamenejme ještě, že bod F'_2 leží na kružnici se středem F_1 a s poloměrem $2a$.

3.15 Ohnisková vlastnost elipsy – jednoduchý syntetický důkaz

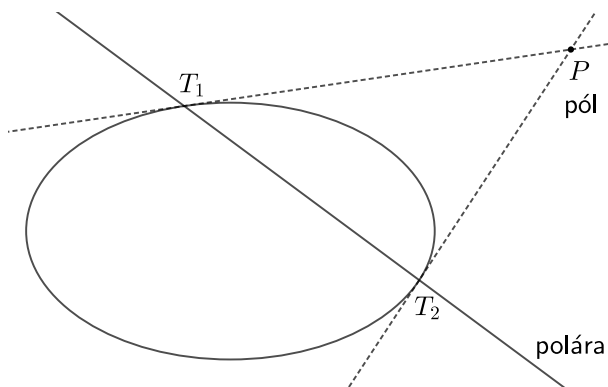
Vzhledem k tomu, že tečna t elipsy je osou úsečky $F_2F'_2$, dělí tato tečna rovnoramenný trojúhelník $\triangle F_2F'_2T$ na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky (t je totiž osou úhlu $\angle F_2TF'_2$). Proto $\beta = \gamma$.



Úhly α a γ jsou vrcholové, proto $\alpha = \gamma$. Celkem tak dostáváme ohniskovou vlastnosti elipsy:

$$\alpha = \beta.$$

3.16 Pól a polára



3.17 Feynmanova konstrukce elipsy

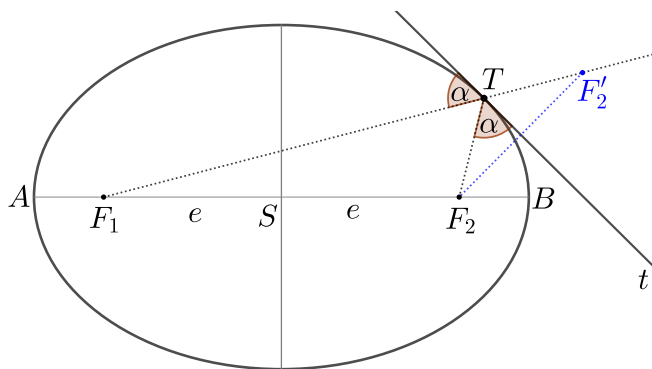
Charakterizaci tečny elipsy, kterou jsme odvodili, lze použít pro konstrukci elipsy. Myšlenku této konstrukce elipsy použil fyzik R. Feynman ve svých slavných přednáškách z fyziky (vyšly knižně, i v českém překladu).

Záznam této konkrétní přednášky však byl považován za ztracený, nakonec se však našly fotografie tabulí a přednáška vyšla jako samostatná kniha, viz např.

<https://www.megaknihy.cz/fyzika/146053-feynmanovy-stratena-prednaska.html>.

Tato přednáška obsahovala důkaz, že se planety (případně i jiná vesmírná tělesa) pohybují po kuželosečkách. Tento důkaz byl veden elementárně a byl založen právě na konstrukci elipsy, kterou si právě popíšeme.

Připomeňme si obrázek z kapitoly o tečně elipsy.

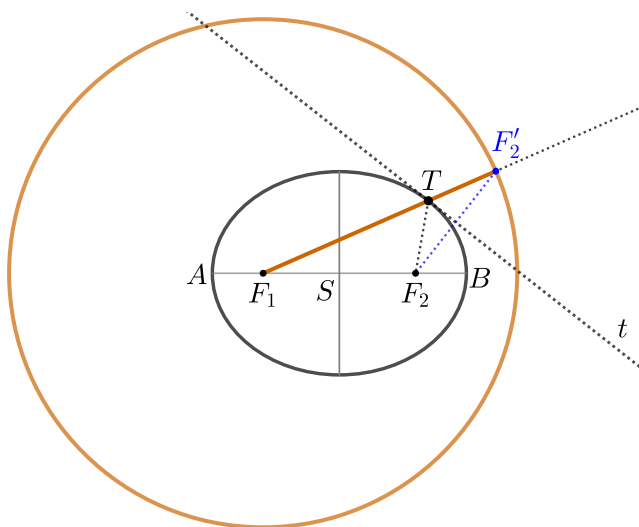


Dokázali jsme, že trojúhelník $\triangle F_2F'_2T$ je rovnoramenný, tečna t je tedy osou úsečky $F_2F'_2$ a $|TF_2| = |TF'_2|$. Z planimetrické definice elipsy plyne, že $|F_1T| + |F_2T| = 2a$; použijeme-li však rovnost $|TF_2| = |TF'_2|$, dostaneme

$$|F_1T| + |TF'_2| = 2a, \quad \text{neboli} \quad |F_1F'_2| = 2a,$$

$|F_1F'_2|$ je tedy konstantní. Dostáváme tak následující zajímavý výsledek.

Věta: Každý bod F'_2 souměrný podle tečny t elipsy s jedním ohniskem F_2 elipsy leží na kružnici k se středem ve druhém ohnisku F_1 a s poloměrem rovným délce hlavní osy elipsy $2a$.



Klíčové vztahy k obrázku tedy jsou:

$$|TF_2| = |TF'_2| \quad \implies \quad |F_1F'_2| = 2a.$$

Zkusme se ještě podívat na jednu vlastnost oranžové kružnice k z předchozí věty. Vzdálenost bodu T elipsy od bodu F'_2 kružnice a od ohniska F_2 je stejná:

$$|TF_2| = |TF'_2|.$$

Tato vlastnost připomíná planimetrickou definici paraboly, jejímž ohniskem je bod F_2 a řídicí přímkou d_p : vzdálenost bodu T_p paraboly od jejího ohniska F_2 a od řídicí přímky je stejná:

$$|T_p F_2| = |T d_p|.$$

To nás vede k tomu, že oranžově zvýrazněná kružnice k je vlastně pro elipsu analogií řídicí přímky.

Definice: Kružnici k z předchozí věty nazýváme řídicí kružnicí elipsy.

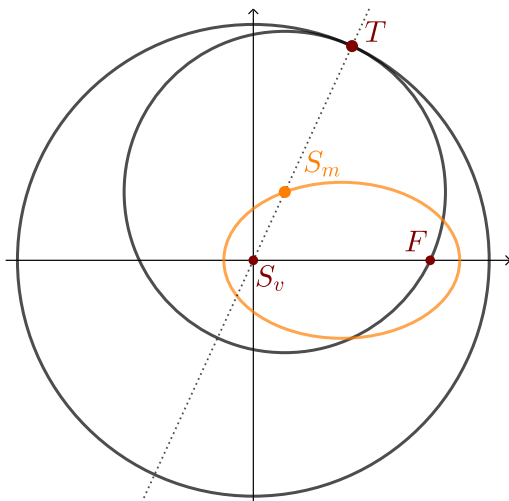
3.18 Konstrukce elipsy pomocí dotýkajících se kružnic

Uvažujme kružnici, v jejímž vnitřku (nikoli však v jejím středu S_v) se nachází bod F . Tímto bodem F nechť prochází další kružnice, která má s větší kružnicí vnitřní dotyk v bodě T . Pokud tímto bodem T pohybuje se po celé velké kružnici, tak střed menší kružnice S_m vykresluje postupně elipsu.

Názorně je to patrné na obrázku. Vidíme také, že bod F je jedním ohniskem elipsy, druhé ohnisko pak leží ve středu S_v velké kružnice.

Důkaz, že se tímto způsobem skutečně dostanou body uvedené elipsy (v obrázku naznačena oranžově), ihned plyne z planimetrické definice elipsy. V našem případě musí pro bod S_m elipsy s ohnisky F a S_v platit:

$$|S_m S_v| + |S_m F| = 2a.$$



Ověření platnosti této rovnosti je snadné. Poloměr vnitřní kružnice je roven $|S_m T| = |S_m F|$. Poloměr velké kružnice $|S_v T|$ lze rozložit na součet $|S_v S_m| + |S_m T|$. Dostáváme tak

$$|S_v T| = |S_v S_m| + |S_m T| = |S_v S_m| + |S_m F|,$$

což je přesně rovnost, kterou jsme chtěli dokázat. Navíc vidíme, že délka hlavní osy elipsy je rovna poloměru velké kružnice $|S_v T|$.

Kapitola 4

Parabola

Připomeňme, že parabolu lze snadno charakterizovat na základě jednotné rovnice kuželoseček

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon, \quad \varepsilon = 1,$$

tj.

$$|XF| = |Xd|.$$

Z předchozího rozboru vyplynulo, kde se nachází řídicí přímka d : je průsečnicí roviny dotykové kružnice Dandelinovy koule a roviny ϱ řezu, v němž se nachází parabola. Ohnisko F paraboly je pak bodem dotyku Dandelinovy koule a roviny řezu ϱ .

Rovnici paraboly odvodíme snadno, zvolme pro jednoduchost kartézskou soustavu souřadnic tak, že řídicí přímka bude kolmá k ose x a bude procházet bodem $-e$, $e > 0$; její rovnice tak bude $d: x + e = 0$. Ohnisko F umístíme na osu x tak, aby byl počátek uprostřed mezi řídicí přímkou d a ohniskem F , tj. $F = [e, 0]$. Bod paraboly nechť má souřadnice $X = [x, y]$. Potom:

$$|XF| = |Xd| \iff \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = x + e.$$

Umocněním na druhou dostaneme

$$\begin{aligned}(x - e)^2 + y^2 &= (x + e)^2 \\ x^2 - 2ex + e^2 + y^2 &= x^2 + 2ex + e^2 \\ y^2 &= 4ex.\end{aligned}$$

Označíme-li vzdálenost ohniska od řídicí přímky $p = 2e$ (tehdy bude označení odpovídat již zavedenému parametru kuželosečky), dostaneme rovnici paraboly ve tvaru

$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

4.1 Rovnice tečny paraboly

Najdeme nyní rovnici tečny paraboly. Předně si musíme uvědomit, že parabola není uzavřenou křivkou. Mohou tedy existovat i jiné přímky než tečny, které mají s parabolou jediný společný bod. Jsou to přímky rovnoběžné s osou paraboly.

Tečnu paraboly můžeme tedy definovat jako *přímku, která není rovnoběžná s osou paraboly a má přitom s parabolou jediný společný bod.*

Najdeme nyní rovnici tečny t paraboly v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$, pro jednoduchost uvažujme parabolu o rovnici $y^2 = 2px$.

Předně je tato tečna přímkou procházející bodem $T = [x_0, y_0]$, má tedy rovnici ve tvaru

$$t: y - y_0 = k(x - x_0).$$

Jediným neznámým koeficientem je tu k , který určíme z podmínky existence jediného společného bodu přímky t a paraboly. Přímka t nesmí být rovnoběžná s osou paraboly, která splývá s osou x , tj. $k \neq 0$. Příklad tečny ve vrcholu (vertikální přímka bez směrnice) ošetříme zvlášť.

Společné body paraboly a tečny najdeme řešením soustavy

$$y^2 = 2px, \quad y - y_0 = k(x - x_0).$$

Dosazením $y = y_0 + k(x - x_0)$ do rovnice paraboly dostaneme

$$\begin{aligned} (y_0 + k(x - x_0))^2 &= 2px, \\ (y_0^2 + 2ky_0(x - x_0) + k^2(x^2 - 2x_0x + x_0^2)) &= 2px, \\ k^2x^2 + x \cdot (2ky_0 - 2k^2x_0 - 2p) + (y_0^2 - 2kx_0y_0 + k^2x_0^2) &= 0, \\ k^2x^2 + x \cdot 2(ky_0 - k^2x_0 - p) + (y_0 - kx_0)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Parabola a přímka t budou mít jediný společný bod, bude-li mít tato kvadratická rovnice jediné řešení, tj. bude-li diskriminant této kvadratické rovnice nulový:

$$4(ky_0 - k^2x_0 - p)^2 - 4k^2(y_0 - kx_0)^2 = 0.$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} ((ky_0 - k^2x_0 - p) + k(y_0 - kx_0)) \cdot ((ky_0 - k^2x_0 - p) - k(y_0 - kx_0)) &= 0 \\ (-2k^2x_0 + 2ky_0 - p) \cdot (-p) &= 0 \\ 2k^2x_0 - 2ky_0 + p &= 0 \end{aligned}$$

Odtud

$$k = \frac{2y_0 \pm \sqrt{4y_0^2 - 8px_0}}{4x_0} = \frac{2y_0 \pm 2\sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{4x_0} = \frac{2y_0 \pm 0}{4x_0} = \frac{y_0}{2x_0} = \frac{py_0}{2px_0} = \frac{py_0}{y_0^2} = \frac{p}{y_0}.$$

Můžeme tedy psát rovnici tečny:

$$t: y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{neboli} \quad y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

Tuto rovnici ještě trochu upravíme:

$$\begin{aligned} yy_0 - y_0^2 &= p(x - x_0), \\ yy_0 - y_0^2 &= p(x + x_0) - 2px_0, \end{aligned}$$

a dostaneme rovnici tečny paraboly $y^2 = 2px$ v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$:

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0)}.$$

Tato rovnice zahrnuje i vertikální tečnu $t_V: x = 0$ ve vrcholu $V = [0, 0]$ paraboly $y^2 = 2px$, neboť pro $V = T = [0, 0]$ skutečně dostáváme ($p \neq 0$):

$$y \cdot 0 = p(x + 0),$$

což je rovnice přímky $x = 0$.

