Vzdálenost podprostorů

def. $\beta = [B; U]$, $\gamma = [C; W]$ podprostory E_n $\Rightarrow$ vzdálenost podprostorů β, γ — $d(\beta, \gamma) :=$

$$d(\beta,\gamma) := \inf\{\|XY\|;\ X\in\beta,\ Y\in\gamma\}$$

- $\beta = \{B\}$, $\gamma = \{C\}$ místo $d(\{B\},\{C\})$ píšeme $d(B,C)$
- mají-li β, γ spol. bod $\Rightarrow d(\beta,\gamma) = 0$, stačí zvolit lib. bod z průniku: $X = Y \in \beta\cap\gamma$
- $\exists$ min? (inf. určitě, zdola omez. 0)

  (Je jediné? – když už je to min., tak samozřejmě; i když nemusí být nabýváno pro jedinou dvojici bodů.) viz např. rovnoběžky

  A jak to minimum nalézt?

V/ $d(\beta,\gamma) =$ velikost komponenty vektoru $B-C$ vzhledem k $U+W$ $= \|\vec{z}\|$

důk. tj. $\underbrace{B-C}_{\in E_n} = \underbrace{\vec{y}}_{\in U+W} + \underbrace{\vec{z}}_{\in (U+W)^\perp}$

$$(U+W) \oplus (U+W)^\perp = E_n$$

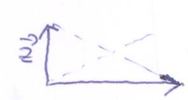
$\oplus$ … direktní součet $\Leftarrow$ vektor z E_n lze napsat jediným způsobem jako součet vektorů z $U+W$ a $(U+W)^\perp$

a) Je to min?
b) Jak nalézt $\vec{z}$?

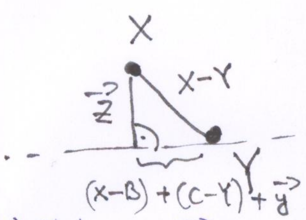
a) že je to minimum: **L/** $X\in\beta$, $Y\in\gamma \Rightarrow \|X-Y\| \geq \|\vec{z}\|$

důk. z Pyth. věty

$$X-Y = \underbrace{(X-B)}_{\in U} + \underbrace{(B-C)}_{\vec{y}+\vec{z}} + \underbrace{(C-Y)}_{\in W} = \underbrace{(X-B)+(C-Y)}_{\in U+W} + \underbrace{\vec{y}}_{\in U+W} + \underbrace{\vec{z}}_{\in (U+W)^\perp}$$



$\Rightarrow \vec{z} \perp (X-B+C-Y+\vec{y})$



$$\|X-Y\|^2 \overset{\text{z Pyth.}}{=} \underbrace{\|(X-B)+(C-Y)+\vec{y}\|^2}_{\geq 0} + \|\vec{z}\|^2 \underset{\text{Pythag.}}{\geq} \|\vec{z}\|^2 \Rightarrow \|X-Y\| \geq \|\vec{z}\|$$

b) Nalezněme $\|\vec{z}\|$; tj. najdeme body X_0, Y_0, pro něž je min. nabýváno: **L/** $\exists X_0\in\beta\ \exists Y_0\in\gamma;\ \|\vec{z}\| = \|X_0 - Y_0\|$

důk. chceme, aby

$$\underbrace{(X_0-B)}_{\in U} + \underbrace{(C-Y_0)}_{\in W} + \underbrace{\vec{y}}_{\in U+W} = \vec{o} \Rightarrow \vec{y} = \underset{\in U}{\vec{u}} + \underset{\in W}{\vec{w}}$$

$$(X_0-B) + (C-Y_0) + \vec{u} + \vec{w} = \vec{o}$$

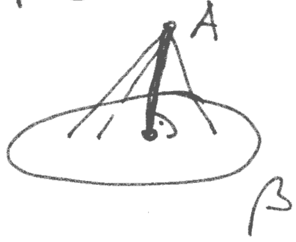
$$\downarrow$$

$$\underbrace{(X_0-B)+\vec{u}}_{\in U} = \underbrace{(Y_0-C)-\vec{w}}_{\in W}$$

vezmeme-li přímo $\underset{\in\beta}{X_0 = B-\vec{u}}$, $\underset{\in\gamma}{Y_0 = C+\vec{w}}$ $\Rightarrow \|X_0-Y_0\|^2 = \|\vec{o}\|^2 + \|\vec{z}\|^2$, tj. $\|X_0-Y_0\| = \|\vec{z}\|$ $\square$

