CESTA KE SKALÁRNÍMU SOUČINU

Zdeněk Halas

V tomto příspěvku se pokusíme zdůraznit význam motivace při zavádění pojmů, kterou nechápeme jen jako prvek zatraktivňující výuku, ale jako integrální součást matematického vzdělávání. Tyto úvahy budeme demonstrovat na příkladě zavedení skalárního součinu.

1 Zavádění pojmů a jejich motivace

Ve školské matematice se někdy zavádějí pojmy bez náležité motivace. V případě skalárního součinu se to týká některých učebnic středoškolských i vysokoškolských. Nahlédneme-li např. do středoškolské učebnice [3], nalezneme tam na straně 40 „motivaci" v rozsahu jediné věty: *Skalární součin, který teď zavedeme, je velmi důležitý.*

Ve středoškolské učebnici [4] se sice nejprve odvodí vzorec pro úhel dvou vektorů, nicméně skalární součin je pak motivován pouze na základě vztahů známých z fyziky: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ a $W = |\vec{F}||\vec{s}| \cos \varphi$, takže se odkazuje na skalární součin používaný ve fyzice.

Ve vysokoškolských učebnicích je pak kladen důraz na abstraktní definici (skalární součin jako bilineární forma, která je symetrická a pozitivně definitní). K základní motivaci skalárního součinu se už autoři většinou nevracejí, tuto znalost tiše předpokládají. Je tomu tak nejen v učebnicích lineární algebry (např. [1], kde je tento přístup pochopitelný, neboť téma skalární součin elegantně navazuje na téma bilineární formy; navíc je třeba získat obecnější pohled na skalární součin v souvislosti s matematickou analýzou), ale i v učebnicích geometrie, viz např. [5] od strany 104, kde je pouze připomenuta definice skalárního součinu z lineární algebry, bohužel bez názorné geometrické interpretace a jejích důsledků. Přestože je zde vybudována míra úhlu, je následně vztah

$$\cos x = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \tag{1}$$

použit k definici funkce kosinus (str. 134), resp. k definici odchylky nenulových vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (str. 136).

Ve zmíněných vysokoškolských učebnicích se tedy předpokládá, že čtenář je obeznámen s důvodem, proč je odchylka dvou nenulových vektorů definována vztahem (1) a jak byl tento vztah odvozen. Z vlastního šetření, kdy jsem se dotazoval více než 140 studentů učitelství matematiky, však vyplynulo, že tento předpoklad není v naprosté většině případů splněn. Pouze pět studentů z nich mělo aspoň nějaké povědomí o tom, jak vztah (1) vznikl a čím je motivováno zavedení skalárního součinu, ostatní o tom neměli představu vůbec žádnou.

Jsem přesvědčen o tom, že abstraktní zavedení skalárního součinu je prospěšné, je však třeba jej provádět se studenty, kteří jsou na to připraveni. Jinými slovy: abstrakce k matematice neodmyslitelně patří; myslím však, že je třeba k ní přistupovat až tehdy, když je zřejmé, na základě čeho ji provádíme.

Při zavádění pojmů je často prospěšné využít poznatků historie matematiky. Vývoj skalárního součinu byl však poměrně komplikovaný, zasahuje i do jiných oblastí matematiky, než je geometrie a lineární algebra (hyperkomplexní čísla, viz např. pěkná netradiční učebnice [2]), a tak se skalární součin řadí mezi ty pojmy, jejichž zavedení většinou nedoprovází zajímavý historický exkurz, ale vychází se pouze z vhodně zvolených matematických úvah, které pak implikují didaktické zpracování.

V následující kapitole stručně shrnu motivační úvahy, které by podle mých představ měly předcházet definici skalárního součinu. Závěrečná část pak bude věnována jedné aplikaci geometrické interpretace skalárního součinu. Budeme tedy postupovat podle jednoduchého schématu, které se mi ve výuce při zavádění základních pojmů osvědčilo:

1. motivace (nastínění „o co jde“, formulace základního problému),
2. řešení problému a samotná definice, zdůvodnění zvoleného názvu,
3. příklady a protipříklady, ekvivalentní charakterizace, aplikace.

