Hledání vektoru kolmého na zadané vektory

- $\mathbb{R}^2$, zadán $\vec{u} = (u_1, u_2)$ najděme $\vec{w} = (w_1, w_2)$; $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$[\vec{u}]^{\perp} = ?$

$= [\vec{w}]$

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 = 0$$

např.: $w_1 \to -u_2$, $w_2 \to u_1$

$$\vec{w} = \underline{\underline{(-u_2, u_1)}} \perp \vec{u}$$

- v $\mathbb{R}^3$: zadány LNZ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ najděme $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$; $\vec{u} \perp \vec{w}$ a $\vec{v} \perp \vec{w}$

$[\vec{u}, \vec{v}]^{\perp} = ?$

$= [\vec{w}]$

tj. $\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{a} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0}$

vzhl. ke kartézské soust. s.

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0$$
$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{array}\right) \quad \text{řešme soustavu:}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot v_1 \\ \cdot u_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ v_1 u_1 & v_2 u_1 & v_3 u_1 \end{pmatrix} \underset{2\check{r}. - 1\check{r}.}{\sim} \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ 0 & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_3 = 0$$

např.: $w_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}$, $w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

dopočítejme w_1:

z 1. rovnice:

$$u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2 + u_3 \cdot w_3 = 0$$

$$u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot (-u_1 v_3 + u_3 v_1) + u_3 \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$

$$u_1 \cdot w_1 - u_1 u_2 v_3 + \cancel{u_2 u_3 v_1} + u_1 u_3 v_2 - \cancel{u_2 u_3 v_1} = 0$$

$$u_1 \cdot (w_1 - u_2 v_3 + u_3 v_2) = 0$$

tj.:

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3$$

až na nenulový násobek

pomůcka pro zapamatování:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

vypadá to jako rozvoj determinantu:

formálně tedy pišme:
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \vec{w}$$

- co jsme získali? bin. operaci na $\mathbb{R}^3$: 2 vektorům $\vec{u}, \vec{v}$ přiřadí $\vec{w}$

Jak se tato operace chová vůči jiným operacím v $\mathbb{R}^3$?

z def. vektorového prostoru známe jedinou: $\underline{\underline{\vec{a}+\vec{b}}}$

(1)

Najděme $\vec{w}$ k vektorům $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{w} = \left\|\begin{matrix} \vec{a}+\vec{b} \\ \vec{c} \\ \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \end{matrix}\right\| = \left|\begin{matrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & e_3 \end{matrix}\right|$$

vůči sčítání vektorů se chová distributivně

$\Downarrow$

naz. součin

ozn. $\times$ (• už je obsazena pro skal. součin)

(2) Je tento součin komutativní?

$$\left\|\begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \end{matrix}\right\| = - \left\|\begin{matrix} \vec{v} \\ \vec{u} \\ \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \text{není kom.}$$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ ... vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (v tomto pořadí)

Vektorový součin II

při hledání vektoru $\vec{w}$ kolmého na 2 LNZ vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v R^3 jsme dospěli k:

$$\vec{w} = \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{w_1} \vec{e}_1 \underbrace{- \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{w_2} \vec{e}_2 + \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{w_3} \vec{e}_3 ,$$

což jsme formálně zapsali ve tvaru $\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$, kde $(u_1, u_2, u_3) = \langle \vec{u} \rangle_B$

$(v_1, v_2, v_3) = \langle \vec{v} \rangle_B$

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ je kladná ONB

tento tvar má výhody i nevýhody:

- výhoda: pěkný, snadno zapamatovatelný tvar, zkrátka jeden determinant s přehlednou strukturou

- nevýhoda: det je pouze <u>formálně</u> sestaven, mísí se v něm reálná čísla a vektory, což není správné: det. je definován nad okruhem (tj. jeho prvky mají být z jediného okruhu)

<u>Idea:</u> zachovejme výhodu, odstraňme nevýhodu

tj. zapišme vektorový součin matematicky čistě

Jak na to? Musíme odstranit vektory $\vec{e}_i$ a „udělat z nich skaláry", ale tak, abychom nic podstatného neporušili.

tip: skalární součin ...

vezměme lib. $\vec{x} \in R^3$ $\langle \vec{x} \rangle_B = (x_1, x_2, x_3)$

tj. $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_1 = x_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{1} + x_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0} + x_3 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}_{0} = x_1$$

$\vec{x} \cdot \vec{e}_2 = x_2$ B je ONB, tj. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\vec{x} \cdot \vec{e}_3 = x_3$

$$\text{tj.} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3$$

neboli $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in R^3$

<u>V/</u> $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3 \; \exists! \, \vec{w} \in V_3 ; \quad \forall \vec{x} \in V_3 : [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x}$