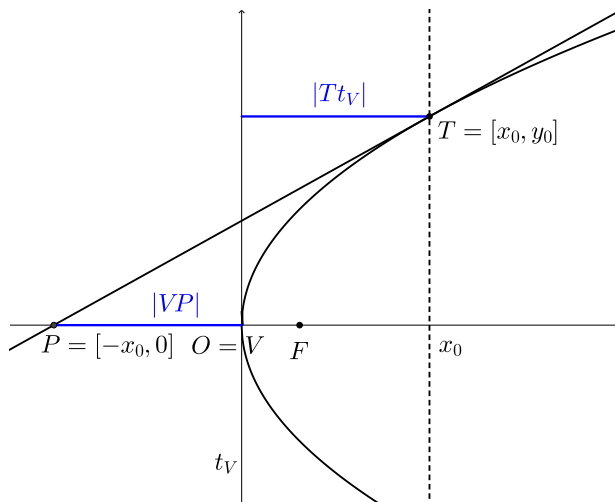
4.2 Konstrukce tečny paraboly

Položme si nyní otázku, jak by bylo možno tečnu paraboly $y^2 = 2px$ v daném jejím bodě $T = [x_0, y_0]$ zkonstruovat.

Rovnice této tečny je $t : y y_0 = p(x + x_0)$. Pokusme se nyní najít její průsečík P s osou x , tj. $P = [?, 0]$. Do rovnice tečny tedy dosadíme $y = 0$:

$$y \cdot 0 = p(x + x_0),$$

takže $0 = p(x + x_0)$ a dostáváme $x = -x_0$. Průsečík tečny s osou x je tedy $P = [-x_0, 0]$.



Odvodili jsme tak zajímavou vlastnost tečny paraboly, kterou lze pohodlně použít pro její konstrukci: vzdálenost bodu dotyku T od vrcholové tečny a vzdálenost průsečíku P s osou od vrcholové tečny je stejná:

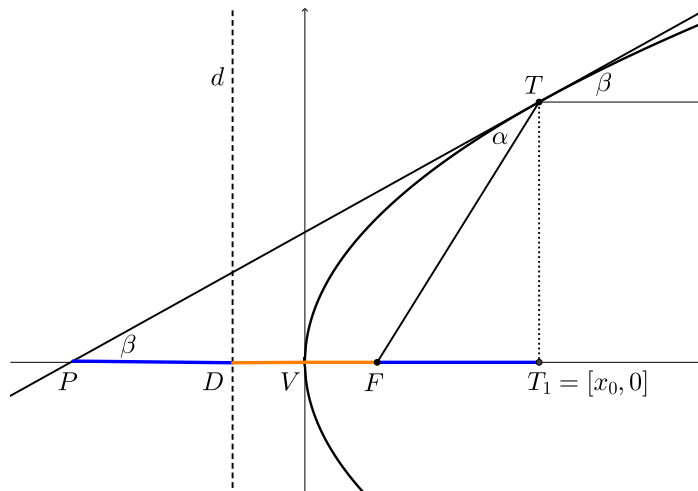
$$|Tt_v| = |VP|.$$

4.3 Ohnisková vlastnost paraboly

Paprsek vycházející z ohniska se od paraboly odrazí tak, že bude pokračovat rovnoběžně s její osou. A naopak, paprsek rovnoběžný s osou paraboly se od paraboly odrazí do jejího ohniska.

Uvažujme tedy parabolu $y^2 = 2px$ a ukažme, že se úhel dopadu rovná úhlu odrazu:

$$\alpha = \beta.$$



Stačí ukázat, že $\triangle TPF$ je rovnoramenný, tj. dokažme, že $|FT| = |PF|$. Z planimetrické definice paraboly máme $|FT| = |DT_1|$. Zbývá ověřit, že $|DT_1| = |PF|$:

- Z výše odvozené vlastnosti tečny paraboly plyne, že $|PV| = |VT_1|$.
- Z planimetrické definice paraboly aplikované na vrchol V máme $|VF| = |DV|$.
- Sečtením obou rovností dostáváme:

$$|PV| + |VF| = |DV| + |VT_1| \quad \text{neboli} \quad |PF| = |DT_1|.$$

Celkově tak dostáváme: $|FT| = |DT_1| = |PF|$, neboli $|FT| = |PF|$. Trojúhelník $\triangle TPF$ je tedy rovnoramenný, úhly při základně jsou tedy shodné:

$$\alpha = \beta.$$

Poznamenejme ještě, že velikost úhlů při vrcholu P i T značíme β , neboť jsou shodné (souhlasné úhly).

4.4 Subtangenta a subnormála

Subtangenta je půlena vrcholem paraboly.

Délka subnormály je rovna parametru paraboly.

Součet obou úseček – subtangenty a subnormály – je půlen ohniskem paraboly.

Bod F' osově souměrný s ohniskem F podle tečny paraboly leží na řídicí přímce. Jinak řečeno: *množina všech bodů osově souměrných s ohniskem F podle všech tečen paraboly je řídicí přímkou paraboly.*

A spojnice FF' je půlena vrcholovou tečnou paraboly. Jinak řečeno: *množina všech pat kolmic spuštěných z ohniska F na tečny paraboly je vrcholovou tečnou paraboly.*

Oskulační kružnice: její poloměr r_o je roven parametru p paraboly; prochází vrcholem paraboly.

$$r_o = p$$

4.5 Avicennova konstrukce paraboly

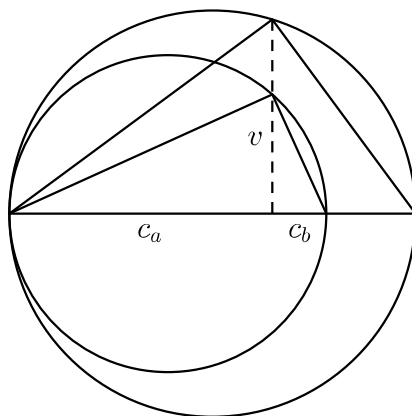
Pozorujme rovnici paraboly:

$$y^2 = 2p \cdot x.$$

Nápadně připomíná Eukleidovu větu o výšce:

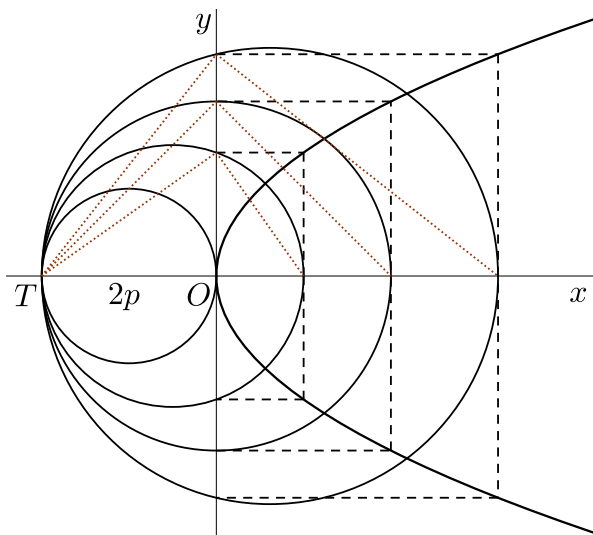
$$v^2 = c_a \cdot c_b,$$

pokud by $c_a = 2p$ byla konstanta a $c_b = x$ by probíhalo svými hodnotami \mathbb{R}_0^+ . Pokusme se tuto situaci znázornit geometricky.



Tuto souvislost bylo možno využít pro konstrukci jednotlivých bodů paraboly. Na záporné poloose x zvolme pevně bod T a narýsujme kružnici o průměru $|TO| = 2p$ dotýkající se osy y . Samotná konstrukce je dobře patrná z následujícího obrázku. Trojúhelníky, jejichž odvěsny jsou naznačeny tečkovaně, jsou pravouhlé (Thalétova věta), lze tedy na ně aplikovat Eukleidovu větu o výšce. Trojúhelníky volíme vždy tak, aby byla jejich výška částí osy y . Pak skutečně

$$y^2 = |TO| \cdot x = 2p \cdot x.$$



Tato konstrukce se nevyskytuje příliš často. Poprvé se objevuje v komentáři k Apollóniovým *Kónikám*, který sepsal perský lékař, astronom a matematik ibn Síná (asi 980–1037), známý též jako Avicenna.

Kapitola 5

Hyperbola

5.1 Parametrické vyjádření hyperboly

Hyperbolu lze parametrizovat snadno pomocí hyperbolických funkcí. Porovnejme parametrizace kružnice, elipsy a hyperboly:

$$\begin{array}{lll} \text{kružnice:} & x = r \cdot \cos \varphi, & y = r \cdot \sin \varphi, & \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \text{elipsa:} & x = a \cdot \cos \varphi, & y = b \cdot \sin \varphi, & \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \text{hyperbola:} & x = a \cdot \cosh \varphi, & y = b \cdot \sinh \varphi, & \varphi \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Připomeňme definice hyperbolického sinu a kosinu (obě funkce jsou definované na celém \mathbb{R}):

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

a základní vztah mezi těmito funkcemi platný pro všechna reálná x (analogie tzv. „goniometrické jedničky“):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Tento vztah (připomíná rovnici rovnoosé hyperboly $x^2 - y^2 = 1$) společně s využitelností hyperbolických funkcí pro parametrizaci hyperboly dal hyperbolickým funkcím jméno.

Důkaz této rovnosti je možno provést přímo na základě definice ($e^x e^{-x} = 1$):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{2 + 2}{4} = 1.$$

Ověření, že rovnice $x = a \cdot \cosh \varphi$, $y = b \cdot \sinh \varphi$ jsou skutečně parametrizací hyperboly, je založeno na přímočarém výpočtu. Zkrátka ověříme, že takováto x a y vyhovují rovnici hyperboly:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cdot \cosh \varphi)^2}{a^2} - \frac{(b \cdot \sinh \varphi)^2}{b^2} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Pokud bychom při parametrizaci hyperboly nechtěli použít hyperbolických funkcí, tak bychom mohli využít vztahu mezi druhými mocninami funkcí kosinus a tangens, který se využívá např. při integrování:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Z něho plyne

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi = 1.$$

Dostáváme tak další parametrizaci hyperboly (jednotlivé intervaly odpovídají větvím hyperboly):

$$\boxed{x = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad y = b \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)}.$$

Již z předchozích úvah je zřejmé, že taková x a y vyhovují rovnici hyperboly, ověřit to však můžeme i přímo:

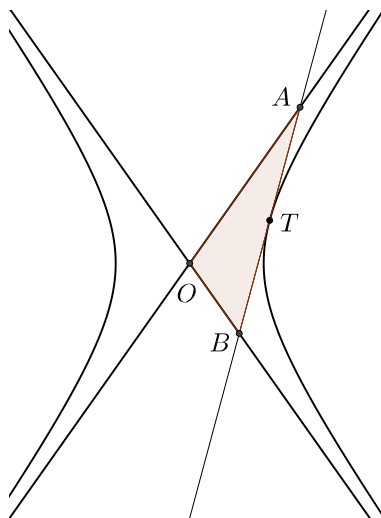
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi}}{a^2} - \frac{b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi = 1.$$

5.2 Obsah trojúhelníku ohraničeného asymptotami a tečnou

Pozorujme následující obrázek: je na něm narýsována hyperbola, zvolen nějaký její bod $T = [x_0, y_0]$ a v něm je zkonstruována tečna hyperboly. Tato tečna vymezuje společně s oběma asymptotami trojúhelník $\triangle AOB$.