Uvedené schéma nám připomíná, že ve školské matematice by definice základního pojmu zpravidla neměla být „autonomní“, „samostatná“, ale měla by bezprostředně navazovat na předchozí úvahy.

2 Zavedení skalárního součinu

Máme-li na střední škole zavedeny souřadnice vektoru a sčítání vektorů, můžeme přikročit k zavedení skalárního součinu.

Předně je třeba si uvědomit, že s vektory nyní pracujeme v rámci analytické geometrie, přestože je jejich abstraktní zavedení jako prvků jisté algebraické struktury – vektorového prostoru – na geometrii nezávislé. Analytická geometrie však není nějaká „nová“ geometrie, ale žákům již známá geometrie, jejíž výsledky však zapisujeme pomocí souřadnic, a vektory si v této fázi představujeme jako klasické „šipky“.

Jednou z podstatných složek geometrie je její metrická část formalizující to, co z běžného života dobře známe: délky, vzdálenosti, velikosti úhlů. V rámci analytické geometrie je tedy třeba vyřešit *dva základní problémy*: jak zapsat pomocí souřadnic:

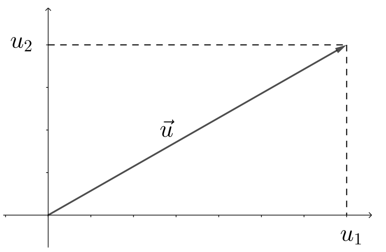
a) vzdálenost dvou bodů (tj. délku vektoru),
b) odchylku dvou vektorů.

Pokud tyto dvě základní úlohy úspěšně vyřešíme, získáme základ k dalším geometrickým úvahám, například budeme moci hledat vzdálenosti bodu od podprostoru (či od nadroviny), obecně vzdálenost dvou podprostorů, odchylku dvou přímek, přímky od podprostoru (či od nadroviny) nebo odchylku dvou nadrovin. Všimněme si, že zatím o skalárním součinu nemusíme vůbec hovořit.

a) Norma vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Pro nenulový vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ budeme vycházet z obrázku 1. Vzhledem k tomu, že pracujeme v kartézské soustavě souřadnic, můžeme na vzniklý pravoúhlý trojúhelník s délkami odvěsen $|u_1|$, $|u_2|$ aplikovat Pýthagorovu větu. Pro délku přepony, což je hledaná norma $\|\vec{u}\|$ nenulového vektoru $\vec{u}$, pak platí

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2\,.$$



Obr. 1: Norma vektoru $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Samotnou normu vektoru tedy definujeme takto:

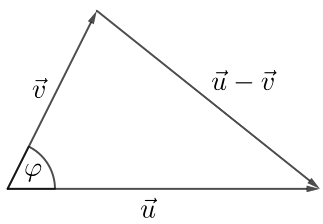
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,.$$

Platnost tohoto definičního vztahu rozšíříme i na nulový vektor $\vec{o}$, jeho norma je tedy nulová. Tím je první základní problém vyřešen.

b) Odchylka dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *a* $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Odchylku dvou nenulových vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ určíme opět na základě školské planimetrie. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lze doplnit na trojúhelník vektorem $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$, v němž hledáme jeden vnitřní úhel φ. Ten však snadno vypočteme pomocí kosinové věty:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi\,.$$



Obr. 2: Odchylka dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Druhé mocniny norem rozepíšeme dle vztahu odvozeného výše:

$$(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad + v_1^2 + v_2^2 \quad - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi\,.$$

Druhé mocniny se odečtou:

$$(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2) + (u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2) = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \quad - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi\,,$$

a po vydělení zbylé rovnosti číslem -2

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi$$

vznikne elegantní rovnost[1]

$$\boxed{u_1v_1 + u_2v_2 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\varphi\,.} \tag{2}$$

Vidíme, že na levé straně vznikl výraz $u_1v_1 + u_2v_2$, pomocí něhož lze nalézt odchylku dvou nenulových vektorů. Pokud bychom jej provizorně označili $(\vec{u}, \vec{v})$, tak bychom s jeho pomocí mohli zapsat i řešení předchozího problému – normu vektoru:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}\,.$$

Odchylka dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je tedy takové $\varphi \in [0, \pi]$, pro které platí:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}\sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}}\,.$$