- <u>def.</u> tento vektor $\vec{w}$ naz. <u>vektorový součin</u> vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, píšeme: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

- důkaz: zvolme ve V_3 kladnou ortonormální bázi B, vzhledem k ní: $\langle \vec{u} \rangle_B = (u_1, u_2, u_3)$

$\langle \vec{v} \rangle_B = (v_1, v_2, v_3)$

$\langle \vec{x} \rangle_B = (x_1, x_2, x_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{w_1} - x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{-w_2} + x_3 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{w_3}$$

ozn.:

Při tomto značení je $= x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = \vec{x} \cdot \vec{w} \implies$ našli jsme jediné $\vec{w}$ vyhovující podmínce $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x} \; \forall x \in V_3$

souřadnice tohoto jediného $\vec{w}$ jsou $\langle \vec{w} \rangle_B = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$

našli jsme jediné souřadnice vektoru $\vec{w}$ vyhovující podm. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x} \quad \forall x \in V_3$,

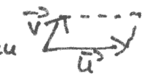
$\exists$ tedy jediný takový vektor $\vec{w}$

- výhoda: definici vektorového součinu lze snadno rozšířit do V_n na základě této věty:

<u>V/</u> $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1} \in V_n \quad \exists! \, \vec{w} \in V_n; \quad \forall \vec{x} \in V_n: \; [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x}$

píšeme: $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \dots \times \vec{v}_{n-1}$ pozor: už to <u>není binární</u> operace

---

- Na SŠ se vektorový součin definuje jako vektor
  - kolmý na $\vec{u}, \vec{v}$ (LNZ)
  - jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníku 
  - orientace: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ tvoří <u>kladnou</u> bázi

    tj. souhlasnou s bází kartézskou

ověřme, že námi def. vekt. součin tyto podmínky splňuje:

- $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ LNZ $\Rightarrow$ $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$, protože:

  z def.: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{x} \quad \forall x \in V_3$

  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0$

  v det. jsou LZ řádky

  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0$

- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = S_{\square}$

  zvolme ve V_3 kladnou ONB tak, aby: $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

  rovina $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ byla totožná s rovinou $[\vec{u}, \vec{v}]$

  $\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{a}_3$

  důk.: $\vec{u} = u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2$, $\vec{v} = v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ zde nefiguruje, $\vec{u}$; $\vec{v}$ leží v rovině $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$

  $u_3, v_3 = 0$

  B je kladná ONB $\Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

  $$\langle \vec{u} \times \vec{v} \rangle_B = \left(\begin{vmatrix} u_2 & 0 \\ v_2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ v_1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

  tj. $\vec{u} \times \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{a}_3$

  $$\underline{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \| [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{a}_3 \| = |\underbrace{[\vec{u}, \vec{v}]}| \cdot \underbrace{\|\vec{a}_3\|}_{1 \text{ (ONB)}} = |[\vec{u}, \vec{v}]| = \underline{S_{\square}}$$

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}$ tvoří $\underbrace{\text{kladnou bázi}}_{\text{tj. bázi souhlasnou s kartézskou bází}}$: (pro $\vec{u}, \vec{v}$ LNZ)

matice přechodu od báze $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\}$ k bázi kartézské: $\left(\begin{array}{c|c|c} \vec{u} & \vec{v} & \vec{u}\times\vec{v} \end{array}\right)$

její determinant $= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}]$

$= (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) =$ (za $\vec{x}$ dosazeno $\vec{u}\times\vec{v}$)

$= \|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 > 0$

det matice přechodu od báze $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\}$ k bázi kartézské je > 0,

tyto báze jsou tedy souhlasné

Vlastnosti vektorového součinu:

(plynou přímo z vlastností determinantu)

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}' \in V_3$: $\qquad \forall \vec{x} \in V_3$:

- $\vec{u}\times\vec{V} = -(\vec{V}\times\vec{u})$ $\qquad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = [\vec{v}, \vec{u}, \vec{x}]$

- $(c\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(c\vec{v}) = c\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ $\qquad \begin{vmatrix} c\cdot\vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = c\cdot\begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u} \\ c\cdot\vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix}$

- $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{o} \iff \vec{u}, \vec{v}$ LZ $\qquad \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = 0 \;\; \forall \vec{x} \in V_3 \iff \vec{u}, \vec{v}$ LZ

- $(\vec{u}+\vec{u}')\times\vec{v} = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}'\times\vec{v}$ $\qquad \begin{vmatrix} \vec{u}+\vec{u}' \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{u}' \\ \vec{v} \\ \vec{x} \end{vmatrix}$

- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{v}') = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v}'$

- $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V_3$:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

důk.: přímým výpočtem

pro usnadnění volíme kladnou ONB takovou,

že $\vec{a} = (\alpha, 0, 0)$

$\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, 0)$