A nyní překvapivá zajímavost: tento trojúhelník $\triangle AOB$ má stále stejný obsah, ať je tečna vedena v kterémkoli bodě T dané hyperboly. Tento obsah je roven

$$S_{\triangle AOB} = ab.$$



Odvození tohoto výsledku není nijak těžké. Stačí najít souřadnice průsečíků A, B tečny s asymptotami, a pak vypočítat obsah trojúhelníku $\triangle AOB$ např. pomocí determinantu (jako polovina obsahu rovnoběžníku určeného vektory \vec{OA} a \vec{OB}).

Budeme tedy potřebovat rovnici tečny t v bodě $T = [x_0, y_0]$ i rovnice obou asymptot a_1 a a_2 :

$$t : \frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1,$$

$$a_1 : y = \frac{b}{a}x, \quad a_2 : y = -\frac{b}{a}x.$$

K nalezení souřadnic průsečíků asymptot a tečny stačí vyřešit soustavy rovnic tečny a příslušné asymptoty, což snadno provedeme dosazením y z rovnice asymptoty do rovnice tečny:

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{\frac{b}{a}x y_0}{b^2} = 1, \quad \frac{x x_0}{a^2} + \frac{\frac{b}{a}x y_0}{b^2} = 1.$$

Vytknutím $\frac{x}{a}$ přejdou obě rovnice na tvar

$$\frac{x}{a} \cdot \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) = 1, \quad \frac{x}{a} \cdot \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) = 1,$$

x -ové souřadnice průsečíků A, B tedy jsou

$$x_A = \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, \quad x_B = \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}.$$

Z rovnic asymptot $y_{1,2} = \pm \frac{b}{a}x$ dopočítáme i příslušné y -ové souřadnice:

$$y_A = \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, \quad y_B = \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}.$$

Získali jsme tak souřadnice obou průsečíků asymptot s tečnou:

$$A = \left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} \right], \quad B = \left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}, \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \right].$$

Vypočtěme nyní obsah trojúhelníku vymezeného tečnou a asymptotami:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} & \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \\ \frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} & \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{\text{jmenovatel}} - \frac{-ab}{\text{jmenovatel}} \right),$$

kde

$$\text{jmenovatel} = \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \cdot \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

neboť bod dotyku $T = [x_0, y_0]$ je bodem hyperboly, vyhovuje tedy její rovnici.

Dostáváme tak hledaný obsah trojúhelníku

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}(ab + ab) = ab.$$

Pozorujme ještě obrázek; zdá se, že bod hyperboly $T = [x_0, y_0]$ je středem úsečky AB . Prozkoumejme tuto hypotézu. Střed S_{AB} úsečky AB je lineární kombinací bodů A, B s koeficienty $\frac{1}{2}$:

$$S_{AB} = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B.$$

Souřadnice bodů A, B jsme již vypočítali, můžeme tedy vypočítat i souřadnice středu:

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}, \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}, \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{a}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} + \frac{a}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}, \frac{b}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}} + \frac{-b}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2}a \cdot \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right)}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}, \frac{1}{2}b \cdot \frac{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} - \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right)}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} \right] \\ &= \left[\frac{1}{2}a \cdot \frac{2\frac{x_0}{a}}{1}, \frac{1}{2}b \cdot \frac{2\frac{y_0}{b}}{1} \right] = [x_0, y_0] = T \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že skutečně bod dotyku T pólí úsečku s krajními body A, B , což jsou průsečíky tečny hyperboly v bodě T s asymptotami:

$$\boxed{S_{AB} = T.}$$

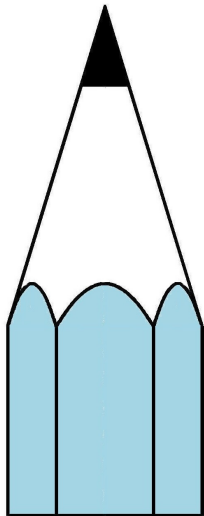
5.3 Hyperbola v běžném životě

Rozlučme se s hyperbolou úsměvným příkladem jejího výskytu. Představme si špičku ostrouhané tužky jako část kuželové plochy. Není-li tužka kulatá, ale má hranolovitý tvar (např. šestihranná či tříhranná), jsou tyto stěny částí rovin „rovnoběžných s tuhou v tužce“, tedy i s osou kuželové plochy; na rozhraní

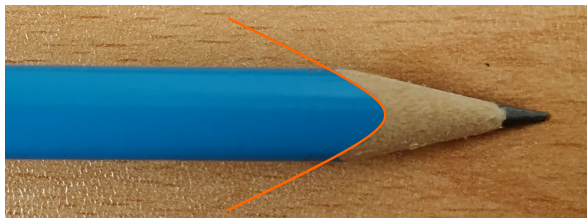
ostrouhaného a neostrouhaného tak vznikají hyperboly.

Strouháme-li tužku, konstruuje hyperboly.

Kvalitně ostrouhat tužku není jednoduché, navíc jsou vzniklé hyperboly malinké a obtížně se fotí. Předkládáme tedy model, na kterém jsou hyperboly dostatečně veliké a dobře patrné.



Zde je výsledek pokusu s trojhrannou tužkou, na níž jsou hyperboly relativně výrazné.



Kapitola 6

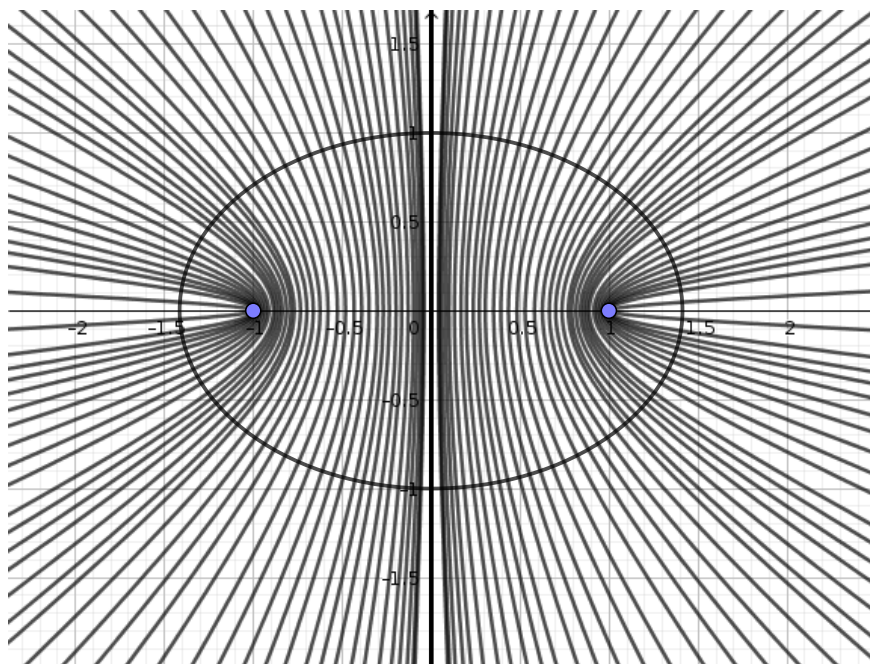
Vztahy mezi kuželosečkami

V této kapitole navážeme na obecné pojednání o kuželosečkách. Upozorníme na několik jednoduchých souvislostí, kterých je možné si všimnout, máme-li k dispozici teorii, kterou jsme doposud vybudovali.

6.1 Konfokální elipsy a hyperboly

Pozorujme následující obrázek. Je na něm narýsována elipsa a hyperboly, všechny tyto kuželosečky mají tatáž ohniska F_1, F_2 (vyznačena modře). Kuželosečky s týmiž ohnisky budeme nazývat *konfokální*.

Na obrázku je patrné, že elipsa je konfokálními hyperbolami protínána pod pravým úhlem. Podobně bychom mohli zvolit jednu hyperbolu a soustavu s ní konfokálních elips, opět bychom zjistili, že se hyperbola s každou z těchto elips protíná pod pravým úhlem.



Pokusme se tedy dokázat následující obecné tvrzení.

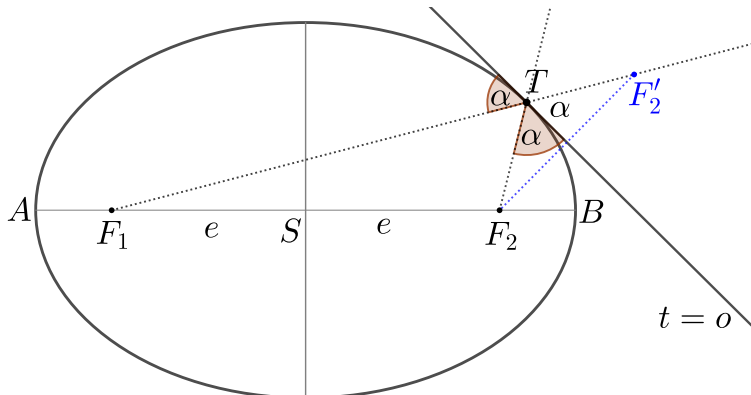
Věta: *Jsou-li elipsa a hyperbola konfokální, protínají se pod pravým úhlem.*

Velikostí úhlu, pod kterým se křivky protínají, rozumíme odchylku tečen v jejich průsečíku. Samotný důkaz tvrzení je překvapivě jednoduchý. Stačí uvážit, jak vypadají směrové vektory tečny elipsy a hyperboly.

U tečny elipsy je trojúhelník $\triangle F_2 F_2' T$ rovnostranný ($|F_2' T| = |F_2 T|$), proto je směrový vektor tečny \vec{u}_e lineární kombinací vektorů stejné délky: $(F_2' - T) + (F_2 - T)$. Stejně délky obou generujících vektorů lze dosáhnout i tím, že oba vektory normujeme, budou tedy jednotkové.

Užití F'_2 není pohodlné, museli bychom vypočítat jeho souřadnice. Místo vektoru $F'_2 - T$ proto použijeme raději vektor se známými vstupními prvky, který je s ním kolineární: $T - F_1$. Pokud stejnou délku obou generujících vektorů zajistíme normováním, dostaneme:

$$\vec{u}_e = \frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} - \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|}.$$



Podobně bychom získali směrový vektor tečny hyperboly:

$$\vec{u}_h = \frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} + \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|}.$$

Vektory \vec{u}_e a \vec{u}_h budou na sebe kolmé, bude-li jejich skalární součin roven nule. To snadno ověříme:

$$\begin{aligned} \vec{u}_e \cdot \vec{u}_h &= \left(\frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} - \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|} \right) \cdot \left(\frac{T - F_1}{\|T - F_1\|} + \frac{T - F_2}{\|T - F_2\|} \right) \\ &= \left(\frac{(T - F_1) \cdot (T - F_1)}{\|T - F_1\|^2} - \frac{(T - F_2) \cdot (T - F_2)}{\|T - F_2\|^2} \right) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Důkaz je tedy hotov. Při výpočtu jsme využili toho, že z definice normy vektoru plyne $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

6.2 Souvislosti mezi elipsou a parabolou

Na závěr si připomeňme některé výsledky, které jsme odvodili standardními elementárními prostředky. Je užitečné si je připomenout na jednom místě, vyniknou tak vztahy mezi jednotlivými typy kuželoseček, jejich příbuznost i souvislosti mezi nimi.

- Na parabolou můžeme pohlížet jako na elipsu, jejíž jedno ohnisko „pošleme do nekonečna“.
- Porovnejme formulaci *ohniskové vlastnosti* pro parabolou a elipsu.
 - Ohnisková vlastnost paraboly: *paprsek vyslaný z ohniska se odrazí rovnoběžně s osou paraboly.*
 - Ohnisková vlastnost elipsy: *paprsek vyslaný z jednoho ohniska se odrazí do druhého ohniska.*
- Řídící kružnice elipsy přechází v řídicí přímku paraboly.

Část II

Projektivní přístup ke kuželosečkám a metoda invariantů

Kapitola 7

Elementy projektivní geometrie a lineární algebra

7.1 Úvod – o čem to je

Mějme rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Dosud jsme zjišťovali, o jakou kuželosečku se jedná, pomocí transformace soustavy souřadnic. A také jsme se pak dozvěděli konkrétní parametry, např. u elipsy délky hlavní a vedlejší poloosy.

Vize: *Nešlo by to provést efektivněji pomocí lineární algebry?*

Ano, šlo: stačí kvadratický výraz na levé straně reprezentovat maticí, a pak použít teorii kvadratických forem.