Tuto rovnost pak můžeme při abstraktním budování analytické geometrie použít při definici odchylky dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Z předchozích úvah plyne zásadní poznatek: pomocí výrazu $(\vec{u}, \vec{v})$ lze zapsat *řešení obou základních problémů*: nalezení normy vektoru i odchylky dvou nenulových vektorů. Tento výraz tedy hraje klíčovou roli v celé analytické geometrii v dvourozměrném eukleidovském prostoru. Zcela analogické úvahy bychom mohli provést v n-rozměrném prostoru. Skalární součin by pak měl známý tvar

$$(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n\,.$$

Čtenář obeznámený se základy diferenciální geometrie ploch zde může rozpoznat propedeutiku první základní formy plochy, což je vlastně skalární součin, který je obecně nekonstantní. Zjednodušeně můžeme říci, že první základní forma dané plochy určuje její vnitřní geometrii.

[1] Rovnost (2) lze také snadno ověřit pomocí součtového vzorce pro funkci kosinus. Pokud s osou x svírá vektor $\vec{u}$ úhel α a vektor $\vec{v}$ úhel β, platí pro jejich souřadnice $\vec{u} = (u_1, u_2) = (\|\vec{u}\| \cos\alpha, \|\vec{u}\| \sin\alpha)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2) = (\|\vec{v}\| \cos\beta, \|\vec{v}\| \sin\beta)$. Kosinus odchylky $\varphi = \beta - \alpha$ těchto dvou vektorů je tedy roven: $\cos\varphi = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|}\frac{v_1}{\|\vec{v}\|} + \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}\frac{v_2}{\|\vec{v}\|}$, tj. $\cos\varphi = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

3 Samotný termín „skalární součin“

V předcházející kapitole jsme ukázali, že klíčovou roli v analytické geometrii hraje výraz

$$(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \,.$$

Prozkoumejme tedy nyní jeho vlastnosti. Rozepsáním do souřadnic pozorujeme, že je symetrický:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}) \,.$$

Když zavádíme skalární součin, tak již máme k dispozici operaci součet vektorů. Přirozenou otázkou tedy je, jak se zkoumaný výraz chová, dosadíme-li součet dvou vektorů do jedné z jeho složek:

$$(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \Big((u_1, u_2), (v_1 + w_1, v_2 + w_2)\Big) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2)$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad + \quad u_1 w_1 + u_2 w_2 = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w}) \,.$$

Zkoumaný výraz $(\vec{u}, \vec{v})$ je tedy vzhledem k součtu vektorů distributivní. Chová se tedy jako součin. Vhodné značení, které bude usnadňovat výpočty, je tedy takové, které bude evokovat součin:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \,.$$

Nejedná se však o operaci, výsledkem totiž není vektor, ale číslo, skalár[2]. Proto se $\vec{u} \cdot \vec{v}$ nazývá *skalární součin.*

Například ve středoškolské učebnici [3] je sice na straně 40 odvozena distributivita skalárního součinu, avšak pouze jako pravidlo pro počítání, není dána do souvislosti s volbou samotného termínu „skalární součin“.

Ve vysokoškolské matematice lze motivovat volbu termínu „skalární součin“ také tím, že je možné jej zapsat jako součin matic:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,.$$

Zavedením pojmu však práce nekončí. V případě skalárního součinu je třeba názorně ukázat geometrickou interpretaci a její mocné aplikace, případně některé významné speciální příklady. Těmto problémům se budeme stručně věnovat v následujících kapitolách.

4 Kolmost

1. Kolmost dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ lze pomocí skalárního součinu charakterizovat snadno; stačí ve vztahu (2) zvolit $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Potom $\cos\varphi = 0$, takže[3]

$$\vec{u} \perp \vec{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \,.$$

---

[2] Z latinského *scālae, -ārum, f.* — žebřík, schody.

[3] Vzhledem k tomu, že odchylka vektorů $\varphi \in [0, \pi]$, dostáváme ekvivalenci.

Tento postup je sice krátký a přímočarý, lze však zvolit „geometričtější" přístup, který je naznačen v bodě 2.

2. Charakterizaci kolmosti dvou vektorů znázorníme přímo pomocí podobnosti pravoúhlých trojúhelníků, viz obrázek 3 (první z nich má odvěsny obarveny červeně, druhý modře):

$$\frac{|u_2|}{|u_1|} = \frac{|v_1|}{|v_2|}\,,$$

tj.