Pokud se v rovnici kuželosečky neobjevuje smíšený člen (obsahující xy), tak lze získat kanonickou rovnici pouhým posunutím – to se dělá na střední škole. Problém nastává v případě, kdy rovnice obsahuje smíšený člen s xy : jedná-li se např. o elipsu, tak ji musíme otočit tak, aby její osy byly rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, pak smíšený člen vypadne.

Smíšený člen v kvadratických formách jsme ovšem eliminovali v lineární algebře:

pomocí symetrických úprav jsme hledali polární tvar kvadratické formy.

Postup tedy, zdá se, bude následující:

- Z celé levé strany rovnice kuželosečky vytvoříme kvadratickou formu.
- Tu zbavíme smíšeného členu (s xy) pomocí symetrických úprav převodem na polární tvar.
- Vzniklá rovnice už je dostatečně přehledná: určíme, o jakou kuželosečku se jedná.

Pozor: tímto způsobem sice zjistíme, o jakou kuželosečku se jedná, ale většinou ztratíme informace o jejích parametrech (délka hlavní a vedlejší poloosy u elipsy a hyperboly, ...). Proto nakonec raději půjdeme cestou hledání toho, co se při transformacích kuželosečky nemění – tzv. *invarianty* (např. vlastní čísla, determinanty).

7.2 Maticová reprezentace kuželosečky

Problém: první část rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

je kvadratickou formou. Snadno ji zapíšeme maticově:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

S kvadratickou formou umíme pracovat: umíme ji transformovat pomocí matice přechodu, eliminovat smíšený člen (obsahující xy) převodem na polární tvar pomocí symetrických úprav. Škoda, že **celá** levá strana rovnice kuželosečky není kvadratickou formou. Co tedy se zbylými členy?

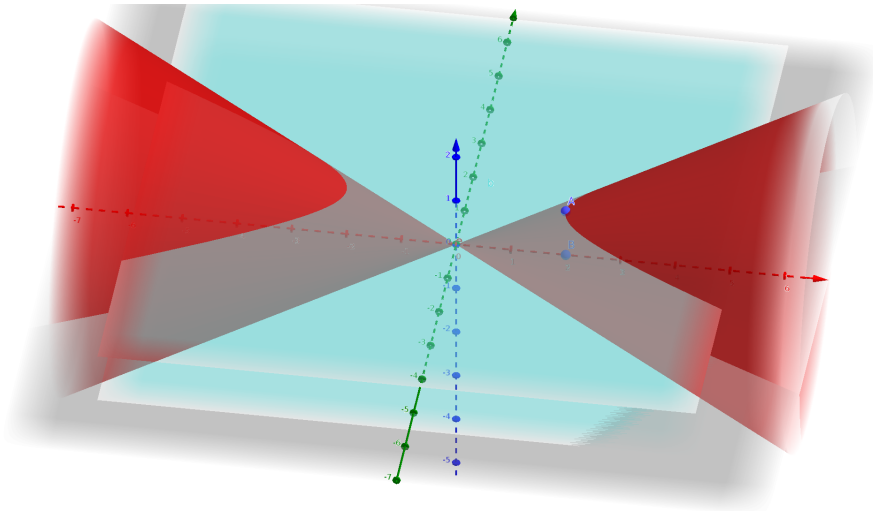
Řešení: Chceme, aby celá levá strana rovnice kuželosečky byla kvadratickou formou. A tak lineární členy i absolutní člen „obohatíme“ o další proměnnou z , aby se i tyto členy staly kvadratickými:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

Návrat k původnímu stavu je snadný, stačí dosadit $z = 1$:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x \cdot 1 + 2a_{23}y \cdot 1 + a_{33} \cdot 1 \cdot 1.$$

Geometricky: rovnice $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$ může reprezentovat kuželovou plochu. Rovnice $z = 1$ je rovinou (rovnoběžnou s rovinou xy). Jejich průnik je kuželosečka. Například průnikem kuželové plochy $z^2 = \frac{x^2}{4} - y^2$ a roviny $z = 1$ je hyperbola.



Matice kuželosečky

Levé straně rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

lze tedy jednoznačně přiřadit kvadratickou formu

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2,$$

kteřou můžeme snadno reprezentovat maticí

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Tuto matici nazýváme *maticí kuželosečky*.

Nyní je také zřejmé, proč jsme v rovnici kuželosečky psali lineární členy a smíšený člen ve tvaru $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$. Matice kuželosečky pak totiž vypadá pěkně, nevyskytují se v ní poloviny $\frac{a_{12}}{2}$, $\frac{a_{13}}{2}$, $\frac{a_{23}}{2}$.

Kvadratickou formu lze tedy pomocí matice K přepsat takto:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A samotnou rovnici kuželosečky (tj. při $z = 1$)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

budeme psát maticově takto:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

neboli stručně

$$\boxed{X^T \cdot K \cdot X = 0,}$$

případně (označíme-li výraz na levé straně závislý na x a y také K):

$$K(x, y) = 0.$$

7.3 Homogenní souřadnice

Vše jsme uměle převedli do 3D, převod mezi souřadnicemi původního 2D a nového 3D je však jasný: jelikož je $z = 1$, tak bod $X = [x, y]$ má ve 3D souřadnice $(x, y, 1)$.

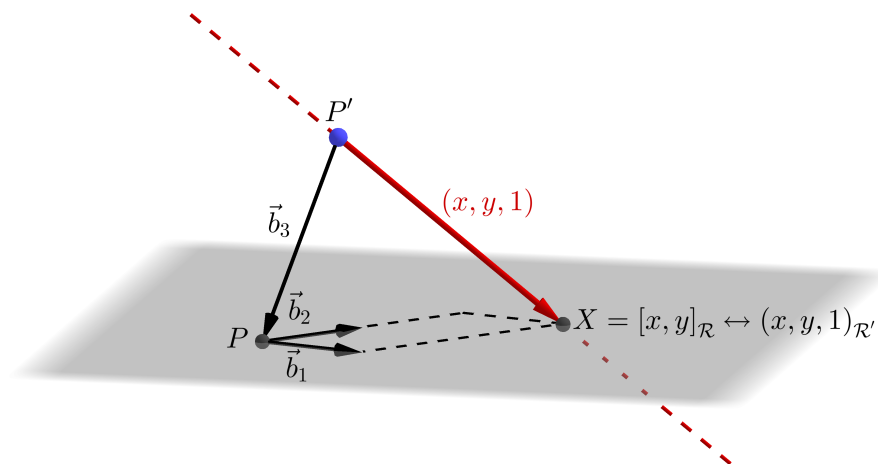
$$\boxed{[x, y] \leftrightarrow (x, y, 1)}$$

Tyto rozšířené souřadnice jsou speciálním případem tzv. *homogenních souřadnic*. Umožňují nesourodou levou stranu rovnice kuželosečky (kvadratická forma, lineární forma, absolutní člen) převést na jedinou kvadratickou formu, tj. na výraz stejno-rodý, cizím slovem homogenní.

7.3.1 Geometrické znázornění homogenních souřadnic bodu $X = [x, y]$

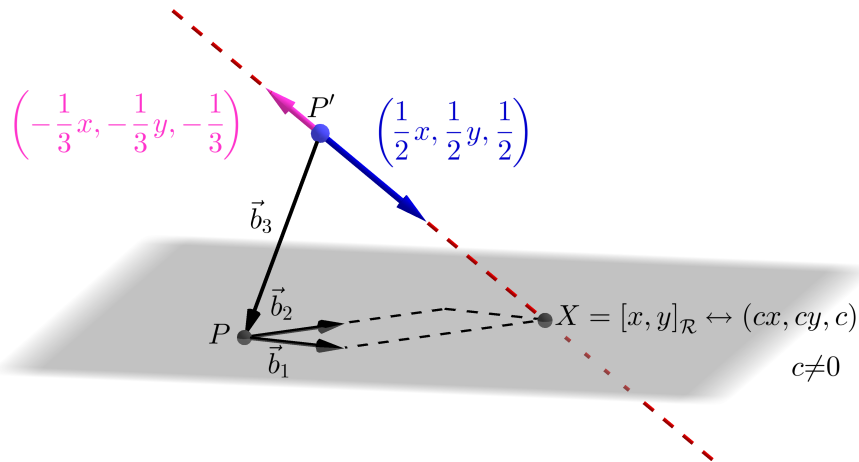
V rovině je dán repér $\mathcal{R} = \langle P; \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$. Necht jsou souřadnice bodu X vzhledem k tomuto repéru $[x, y]$.

Zvolme nyní bod P' , který v této rovině neleží. Uvažujme dále vektor $\vec{b}_3 = P - P'$. Dostaneme tak repér $\mathcal{R}' = \langle P'; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \rangle$. Souřadnice bodu X vzhledem k tomuto novému repéru \mathcal{R}' jsou $X_{\mathcal{R}'} = (x, y, 1)$, neboť $X = P' + x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Z nového počátku P' do bodu X tak „ukazuje“ vektor $X - P'$ o souřadnicích $(x, y, 1)$.



Myšlenku souřadnic rozšířených o obligátní jedničku můžeme zobecnit: z nového počátku P' do bodu X „ukazuje“ nejen vektor $X - P'$ o souřadnicích $(x, y, 1)$, ale i jeho libovolný nenulový c násobek (cx, cy, c) . Jeho koncový bod sice nebude přesně bodem X , ale i tak jím bude bod X jednoznačně určen, neboť přímka se směrovým vektorem (cx, cy, c) procházející počátkem P' protíná rovinu v jediném bodě, kterým je bod X . Můžeme tedy říci, že bod X je jednoznačně určen touto přímkou; jelikož je počátek P' pevně zvolen, tak k jednoznačnému určení bodu X postačuje zadání směrového vektoru (cx, cy, c) .

Za souřadnice bodu $X = [x, y]$ v rovině tak můžeme považovat libovolnou uspořádanou trojici (cx, cy, c) , $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Právě takováto uspořádaná trojice se nazývá *homogenními souřadnicemi* bodu X v rovině.



7.3.2 Výhoda homogenních souřadnic: nevlastní body a homogenizace

Zatím to vypadá jako samoučelné přidání třetí souřadnice c , přičemž vztah mezi souřadnicemi bodu $X = [x, y]$ v rovině a jeho homogenními souřadnicemi (cx, cy, c) je zřejmý:

- Bod $X = [x, y]$ v rovině má homogenní souřadnice (cx, cy, c) , kde $c \neq 0$ si můžeme libovolně zvolit; zvolíme-li například $c = 1$, jsou homogenní souřadnice bodu $X = (x, y, 1)$.
- Bod X s homogenními souřadnicemi (x, y, z) , kde $z \neq 0$, má také homogenní souřadnice $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$, takže jeho souřadnice jsou $X = [\frac{x}{z}, \frac{y}{z}]$.

Co kdybychom zvolili $z = 0$?

Homogenním souřadnicím (x, y, z) odpovídá bod $X = [\frac{x}{z}, \frac{y}{z}]$ v rovině, jehož souřadnice by pro $z = 0$ nebyly definovány (s trochou neopatrnosti bychom možná řekli, že jsou *nekonečné*).

Něco na tom bude: vektor $(x, y, 0)$ je rovnoběžný s rovinou (šedá), takže přímka s tímto směrovým vektorem procházející počátkem P' tuto rovinu neprotíná. Pokud bychom si průsečík moc přáli, tak bychom řekli, že leží „někde v nekonečnu“. Z těchto volných úvah plyne, že by body s homogenními souřadnicemi $(x, y, 0)$ mohly reprezentovat *nevlastní body* roviny.

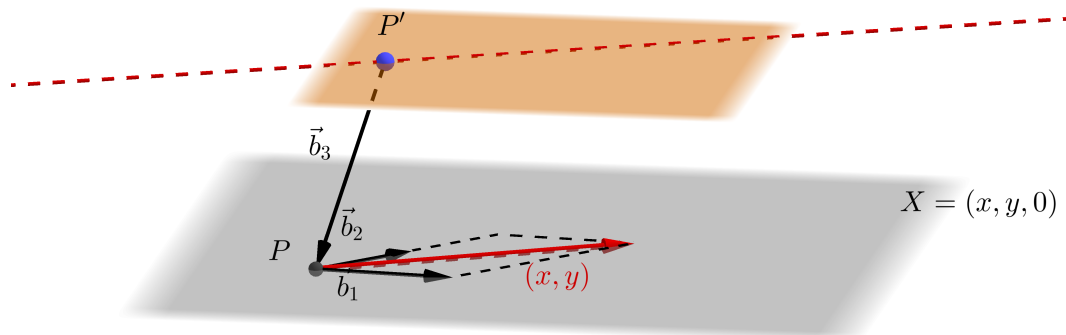
Pokusme se nyní zrevidovat celou konstrukci homogenních souřadnic bodů v rovině:

- sestrojíme množinu všech směrů (tj. jednorozměrných vektorových podprostorů, což vlastně odpovídá množině všech přímek procházejících počátkem) v třírozměrném prostoru,
- chceme, aby každému směru odpovídal právě jeden bod roviny (a naopak).

Poslední požadavek však zatím není splněn pro $z = 0$. Shrňme tedy oba případy: $z \neq 0$ a $z = 0$.

- Pokud je přímka se směrovým vektorem (x, y, z) procházející bodem P' s rovinou různoběžná, má s ní jediný společný bod. To nastává právě v případě, kdy $z \neq 0$.

- Pokud je přímka se směrovým vektorem (x, y, z) procházející bodem P' s rovinou rovnoběžná, nemá s ní žádný společný bod. To nastává právě v případě, kdy $z = 0$. Mohli bychom však přidat k bodům roviny další body, tzv. *nevlastní body*, které by měly homogenní souřadnice $(x, y, 0)$. Jednalo by se o „body v nekonečnu“, každý by byl jednoznačně určen směrem, neboli přímkou (červeně) rovnoběžnou s rovinou (šedá) procházející počátkem P' .



„Směr“, kterým tato přímka „ukazuje“, však musíme chápat neorientovaně: jedna přímka „ukazuje“ do jediného nekonečna. Vlastně je zajímavé, že na jednom i druhém „konci“ přímky najdeme pořád tentýž jeden nevlastní bod. Výhodou je, že se pak rovnoběžky protínají v jediném nevlastním bodě (a ne „na každém konci v jednom“, tedy ve dvou nevlastních bodech). Dvě přímky v rovině tak mají vždy jediný průsečík: různoběžky vlastní, zatímco rovnoběžky nevlastní – určený směrem těchto rovnoběžek.

Množina všech nevlastních bodů roviny by tedy byla reprezentována všemi přímkami procházejícími počátkem P' rovnoběžnými s rovinou, tj. ležícími v rovině naznačené béžově. Jinak řečeno, jedná se o množinu všech směrů tvaru $[(x, y, 0)]$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Výhodou homogenních souřadnic je tedy mimo jiné i to, že jsou schopny postihnout i nevlastní body. Přímky v rovině pak mají vždy právě jeden společný bod: jsou-li různoběžné, mají společný vlastní bod (x_0, y_0, z_0) ; jsou-li rovnoběžné, mají společný nevlastní bod $(x_0, y_0, 0)$ (směrový vektor těchto rovnoběžek je (x_0, y_0)).

Kapitola 8

Transformace kuželosečky a metoda invariantů

Cíl: Vhodným posunutím kuželosečky se (pokud možno) zbavíme lineárních členů¹, vhodným otočením se pak zbavíme členu s xy . Nyní najdeme takové posunutí a otočení, aby k těmto zjednodušením skutečně došlo, bude-li to možné.

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{posunutí}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{otočení}} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ilustrace: Na střední škole jsme prováděli jen první krok (posunutí), kterým jsme například rovnici elipsy převáděli na tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

neboli na tvar (zbavíme-li se jmenovatelů)

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

maticí této elipsy je tedy:

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

a její rovnici můžeme psát ve tvaru

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

8.1 Posunutí

Aplikujme na kuželosečku posunutí (cizím slovem *translaci*) $T : X' = X + \vec{t}$. V souřadnicích:

$$x' = x + t_1, \quad y' = y + t_2.$$

Jaká matice² T provede posunutí bodu $X = [x, y]$ o vektor $\vec{t} = (t_1, t_2)$? Pracujme přímo v homogenních souřadnicích ($z = 1$). Je to matice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

¹ Například u paraboly ($y^2 - 2px = 0$) se obou lineárních členů nezbavíme, jeden nutně zůstane. (A všimněme si koeficientu $2p$, aby matice vypadala hezky.)

² Posunutí jakožto zobrazení i jeho matici budeme značit stejným písmenem T , jelikož je posunutí svou maticí určeno jednoznačně.

neboť právě jejím vynásobením dostaneme $x + t_1$ a $y + t_2$:

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posunutí T kuželosečky K tedy provedeme aplikací matice posunutí T (je to vlastně matice přechodu) na souřadnice bodu X , dopadne to stejně, jako kdybychom aplikovali posunutí na matici K příslušné kvadratické formy; posudte sami:

$$(TX)^T \cdot K \cdot (TX) = X^T T^T K T X = X^T \cdot (T^T K T) \cdot X.$$

Vypočtěme tedy matici posunuté kuželosečky:

$$\begin{aligned} T^T K T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23} \\ a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13} & a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kdy budou lineární členy nulové? Když budou koeficienty

$$a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13} \quad \text{a} \quad a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}$$

nulové. Dostáváme tak soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13} &= 0 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

neboli maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array} \right).$$

Tato soustava má jediné řešení právě tehdy, když je matice soustavy, což je vlastně matice koeficientů kvadratických členů

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

regulární (neboli invertibilní, má nenulový determinant).

Je-li tedy matice A regulární, existuje posunutí takové, že lineární členy zcela zmizí. Vzpomeňme např. na rovnici elipsy probíranou na střední škole:

$$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} = 1.$$

Posunutím bodu $S = [s_1, s_2]$ do počátku jsme eliminovali lineární členy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bod S je střed elipsy, podobně to funguje u hyperboly. U paraboly však lineární členy posunutím eliminovat zcela nelze ($y^2 = 2px$). Dostáváme se tak k definici středu kuželosečky.

Definice: Je-li matice A (a zároveň matice K , aby se nejednalo o nějaké degenerované případy) regulární, řekneme, že kuželosečka K je *středová*; bod $S = [s_1, s_2]$, jehož souřadnice získáme jako jediné řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array} \right)$$

nazýváme *středem* kuželosečky K .

Tuto soustavu je snadné si dokonce i zapamatovat: vypadá (až na znaménka pravé strany) jako první dva řádky matice kuželosečky.

Námítka: Střed jsme definovali na základě pozorování speciálních případů (elipsa, hyperbola). Měli bychom však ověřit, že bod S skutečně splňuje to, co od středu očekáváme: je středem souměrnosti kuželosečky, tj. s každým bodem P_1 kuželosečky na ní leží i jeho obraz P_2 ve středové souměrnosti se středem S . (Pro vlastní body P_1 a P_2 by tedy mělo také platit: $|SP_1| = |SP_2|$.)

Tvrzení stačí ověřit pro kuželosečku posunutou bodem S do počátku. Je-li v této situaci vlastní bod $P_1 = [p, q]$, potom má jeho obraz P_2 ve středové souměrnosti podle počátku S souřadnice $[-p, -q]$. Ověřme tedy tvrzení:

$$\text{je-li } P_1 \in K, \text{ potom i } P_2 \in K.$$

To je však snadné, stačí implikaci přepsat

$$P_1^T K P_1 = 0 \quad \implies \quad P_2^T K P_2 = 0.$$

A tato implikace platí, neboť

$$(p, q, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = (-p, -q, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad: Najděte střed elipsy $4x^2 + 9y^2 - 8x - 90y + 193 = 0$.

Vlastně bychom se mohli zeptat, jak tuto elipsu máme posunout ve směru osy x a y , aby se střed posunul do počátku.

Matice této elipsy je

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & -45 \\ -4 & -45 & 193 \end{pmatrix}.$$

Soustava pro nalezení souřadnic středu:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 45 \end{array} \right).$$

Řešením této soustavy nalezneme souřadnice středu: $S = [1, 5]$.

8.2 Otočení

Rovnice otočení o orientovaný úhel φ byly odvozeny na cvičení:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Matice otočení o orientovaný úhel φ je tedy

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

neboť

$$X' = R_\varphi \cdot X = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Všimněme si zajímavé vlastnosti matice otočení:

$$R \cdot R^T = E,$$

neboli matice transponovaná je zároveň maticí inverzní. Ověřit to lze přímým výpočtem, ale je to vidět ihned „otočením zpět“, tj. o orientovaný úhel φ : dostaneme matici transponovanou:

$$R_\varphi^T = R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}.$$

Navíc snadno vypočítáme $\det R_\varphi = 1$ pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ (odtud také vyplývá, že matice R_φ je regulární, tedy invertibilní).

Otočme nyní kuželosečku K o takové φ , aby byl smíšený člen nulový. Pracovat budeme přímo v homogenních souřadnicích.

Otočení R_φ kuželosečky K tedy provedeme aplikací matice otočení R_φ (je to vlastně matice přechodu) na souřadnice bodu X , dopadne to stejně, jako kdybychom aplikovali otočení na matici K příslušné kvadratické formy; posudte sami:

$$(R_\varphi X)^T \cdot K \cdot (R_\varphi X) = X^T R_\varphi^T K R_\varphi X = X^T \cdot (R_\varphi^T K R_\varphi) \cdot X.$$

Vypočtěme tedy matici otočené kuželosečky:

$$R_\varphi^T K R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cílem je najít takové φ , pro něž bude nulový člen na pozici $\{12\}$ (a samozřejmě také na pozici $\{21\}$, jelikož je matice symetrická). Ten vyjde:

$$a_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi (a_{22} - a_{11}).$$

Kdy bude smíšený člen nulový?

$$a_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi (a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$a_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi (a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$a_{12} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\varphi (a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}},$$

což je vztah vhodný pro snadný výpočet φ . Podmínky existence však upozorňují, že bychom měli raději chtít vzorec:

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

neboť v případě $a_{12} = 0$ máme zadánu kuželosečku, jejíž rovnice neobsahuje smíšený člen, a není tedy třeba ji otáčet.

8.3 Vlastní čísla a invarianty

Vše jsme sice zatím zapisovali maticově, ale bez toho bychom se klidně obešli: lineární algebru jsme dosud podstatně nevyužili.

Diagonalizace matice kuželosečky. Všechno snažení (otočení, posunutí) směřuje k tomu, abychom matici kuželosečky převedli na matici diagonální. To bychom mohli provést převedením kvadratické formy s maticí K na polární tvar, příslušná polární báze by byla bází, vzhledem k níž má kuželosečka „hezkou“ rovnici (bez smíšených a lineárních členů, pokud možno). Z polární báze však není vidět, jaké otočení a posunutí je potřeba provést, vše je v ní obsaženo zároveň. Navíc polární tvar (existující určitě aspoň v případě elipsy či hyperboly) vlastně ani nepotřebujeme: už předem víme, že vyjde diagonální matice.

Co tedy potřebujeme? Konkrétní φ a konkrétní posunutí T (pokud existují). A (pokud možno) diagonalizovaný tvar matice kuželosečky, v němž bude zachováno vše podstatné. Například u elipsy bychom si přáli tvar

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno najdeme délku hlavní a vedlejší poloosy, tj. *geometrické* vlastnosti elipsy. Hledání polárního tvaru matice K však není moc vhodné: při jeho hledání nás totiž nic neupozorní, že bychom měli přestat; úprava v případě elipsy by vždy mohla skončit maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

což odpovídá kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Změnili jsme bázi natolik, že jsme změnili délku bázových vektorů, takže se „přizpůsobily“ délce hlavní a vedlejší poloosy.

Jak z toho ven? Matice kuželosečky se transformuje jako kvadratická forma:

$$R_\varphi^T K R_\varphi;$$

také víme, že pro matici rotace platí

$$R_\varphi^T = R_\varphi^{-1}.$$

Takže transformaci kuželosečky lze psát ve tvaru

$$\boxed{R_\varphi^{-1} K R_\varphi},$$

což znamená hledat **Jordanův kanonický tvar** (teď by měla zaznít *fanfára*, zde se děje to klíčové). Jelikož je matice kuželosečky symetrická, je Jordanův kanonický tvar matice K diagonální (Jordanův tvar s jedničkami mimo diagonálu by nebyl symetrickou maticí) a na diagonále jsou vlastní čísla. Takže: **najdeme vlastní čísla matice K a budeme o kuželosečce vědět (skoro) vše podstatné.**

8.3.1 Invarianty

Pozorování: Všimněme si, že vlastní čísla matice K se při rotaci nemění, protože podobné matice mají stejná vlastní čísla (dokonce mají stejný Jordanův kanonický tvar) a matice K a $R_\varphi^{-1} K R_\varphi$ skutečně podobné jsou. Můžeme tedy říci, že vlastní čísla λ_1 a λ_2 jsou invariantní vůči rotaci.