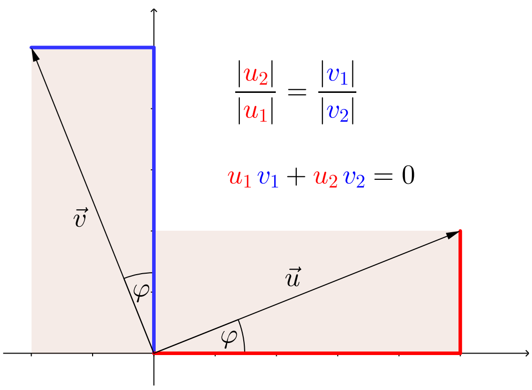
$$|u_1||v_1| = |u_2||v_2|\,.$$

Vzhledem k tomu, že druhý (modrý) trojúhelník je v následujícím kvadrantu, dojde ke změně znaménka u právě jedné ze souřadnic, proto

$$u_1v_1 = -u_2v_2\,,$$

neboli

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0\,.$$



Obr. 3: Znázornění kolmosti dvou vektorů na základě podobnosti trojúhelníků

3. Jiné znázornění charakterizace kolmosti dvou vektorů je založeno na poznatku, že obě úhlopříčky v obdélníku mají stejnou délku. Je-li $\vec{u} \perp \vec{v}$, tak doplněním na rovnoběžník dostáváme obdélník; délky obou jeho úhlopříček se tedy rovnají:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\,\| = \|\vec{u} - \vec{v}\,\|\,.$$

Umocněním na druhou a užitím rovnosti $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w}\cdot\vec{w}$ dostáváme

$$\|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\,,$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\vec{u}\cdot\vec{v}\,,$$

tj. nutně

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0\,.$$

4. Při odvození vztahu pro odchylku dvou vektorů jsme vycházeli z kosinové věty. Pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ tato věta přechází ve větu Pýthagorovu:

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\,.$$

Rozepsáním pravé strany

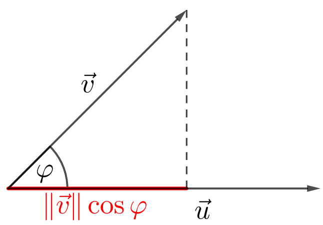
$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

dostáváme

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0\,.$$

5 Geometrická interpretace skalárního součinu

Ze vztahu (2), tj. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\varphi$ ihned plyne geometrická interpretace skalárního součinu. Stačí si uvědomit, že $\|\vec{v}\|\cos\varphi$ je (orientovaná) velikost projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$, viz obrázek 4.



Obr. 4: Projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$

Skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tedy udává orientovanou délku projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$, jež je vynásobena délkou vektoru $\vec{u}$. Toto vynásobení si můžeme představit takto: (orientovanou) projekci zaznačíme na vektor $\vec{u}$ (jako na obr. 4), následně si představíme, že je tento vektor jednotkový a vyrobený z dokonale pružné gumy. Natáhneme-li jej na původní velikost, bude (orientovaná) délka červeného nataženého úseku rovna skalárnímu součinu $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Situace se podstatně zjednoduší, je-li vektor $\vec{u}$, do jehož směru promítáme, jednotkový. Potom lze říci, že skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$ udává přímo orientovanou délku projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$.

Na základě této geometrické interpretace lze snadno nahlédnout některé důležité výsledky analytické geometrie i lineární algebry. Například charakterizace kolmosti je ihned zřejmá: velikost projekce je nulová, tj. $\vec{u}\perp\vec{v} = 0$ právě tehdy, když $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

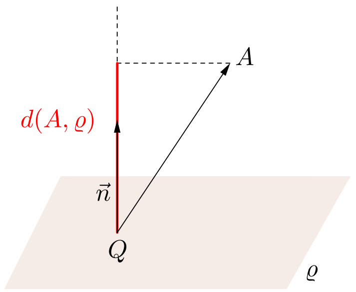
6 Vzdálenost bodu od nadroviny

V této kapitole naznačíme velmi jednoduché odvození vzorce pro vzdálenost bodu od nadroviny. Vyjdeme z geometrické interpretace skalárního součinu. Budeme tak ilustrovat fakt, že důkladně provedené zavedení nového pojmu je dobrým základem pro další látku.