Pozorování: Všimněme si, že se také nemění $\det K$, a to ani při translaci

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

neboť $\det T = 1$, takže

$$\det(T^T K T) = \det T^T \cdot \det K \cdot \det T = 1 \cdot \det K \cdot 1 = \det K,$$

ani při rotaci

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

neboť $\det R_\varphi = 1$, takže

$$\det(R_\varphi^T K R_\varphi) = \det R_\varphi^T \cdot \det K \cdot \det R_\varphi = 1 \cdot \det K \cdot 1 = \det K.$$

Determinant matice kuželosečky je tedy také invariantem.

Pozorování: Všimněme si, že se nemění ani determinant matice kvadratických členů $\det A$ (zde má smysl ověřovat pouze invarianci vůči rotaci), neboť

$$\begin{aligned} \det(R_\varphi^T A R_\varphi) &= \det R_\varphi^T \cdot \det A \cdot \det R_\varphi = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det A \cdot 1 = \det A. \end{aligned}$$

Determinant matice kvadratických členů $\det A$ je tedy také invariantem.

Pozorování: Všimněme si, že se nemění ani hodnoty matic $h(K)$, $h(A)$, neboť se při translaci a rotaci násobí maticemi translace/rotace, což jsou regulární matice (jejich determinanty jsou rovny 1) a vynásobením regulární maticí hodnota původní matice nezmění.

8.4 Praktické provedení (u regulární kuželosečky)

Nyní využijeme invarianty (vlastní čísla, determinanty, hodnoty), které jsme našli v předchozí kapitole. Poslouží nám k pohodlnému nalezení odpovědi na následující otázky. Soustředit se budeme na regulární kuželosečky (tj. případ, kdy matice kuželosečky je regulární): elipsu, hyperbolu, parabolu.

Otázky: Mějme matici kuželosečky (kterou snadno sestavíme z rovnice kuželosečky). Jak z ní poznáme:

- o jakou kuželosečku se jedná,
- hodnoty základních charakteristik?

Dříve jsme odpovědi na obě otázky hledali pomocí transformace soustavy souřadnic. Nyní si tuto poměrně složitou cestu zjednodušíme.

Jak určit, o jakou kuželosečku se jedná?

Stačí určit hodnoty matic K (matice kuželosečky) a A (matice kvadratických členů) a jejich determinanty ($\Delta = \det K$ a $\delta = \det A$). Všechny možnosti jsou vypsány na první stránce stručného přehledu klasifikace kuželoseček na konci tohoto textu. Není třeba se jej složitě učit, stačí si uvědomit základní typy rovnic, představit si příslušnou matici a uvědomit si hodnoty i determinanty.

Pozor: pokud rovnice obsahuje člen s x^2 , tak jeho koeficient a_{11} musí být kladný (není-li, tak celou rovnici vynásobíme -1). Pokud bychom to nedodrželi, tak by posloupnosti znamének determinantů nefungovaly tak pěkně, jak je to v přehledu klasifikace kuželoseček.

Pokud například vyjde, že obě matice jsou regulární, přičemž $\Delta > 0$ a $\delta < 0$, jedná se o hyperbolu, neboť po transformaci (posunutí, otočení, které nemusíme provádět), by diagonální matice dopadla nějak takto:

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix},$$

což odpovídá rovnici hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Předpokládáme totiž, že koeficient u x^2 je kladný, $\delta < 0$, takže na pozici a_{22} musí být (po transformacích, které neprovádíme) záporný prvek. Je-li celý $\Delta > 0$, tak musí být poslední prvek na diagonále záporný.

Jak určit základní charakteristiky zadané kuželosečky?

Matici kuželosečky K bychom měli převést na kanonický tvar. Ale vlastně to ani nemusíme dělat, protože jsme to provedli v rámci teorie a přesně víme, co by nám vyšlo pro daný typ kuželosečky. Stačí, když najdeme to podstatné: vlastní čísla matice kvadratických členů A a další konstanty, které jsou nutné k jednoznačnému nalezení rovnice zadané kuželosečky v kanonickém tvaru. Zde bude nejlepší, když vše uděláme zvlášť pro elipsu/hyperbolu a pro parabolu.

8.4.1 Elipsa a hyperbola

Cíl: Při standardní proceduře pomocí translace a rotace bychom převáděli rovnici elipsy/hyperboly na kanonický tvar: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$, tj. na tvar odpovídající rovnici známé ze střední školy. Matice této kuželosečky (v kanonickém tvaru) je

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že se jedná o

- **elipsu** právě tehdy, když mají (obě nenulová) λ_1 a λ_2 stejná znaménka a $c < 0$,
- **hyperbolu** právě tehdy, když mají (obě nenulová) λ_1 a λ_2 různá znaménka a $c \neq 0$.

Schematicky je to naznačeno ve stručném přehledu klasifikace kuželoseček na konci tohoto textu. Nenulovost λ_1 , λ_2 , c je zajištěna podmínkami kladenými na hodnoty matic: $h(K) = 3$, $h(A) = 2$.

Postup:

- Rotace se týká pouze kvadratických členů. Hledejme tedy pouze vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Jordanův kanonický tvar bude vypadat takto:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- Zbývá nalézt poslední prvek na hlavní diagonále c . Všimněme si, že

$$\delta = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \text{a} \quad \Delta = \det K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot c = \det A \cdot c.$$

Takže c vypočteme snadno:

$$c = \frac{\det K}{\det A}.$$

- Délky hlavní a vedlejší poloosy získáme porovnáním rovnice $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ s kanonickou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
- Souřadnice středu elipsy jsou řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array} \right)$$

- Úhel otočení určíme ze vztahu

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Pokud by bylo $a_{11} = a_{22}$, tak bychom použili vztah s kotangens.

Příklad: Rozhodněte, o jakou kuželosečku se jedná a určete její charakteristiky.

$$3x^2 + 4\sqrt{3}xy + 7y^2 + 4(\sqrt{3} - 3)x + 2(7 - 4\sqrt{3})y - (17 + 8\sqrt{3}) = 0$$

Řešení: Matice kuželosečky je

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} & 2(\sqrt{3} - 3) \\ 2\sqrt{3} & 7 & 7 - 4\sqrt{3} \\ 2(\sqrt{3} - 3) & 7 - 4\sqrt{3} & -(17 + 8\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

- Šikovním výpočtem pomocí Gaussovy eliminace získáme oba determinanty zároveň:
 $\Delta = \det K = -4 \cdot 9^2 < 0$ a $\delta = \det A = 9 > 0$. Jedná se tedy o elipsu.

- Vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$$

Vlastní čísla seřadíme podle velikosti (a první musí být kladné):

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 9.$$

- Délka hlavní a vedlejší poloosy, kanonická rovnice:

$$c = \frac{\det K}{\det A} = \frac{-4 \cdot 9^2}{9} = -4 \cdot 9$$

Kanonická rovnice $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ vychází $x^2 + 9y^2 - 4 \cdot 9 = 0$, neboli

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Poloosy tedy jsou: $a = 6$, $b = 2$.

- Úhel otočení:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{4\sqrt{3}}{3 - 7} = -\sqrt{3},$$

tj. $2\varphi = -60^\circ + k \cdot 180^\circ$, takže $\varphi = -30^\circ + k \cdot 90^\circ$. Elipsa je tedy otočena o -30° . (Varianta $-30^\circ + 90^\circ = 60^\circ$ odpovídá případu, kdybychom prohodili hlavní a vedlejší osu.)

- Souřadnice středu elipsy získáme řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2\sqrt{3} & -2(\sqrt{3} - 3) \\ 2\sqrt{3} & 7 & -(7 - 4\sqrt{3}) \end{array} \right),$$

vychází $S = [2, -1]$.

Kapitola 9

Tečny a asymptoty

9.1 Tečna kuželosečky

Pozorujeme tečny kuželoseček, jak byly odvozeny na střední škole. Pro připomenutí: tečna kuželosečky tam byla definována takto:

- pro případ elipsy: přímka, která má s elipsou jediný společný bod,
- pro případ hyperboly: přímka, která má s hyperbolou jediný společný bod, zároveň však není rovnoběžná s žádnou z jejích asymptot,
- pro případ paraboly: přímka, která má s parabolou jediný společný bod, zároveň však není rovnoběžná s její osou.

Rovnice tečen pak lze v každém z těchto případů odvodit z těchto podmínek. Jedná se však o dosti otravný úkol, jak je vidět z následujícího náznaku výpočtu pro případ elipsy.

9.1.1 Tečna elipsy – středoškolský přístup

Příklad: (pouze na podívání, jak je ten výpočet ošklivý) Tečna elipsy v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$: je to přímka procházející bodem $T = [x_0, y_0]$, má tedy rovnici $y - y_0 = k(x - x_0)$. S elipsou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

má mít jediný společný bod $[x_0, y_0]$. Ten je řešením soustavy, dosaďte tedy $y = y_0 + k(x - x_0)$ do rovnice elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_0 + k(x - x_0))^2}{b^2} = 1.$$

Upravme tuto kvadratickou rovnici:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{2y_0 k(x - x_0) + k^2(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Bod $T = [x_0, y_0]$ je bodem elipsy, proto splňuje její rovnici $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Rovnice se tím malinko zjednoduší:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{2xky_0 - 2kx_0y_0 + k^2x^2 - 2xk^2x_0 + k^2x_0^2}{b^2} = 0.$$

Sdružme členy s x^2 a x

$$x^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) + x \cdot \frac{2k}{b^2} (y_0 - kx_0) + \frac{k^2x_0^2 - 2kx_0y_0}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 0.$$

a vynásobme rovnici a^2b^2 :

$$x^2 \cdot (b^2 + k^2a^2) + x \cdot 2ka^2(y_0 - kx_0) + x_0^2(a^2k^2 - b^2) - 2a^2kx_0y_0 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má jediné řešení právě tehdy, když je diskriminant nulový:

$$D = 4k^2a^4(y_0 - kx_0)^2 - 4 \cdot (b^2 + k^2a^2) \cdot (x_0^2(a^2k^2 - b^2) - 2a^2kx_0y_0) = 0.$$

Nyní bychom měli z této kvadratické rovnice vypočítat k :

$$4a^4y_0^2k^2 + 8a^2b^2x_0y_0k + 4b^4x_0^2 = 0$$

$$a^4y_0^2k^2 + 2a^2b^2x_0y_0k + b^4x_0^2 = 0$$

$$(a^2y_0k + b^2x_0)^2 = 0$$

$$k = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

Vypočteme tedy rovnici tečny elipsy v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$:

$$y = y_0 + k(x - x_0) = y_0 - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Vynásobíme-li rovnici $\frac{yy_0}{b^2}$, dostaneme

$$\frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2},$$

přičemž modře zvýrazněné členy jsou dohromady rovny jedné ($[x_0, y_0]$ je bodem elipsy), takže rovnice tečny elipsy v jejím bodě $T = [x_0, y_0]$ vychází:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Pozorování: Tečnu t elipsy lze však ihned nalézt jednoduchou úvahou: tečna je přímka, takže je reprezentována lineární rovnicí, zároveň musí procházet bodem $T = [x_0, y_0]$, který je bodem elipsy. Stačí tedy v rovnici elipsy nahradit kvadratické členy lineárními:

$$t : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

a je rovnice tečny elipsy na světě. Dosadíme-li totiž za x a y souřadnice x_0 a y_0 , vznikne rovnost

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

kteřá potvrzuje, že bod $[x_0, y_0]$ leží nejen na elipse (to jsme předpokládali), ale i na přímce t , která je tedy tečnou, ověříme-li, že $[x_0, y_0]$ je skutečně jediným společným bodem této přímky a elipsy.

Ověřit to můžeme například sporem. Nechť je $[x_1, y_1]$ dalším průsečíkem této přímky a elipsy, který je různý od $[x_0, y_0]$. Potom tento bod leží na přímce, tj.:

$$\frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} = 1$$

i na elipse:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Odečtením těchto dvou rovností dostaneme

$$\frac{(x_1 - x_0)x_1}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)y_1}{b^2} = 0.$$

Odečteme-li jiné dvě rovnosti ($[x_0, y_0]$ leží na elipse, $[x_1, y_1]$ leží na přímce), vyjde:

$$\frac{(x_1 - x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)y_0}{b^2} = 0.$$

Oba body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$ (dle předpokladu různé) tedy leží nejen na přímce

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1,$$

ale také na další přímce

$$\frac{(x_1 - x_0)x}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)y}{b^2} = 0,$$

což není možné. □

Podobně se postupuje v případě hyperboly a paraboly.