Mějme nadrovinu ϱ (např. přímka v rovině, rovina v trojrozměrném prostoru). Zvolme jeden bod této nadroviny a označme jej Q, normálový vektor této nadroviny označme $\vec{n}$. Potom obecnou rovnici této nadroviny lze psát ve tvaru $\varrho : \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$, kde X je libovolný bod nadroviny ϱ.

Určeme nyní vzdálenost $d(A, \varrho)$ bodu A (který neleží v ϱ) od nadroviny ϱ. Z obrázku 5 je zřejmé, že je rovna absolutní hodnotě délky projekce vektoru $A - Q$ do směru normálového vektoru $\vec{n}$. Vezmeme-li místo vektoru $\vec{n}$ příslušný vektor jednotkový, tj. $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, můžeme tuto délku projekce zapsat pomocí skalárního součinu:

$$d(A, \varrho) = \left| (A - Q) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| .$$



Obr. 5: Vzdálenost bodu A od nadroviny $\varrho : \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$

Drobnou úpravou dostáváme

$$d(A, \varrho) = \frac{|\vec{n} \cdot (A - Q)|}{\|\vec{n}\|} . \tag{3}$$

Porovnáme-li výraz v čitateli zlomku na pravé straně v (3) s obecnou rovnicí nadroviny $\varrho : \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$, vidíme, že je to její levá strana, do níž je dosazen bod A.

Rozepíšeme-li rovnost (3) v souřadnicích, dostaneme:

- v rovině: $A = [a_1, a_2]$, přímka $p : (a, b) \cdot (x - q_1, y - q_2) = 0$, tj. $\vec{n} = (a, b)$, $Q = [q_1, q_2]$, $X = [x, y]$ a $p : ax + by + c = 0$, kde $c = -aq_1 - bq_2$,

$$d(A, p) = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|aa_1 + ba_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} ;$$

- v prostoru: $A = [a_1, a_2, a_3]$, rovina $\varrho : (a, b, c) \cdot (x - q_1, y - q_2, z - q_3) = 0$, tj. $\vec{n} = (a, b, c)$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$, $X = [x, y, z]$ a $\varrho : ax + by + cz + d = 0$, kde $d = -aq_1 - bq_2 - cq_3$,

$$d(A, \varrho) = \frac{|(A - Q) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

7 Závěr

Na pojmu „skalární součin“ jsem se pokusil ukázat, že důkladně provedené motivační úvahy:

- jsou integrální součástí matematického vzdělávání, nejsou tedy pouhou zajímavostí, kterou lze z časových důvodů vynechat,
- nezdržují, naopak, velmi usnadňují další postup v matematice:

  geometrický význam skalárního součinu $\rightarrow$ kolmost $\rightarrow$ obecná rovnice nadroviny $\rightarrow$ vzdálenost bodu od nadroviny,
- usnadňují porozumění celkové stavbě a provázanosti matematiky:

  norma a odchylka $\rightarrow$ skalární součin jako symetrická a pozitivně definitní bilineární forma $\rightarrow$ první základní forma plochy.

Upozornil jsem také na to, že některé základní pojmy nemusejí být dostatečně srozumitelné ani těm absolventům středních škol, kteří si vybrali za jeden ze svých oborů studia učitelství matematiky. Abstrakce, s níž se pak setkávají při svém vysokoškolském studiu, pak nemá dostatečnou oporu v názorných a konkrétních úvahách, které by měly každé abstrakci předcházet.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*, 3. vyd., Matfyzpress, Praha, 2010.

[2] J. Bečvář, V. Dlab, *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, SERIFA, Praha, 2016.

[3] M. Kočandrle, L. Boček, *Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie*, 2. vyd., Prometheus, Praha, 2005.

[4] J. Kolouchová, J. Řepová, V. Šobr, *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 5. část*, SPN, Praha, 1986.

[5] M. Sekanina, L. Boček, M. Kočandrle, J. Šedivý, *Geometrie I*, SPN, Praha, 1986.

Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`halas@karlin.mff.cuni.cz`