9.1.2 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – analogie

Na základě analogie s rovnicemi tečen kuželoseček uváděnými na střední škole můžeme odvodit obecný tvar rovnice tečny kuželosečky s maticí K . Pro porovnání:

rovnice elipsy: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, rovnice tečny elipsy v bodě $[x_0, y_0]$: $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$,

zapsáno maticově:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Obecně:

Rovnice kuželosečky:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

rovnice tečny kuželosečky v bodě $[x_0, y_0]$:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Na základě analogie jsme tedy odhadli, že rovnice tečny t regulární kuželosečky s maticí K v jejím bodě $X_0 = (x_0, y_0, 1) \in K$ je

$$t : X^T \cdot K \cdot X_0 = 0.$$

Ověřme, že se skutečně jedná o tečnu, tj.:

- 1) bod dotyku X_0 je skutečně bodem přímky t ,
- 2) jiný bod přímky t už na kuželosečce K neleží,
- 3) je splněna případná další podmínka kladená na tečnu (hyperbola, parabola).

První podmínku ověříme snadno: stačí dosadit bod X_0 do rovnice přímky t , dostaneme $X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0$, což platí (neboť bod X_0 je dle předpokladu bodem kuželosečky K), takže X_0 vyhovuje rovnici přímky t , je tedy jejím bodem.

Platnost druhé podmínky dokážeme sporem. Nechť je $X_1 = (x_1, y_1, 1)$ dalším průsečíkem přímky t a kuželosečky K , který je různý od $(x_0, y_0, 1)$. Potom tento bod leží:

$$\text{na přímce } t, \text{ tj.: } X_1^T \cdot K \cdot X_0 = 0, \quad \text{i na kuželosečce } K: X_1^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Zároveň však bod X_0 leží na přímce t i na kuželosečce K :

$$X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0.$$

V následujících výpočtech budeme pracovat s uspořádanými trojicemi jako maticemi, nebudeme tedy rozlišovat, zda se jedná o body, nebo vektory. Odečtením jednotlivých rovností dostáváme:

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_0 = 0,$$

$$X_1^T \cdot K \cdot (X_1 - X_0) = 0.$$

Druhou rovnost transponujeme ($K = K^T$, neboť je matice K symetrická):

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Obě rovnosti (první a transponovanou druhou) porovnejme:

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_0 = 0, \quad (X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Takže body X_0 a X_1 leží na přímce

$$(X_1 - X_0)^T \cdot K \cdot X = 0.$$

Jenže body X_0 a X_1 leží také na přímce t (rovnice je transponována):

$$X_0^T \cdot K \cdot X = 0,$$

což však není možné, protože by muselo být $(X_1 - X_0)^T = X_0^T$, neboli v souřadnicích

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, 0) = (x_0, y_0, 1),$$

tyto dvě trojice se však nerovnají.

Třetí podmínka se týká pouze hyperboly a paraboly. U paraboly nesmí být přímka t rovnoběžná s osou paraboly, u hyperboly nesmí být přímka t rovnoběžná s žádnou z asymptot. Tyto podmínky lze poměrně snadno ověřit, potřebujeme však znát rovnici osy paraboly, resp. rovnici asymptoty hyperboly.

9.1.3 Rovnice tečny regulární kuželosečky obecně – sečna přejde v tečnu

V předchozí podkapitole jsme postupovali na základě analogie s rovnicemi tečen kuželoseček uváděnými na střední škole. Obecný tvar rovnice tečny kuželosečky s maticí K lze však odvodit přímo, na základě úvah podobných těm, které provádíme při hledání tečny v matematické analýze (sečna procházející body X_0 , X_1 přechází při $X_1 \rightarrow X_0$ v tečnu v bodě X_0).

Mějme kuželosečku K s rovnicí $X^T \cdot K \cdot X = 0$ a dva body X_0 , X_1 , které této kuželosečce náleží, tj. platí pro ně

$$X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0, \quad X_1^T \cdot K \cdot X_1 = 0.$$

Přímka, která těmito dvěma body prochází, je sečnou kuželosečky K a má rovnici:

$$X = X_0 + t(X_1 - X_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tuto rovnici transponujeme a vynásobme zprava výrazem $K \cdot X_0$, aby co nejvíce členů vypadlo:

$$X^T \cdot K \cdot X_0 = X_0^T \cdot K \cdot X_0 + t(X_1^T \cdot K \cdot X_0 - X_0^T \cdot K \cdot X_0).$$

Jelikož je bod X_0 bodem kuželosečky, splňuje rovnici $X_0^T \cdot K \cdot X_0 = 0$. Zbude tedy

$$X^T \cdot K \cdot X_0 = t(X_1^T \cdot K \cdot X_0).$$

Nyní provedme limitní přechod, tj. nechť $X_1 \rightarrow X_0$, čímž dostaneme rovnici tečny

$$X^T \cdot K \cdot X_0 = t(X_0^T \cdot K \cdot X_0),$$

neboli

tečna: $X^T \cdot K \cdot X_0 = 0.$

9.2 Rovnice asymptot hyperboly

Díky homogenním souřadnicím, které umožňují zapsat i nevlastní body, je úkol snadný: stačí si uvědomit, že *asymptota hyperboly je tečnou hyperboly v jejím nevlastním bodě*.

Představa je zde názorná: pokud se posouváme s bodem po hyperbole „čím dál tím dále“ směrem k nevlastnímu bodu hyperboly, tečna v tomto bodě se stále více přibližuje jedné z asymptot.

Jelikož je rovnice tečny v bodě $X_0 \in K$ ve tvaru $t : X^T \cdot K \cdot X_0 = 0$, neboli v souřadnicích:

$$t : (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

je rovnice asymptoty *as* ve tvaru:

$$as : (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

kde $(x_0, y_0, 0)$ je nevlastním bodem hyperboly. Ten najdeme snadno z podmínky, že je to bod hyperboly, tj.:

$$(x_0, y_0, 0) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

což lze, vzhledem k nulovosti poslední souřadnice, zredukovat na rovnici obsahující pouze matici kvadratických členů:

$$(x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Příklad: Najděte asymptoty hyperboly $2xy = 3$.

Řešení: Matice této hyperboly je

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

matice kvadratických členů:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledejme nevlastní body:

$$(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

tj.

$$(y_0, x_0) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

odkud dostáváme rovnici

$$2x_0y_0 = 0.$$

Vychází tak nevlastní body: $(c_1, 0, 0)$ a $(0, c_2, 0)$.

Pozor: souřadnice $(c_1, 0, 0)$ určují pro libovolné $c_1 \neq 0$ stále tentýž nevlastní bod. Stačí si připomenout geometrickou interpretaci homogenních souřadnic a představit si vektor, který „ukazuje rovnoběžně s původní rovinou směrem do nekonečna“: nezáleží na tom, zda místo něho vezmeme libovolný jeho nenulový násobek, nevlastní bod je určen směrem (jednorozměrným podprostorem), ne jen jeho jediným konkrétním generátorem. A teď trošku přesněji: bod X byl na obrázku u homogenních souřadnic reprezentován libovolným nenulovým vektorem (s počátečním bodem v počátku P'), tj. vektorem ležícím na přímce $P'X$ (v obrázku červeně), záleží tedy na směru, nikoli na konkrétním vektoru, který jej určuje.

Pro jednoduchost zvolme například $c_1 = c_2 = 1$ (volba nemá na výsledné rovnice asymptot vliv). Potom nevlastní body mají jednoduché homogenní souřadnice $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$. Rovnice příslušných asymptot pak vycházejí:

$$as_1: (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad as_2: (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Po vynásobení:

$$as_1: y = 0, \quad as_2: x = 0.$$

□

V této kapitole jsme úspěšně našli nevlastní body hyperboly. Nejsou to jen „nějaké neužitečné body v nekonečnu“, potřebovali jsme je k nalezení asymptoty hyperboly. Možná už také tušíme, že i osa paraboly má něco společného s nevlastními body. Pojďme je tedy najít obecně.

9.3 Nevlastní body regulárních kuželoseček

Zavedení homogenních souřadnic nám umožňuje pracovat s nevlastními body. U elipsy bychom očekávali, že nebude mít žádný nevlastní bod (je to uzavřená křivka), u hyperboly bychom čekali dva (pozor, ne čtyři), u paraboly jeden (parabolu si tak můžeme představit jako elipsu, jejíž jeden vrchol pošleme ve směru hlavní osy do nekonečna – tento „vrchol v nekonečnu“ je nevlastním bodem paraboly).

K čemu nám nevlastní body budou?

- U hyperboly jsme je využili k nalezení asymptot, což byly tečny hyperboly v nevlastních bodech. Jelikož má hyperbola dva nevlastní body, můžeme očekávat dvě asymptoty.
- U paraboly využijeme souřadnice nevlastního bodu k nalezení její osy, což je přímka procházející vrcholem paraboly a její nevlastní bod je nevlastním bodem paraboly.

9.3.1 Hledání nevlastních bodů

Nevlastní body $(x_0, y_0, 0)$ kuželosečky jsou jejími body, takže musí vyhovovat její rovnici:

$$(x_0, y_0, 0) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Jelikož je poslední souřadnice nulová, tak se v tomto součinu neobjeví prvky matice K , které jsou ve třetím řádku a třetím sloupci. Stačí tedy pracovat s maticí kvadratických členů A :

$$(x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Všechny výpočty se podstatně zjednoduší, pokud si vše budeme představovat na rovnici kuželosečky po transformaci na kanonický tvar.

Nevlastní body elipsy (rovnice v kanonickém tvaru)

Řešme rovnici (pro jednoduchost je matice A už přímo v kanonickém tvaru):

$$(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

neboli

$$\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0.$$

Jedná se o elipsu, jsou-li obě vlastní čísla λ_1, λ_2 kladná. Za těchto podmínek však rovnice nemá žádné reálné řešení. Elipsa tedy nemá žádné (reálné) nevlastní body.

Nevlastní body hyperboly (rovnice v kanonickém tvaru)

Výpočet je stejný, jako u elipsy, v rovnici

$$\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$$

však vystupují vlastní čísla, která mají navzájem různá znaménka ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 < 0$. Za těchto podmínek má rovnice nekonečně mnoho řešení, která tvoří dva jednorozměrné vektorové podprostory. Můžeme tedy očekávat dva nevlastní body.

$$(\sqrt{\lambda_1} x_0 - \sqrt{-\lambda_2} y_0) \cdot (\sqrt{\lambda_1} x_0 + \sqrt{-\lambda_2} y_0) = 0$$

$$y_0 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}} x_0, \quad y_0 = -\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}} x_0.$$

Množina všech řešení je

$$\left[\left(x_0, \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}} x_0 \right) \right] \cup \left[\left(x_0, -\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}} x_0 \right) \right],$$

neboli

$$\left[(\sqrt{-\lambda_2} x_0, \sqrt{\lambda_1} x_0) \right] \cup \left[(\sqrt{-\lambda_2} x_0, -\sqrt{\lambda_1} x_0) \right].$$

Hyperbola má tedy právě dva nevlastní body

$$(\sqrt{-\lambda_2} x_0, \sqrt{\lambda_1} x_0, 0), \quad (\sqrt{-\lambda_2} x_0, -\sqrt{\lambda_1} x_0, 0).$$

Souřadnice nevlastních bodů jsou jednoznačné až na nenulový násobek, takže také body se souřadnicemi

$$(\sqrt{-\lambda_2}, \sqrt{\lambda_1}, 0), \quad (\sqrt{-\lambda_2}, -\sqrt{\lambda_1}, 0)$$

jsou nevlastními body zadané hyperboly.

SŠ: Pokud by hyperbola byla zadána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

bylo by možno její nevlastní body zapsat například pomocí těchto souřadnic:

$$\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, 0 \right), \quad \left(\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}, 0 \right),$$

případně lépe (po vynásobení ab):

$$(a, b, 0), \quad (a, -b, 0).$$

Směrnice obou asymptot jsou pak

$$\frac{b}{a} \quad \text{a} \quad -\frac{b}{a}$$

a jejich rovnice

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{a} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Rovnice asymptot můžeme ještě upravit:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Připomeňme si rovnici tečny hyperboly v bodě $[x_0, y_0, 1]$ uváděnou na střední škole:

$$t: \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Tečny v nevlastních bodech hyperboly $(a, b, 0)$ a $(a, -b, 0)$ pak budou mít rovnice

$$t_1 = a s_1: \frac{x a}{a^2} + \frac{y b}{b^2} = 0 \quad \text{a} \quad t_2 = a s_2: \frac{x a}{a^2} + \frac{y (-b)}{b^2} = 0,$$

neboli

$$t_1 = a s_1: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{a} \quad t_2 = a s_2: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Nevlastní bod paraboly $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$ (rovnice v kanonickém tvaru)

Parabola má jedno vlastní číslo nenulové, druhé nulové. Matice A kvadratických členů tedy dává rovnici

$$(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

neboli

$$\lambda_1 x_0^2 = 0.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení $x_0 = 0$, která tvoří **jednorozměrný** vektorový podprostor obsahující vektory $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, neboli podprostor $[(0, 1)]$. Parabola $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$ má tedy **jeden** nevlastní bod $(0, 1, 0)$.

Pozorování: Právě jsme našli nevlastní bod paraboly: $(0, 1, 0)$. Všimněme si (známe to již ze SŠ), že vektor $(0, 1)$ je směrovým vektorem osy paraboly $\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$. To není náhoda: souřadnice směrového vektoru osy paraboly jsou skutečně rovny prvním dvěma složkám nevlastního bodu paraboly; jakmile najdeme naprosto obecně osu paraboly, tak to bude zřejmé.

Pro netrpělivé: nevlastní bod paraboly je „v nekonečnu ve směru osy“.

Nevlastní bod paraboly $(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ (rovnice v obecném tvaru)

Parabola má jedno vlastní číslo nenulové, druhé nulové. Matice A kvadratických členů tedy dává rovnici

$$(x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

Co znamená, že vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ je vlastním vektorem matice A příslušným vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$?

$$A\vec{v} = 0 \cdot \vec{v}, \quad \text{tj.} \quad A\vec{v} = \vec{o}.$$

Vlastní vektor \vec{v} je tedy řešením homogenní soustavy $A\vec{v} = \vec{o}$. Všimněme si, že vlastní vektor \vec{v} příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ také vyhovuje rovnici

$$\vec{v}^T \cdot A \cdot \vec{v} = 0,$$

neboť

$$\vec{v}^T \cdot (A \cdot \vec{v}) = \vec{v}^T \cdot \vec{o} = 0.$$

Takže jsme ověřili, že vlastní vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$ vyhovuje rovnici

$\vec{v}^T \cdot A \cdot \vec{v} = 0$, takže parabola $(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ má nevlastní bod:

$$\boxed{(v_1, v_2, 0)}.$$

Kapitola 10

Další prvky kuželoseček

10.1 Osa paraboly

Osa paraboly K je definována jako přímka, podle níž je parabola osově souměrná. To splňuje přímka s rovnicí:¹

$$\text{osa : } (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

kde u_1, u_2 jsou souřadnice vlastního vektoru \vec{u} matice A příslušného vlastnímu číslu $\lambda_1 \neq 0$. Průsečík paraboly a její osy se nazývá *vrchol*.

Důkaz:

Ověřme nyní, že rovnice v rámečku skutečně určuje přímku, která je osou souměrnosti paraboly. Vezměme libovolný bod $X = (x, y, 1)$, který leží na parabole K , tj. $X^T \cdot K \cdot X = 0$, a bod Y ležící na ose $(x, y, 1) \cdot K \cdot (u_1, u_2, 0)^T = 0$ takový, aby byl vektor $X - Y$ na osu kolmý, což nastane, pokud budou vektory $X - Y$ a \vec{u} (normálový vektor osy) lineárně závislé, tj. musí existovat $c \neq 0$ takové, že $X - Y = c \cdot \vec{u}$.

Obraz bodu X v osově souměrnosti s osou $Y^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0$ označme X' , potom musí platit:

$$X = Y + (X - Y) \quad \text{a} \quad X' = Y - (X - Y).$$

¹ Kdyby někdo chtěl „vidět“ tuto rovnici hned: na parabolu můžeme nahlížet jako na elipsu, jejíž jeden hlavní vrchol je v nekonečnu. Tento bod je nevlastním bodem paraboly. Díky homogenním souřadnicím máme možnost zapsat jeho souřadnice: $(v_1, v_2, 0)$, kde v_1, v_2 jsou taková, že vektor (v_1, v_2) je vlastním vektorem matice kvadratických členů A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 0$.

Rovnici tečny v nevlastním bodě $(v_1, v_2, 0)$

$$t : (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

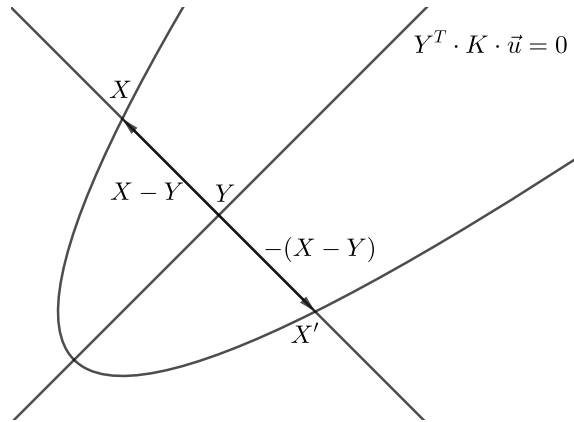
můžeme využít k nalezení něčeho hmatatelnějšího: osy paraboly. Ta by měla být na tečnu v nevlastním bodě $(v_1, v_2, 0)$ kolmá (stále si představujeme analogii s elipsou) a měla by nevlastním bodem $(v_1, v_2, 0)$ procházet.

Nyní si stačí připomenout, že vlastní vektory jsou na sebe kolmé, takže kolmým vektorem k vlastnímu vektoru (v_1, v_2) bude vlastní vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ matice A příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 \neq 0$ ($A\vec{u} = \lambda_1\vec{u}$, proto $K \cdot (u_1, u_2, 0)^T = (\lambda_1 u_1, \lambda_1 u_2, c)^T$).

Rovnice osy paraboly je tedy na světě: přímka s rovnicí v rámečku je skutečně osou paraboly, neboť je kolmá na tečnu v nevlastním bodě a zároveň tímto bodem $(v_1, v_2, 0)$ prochází, protože

$$(v_1, v_2, 0) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

tuto rovnost stačí přepsat do tvaru $(v_1, v_2, 0) \cdot (\lambda_1 u_1, \lambda_1 u_2, c)^T$, což je vzhledem ke kolmosti \vec{u} a \vec{v} rovno nule.



Máme dokázat:

$$\boxed{X \in K \implies X' \in K.}$$

Přepíšme tuto implikaci:

$$X^T \cdot K \cdot X = 0 \implies X'^T \cdot K \cdot X' = 0$$

a dosadme za X i X' :

$$[Y + (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y + (X - Y)] = 0 \implies [Y - (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y - (X - Y)] = 0.$$

Oba výrazy na levých stranách upravme:

$$[Y + (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y + (X - Y)] = Y^T \cdot K \cdot Y + 2Y^T \cdot K \cdot (X - Y) + (X - Y)^T \cdot K \cdot (X - Y),$$

$$[Y - (X - Y)]^T \cdot K \cdot [Y - (X - Y)] = Y^T \cdot K \cdot Y - 2Y^T \cdot K \cdot (X - Y) + (X - Y)^T \cdot K \cdot (X - Y).$$

Vidíme, že oba výrazy se liší jediným znaménkem, a to u členu

$$Y^T \cdot K \cdot (X - Y).$$

Ten je však nulový, takže jsou si oba výrazy rovny. Proč je nulový? Jelikož je $X - Y = c \cdot \vec{u}$, můžeme levou stranu upravit:

$$Y^T \cdot K \cdot (X - Y) = c \cdot Y^T \cdot K \cdot \vec{u};$$

bod Y leží na ose $Y^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0$, takže je tento výraz skutečně nulový. Ověřili jsme tak, že jsou si oba výrazy rovny:

$$X^T \cdot K \cdot X = X'^T \cdot K \cdot X',$$

takže platí, že je-li jeden z nich roven nule, je roven nule i druhý:

$$X^T \cdot K \cdot X = 0 \implies X'^T \cdot K \cdot X' = 0,$$

tudíž bod X' souměrný podle osy $Y^T \cdot K \cdot \vec{u} = 0$ s bodem $X \in K$ je také bodem paraboly K . \square

Příklad: Najděte osu paraboly $x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 8 = 0$.

Řešení: Najdeme nenulové vlastní číslo λ_1 matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

tj. kořen charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$. Vychází $\lambda_1 = 2$, příslušný vlastní vektor je řešením homogenní soustavy s maticí $A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Řešením je jednorozměrný

podprostor $[(1, -1)]$, takže vlastní vektor příslušný nenulovému vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ je například $\vec{u} = (1, -1)$.

Rovnice osy

$$\text{osa : } (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

paraboly K tedy vychází:

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{neboli} \quad (x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

po vydělení rovnice číslem 2:

$$\text{osa: } y = x + 1.$$

Vrchol této paraboly teď můžeme najít dle definice jako průsečík paraboly a její osy; rovnice paraboly je $(x - y)^2 - 4y + 8 = 0$, rovnice osy $x - y = -1$. Dosazením jedné rovnice do druhé dostáváme rovnici $(-1)^2 - 4y + 8 = 0$, tj. $y = \frac{9}{4}$; z rovnice osy pak $x = y - 1 = \frac{5}{4}$. Vrchol paraboly je tedy $V = [\frac{5}{4}, \frac{9}{4}]$.

Pozorování: Vrchol paraboly je definovaný jako průsečík paraboly a její osy. Všimněme si, že tyto průsečíky jsou dva: jeden odpovídá vrcholu paraboly, jak jej známe ze střední školy, druhý bod, který vyhovuje podmínce z definice vrcholu, je nevlastní bod paraboly. Parabola má tedy jeden vlastní vrchol a jeden nevlastní vrchol.



KONĚC ZVONĚC

Část III

Přehledy

Kapitola 11

Klasifikace kuželoseček

Označení

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\text{Matice kuželosečky: } K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diskriminant kuželosečky: $\Delta = \det K$

$$\text{Diskriminant kvadratických členů: } \delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

11.1 Regulární kuželosečky $h(K) = 3$, tj. $\Delta \neq 0$

• $h(A) = 2$: středové ($\delta \neq 0$): $\delta > 0$ elipsa $\delta < 0$ hyperbola

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{imaginární elipsa (prázdná množina)} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta > 0, \quad \Delta > 0$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elipsa} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \delta > 0, \quad \Delta < 0$$

$$3. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hyperbola} \quad \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \delta < 0$$

• $h(A) = 1$: nestředové ($\delta = 0$)

$$4. y^2 - 2px = 0 \quad \text{parabola} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm p \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm p \\ 0 & \pm p & 0 \end{pmatrix} \quad \delta = 0, \quad \Delta < 0$$

11.2 Singulární kuželosečky $h(K) < 3$, tj. $\Delta = 0$

- $\delta \neq 0$: různoběžky ($h(K) = 2, h(A) = 2$)

1. $x^2 - k^2y^2 = 0$ dvě různoběžky $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta < 0$

2. $x^2 + k^2y^2 = 0$ bod $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta > 0$ (dvě imag. přímky s reálným průsečíkem)

- $\delta = 0$: rovnoběžky ($h(A) = 1$)
- různé ($h(K) = 2$)

3. $x^2 - r^2 = 0$ dvě různé rovnoběžky $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}$

4. $x^2 + r^2 = 0$ prázdná množina $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}$ (dvě imaginární rovnoběžky)

- splývající ($h(K) = 1$)

5. $x^2 = 0$ přímka $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (dvě splývající rovnoběžky)

11.3 Výpočet jednotlivých prvků kuželoseček

$$\cotg 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Elipsa, hyperbola

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

$$\det K = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = c\lambda_1\lambda_2 \quad \text{a} \quad \det A = \lambda_1\lambda_2, \quad \text{tj.} \quad c = \frac{\det K}{\det A}$$

Odtud pak vypočteme a, b .

$$\text{Souřadnice středu jsou řešením soustavy} \quad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array} \right).$$

Parabola

$$\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$$

$$\det K = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p' \\ 0 & p' & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1 p'^2 \quad \text{tj.} \quad p'^2 = \frac{-\det K}{\lambda_1} \quad p = \frac{p'}{\lambda_1}$$

vlastní číslo $\lambda_1 \neq 0$, příslušný vlastní vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$,
vlastní číslo $\lambda_2 = 0$, příslušný vlastní vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$\text{rovnice osy paraboly: } (x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$V \text{ je průnikem osy a paraboly} \quad F = V + \frac{1}{2} p \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Tečna kuželosečky

$$(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Asymptoty hyperboly

Asymptota hyperboly je vlastně tečnou v nevlastním bodě.

$$(x, y, 1) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{kde} \quad (x_0, y_0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$$