Hledejme minimum pomocí derivací, najdeme tak např. vzdálenost bodu od podpr.:

$$d(A,\beta) := \min \{ |AX| , X \in \beta \}$$



např. (pro jednoduchost):

ve 3D: vzdálenost bodu od roviny:

$$\beta: \quad X = B + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 \quad , t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$B = [b_1, b_2, b_3]$

$A = [a_1, a_2, a_3]$

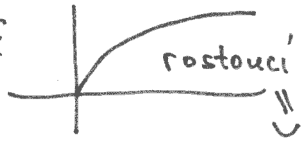
$\vec{v}_1 = [v_{11}, v_{12}, v_{13}]$

$\vec{v}_2 = [v_{21}, v_{22}, v_{23}]$

$$\min_{X \in \beta} \| X - A \| = \min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \| B + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 - A \| =$$

$$= \min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \sqrt{(b_1 - a_1 + t_1 v_{11} + t_2 v_{21})^2 + (b_2 - a_2 + t_1 v_{12} + t_2 v_{22})^2 + (b_3 - a_3 + t_1 v_{13} + t_2 v_{23})^2}$$

$y = \sqrt{x}$



$\Downarrow$

na min „nemá vliv"

tj. $$\min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \sqrt{\sum ()^2} = \sqrt{\min_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \sum ()^2}$$

tj.: hledáme t_1, t_2, pro něž je min nabýváno;

derivace podle $t_1 = 0$ (a t_2 beru jako konst.)

der. $\sum ()^2$ podle $t_2 = 0$ (t_1 beru jako konst.)

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i})^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i})^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} 2 \cdot (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i}) \cdot v_{1i} = 0 \qquad :2$$

$$\sum_{i=1}^{3} 2 \cdot (b_i - a_i + t_1 v_{1i} + t_2 v_{2i}) \cdot v_{2i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[(b_i-a_i)\cdot v_{1i} + t_1\cdot v_{1i}\cdot v_{1i} + t_2\, v_{2i}\cdot v_{1i}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left[(b_i-a_i)\, v_{2i} + t_1\, v_{1i}\, v_{2i} + t_2\, v_{2i}\cdot v_{2i}\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}(b_i-a_i)\cdot v_{1i} + t_1\sum_{i=1}^{3} v_{1i}\, v_{1i} + t_2\cdot\sum_{i=1}^{3} v_{2i}\cdot v_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3}(b_i-a_i)\, v_{2i} + t_1\sum_{i=1}^{3} v_{1i}\, v_{2i} + t_2\sum_{i=1}^{3} v_{2i}\, v_{2i} = 0$$

$$(B-A)\cdot\vec{v}_1 + t_1\cdot\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 + t_2\,\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$$

$$(B-A)\cdot\vec{v}_2 + t_1\,\vec{v}_1\vec{v}_2 + t_2\,\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 = 0$$

---

hledáme t_1, t_2

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\cdot t_1 + \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\; t_2 = (A-B)\cdot\vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\; t_1 + \vec{v}_2\vec{v}_2\; t_2 = (A-B)\cdot\vec{v}_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & (A-B)\cdot\vec{v}_1 \\ \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 & (A-B)\cdot\vec{v}_2 \end{array}\right)$$

Cramer: $t_1 = \dfrac{G_1}{G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$

$$t_2 = \frac{G_2}{G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$$

$$\boxed{d(A, \beta) = \sqrt{\frac{G(\vec{v}_1, \vec{v}_2, B-A)}{G(\vec{v}_1\, \vec{v}_2)}}}$$

vidíme vznik Gramových determinantů

(pro získání známého vzorce by bylo třeba to dopočítat:)

$$d(A, \beta) = \min_{X\in\beta}\|X-A\| = \|B-A + \underbrace{t_1}_{\text{dosadíme vypočtené}}\vec{v}_1 + \underbrace{t_2}_{\text{hodnoty}}\vec{v}_2\| = \underline{\underline{\left\| B-A + \frac{G_1}{G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}\cdot\vec{v}_2\right\| = \ldots}}$$

Pro zajímavost dopočítáno:

$$d(A,\beta) = \min_{X\in\beta} \|X-A\| = \Big\| \underbrace{B-A+\frac{G_1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\,\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\cdot\vec{v}_2}_{} \Big\|$$

uvědomme si, že vektor $\underbrace{\text{je kolmý na } \beta}_{}$ (bod $B+\frac{G_1}{G}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G}\vec{v}_2$ má od A nejmenší vzdálenost, leží tedy na kolmici k β procházející bodem A)

vektor kolmý na β
je kolmý na každý vektor zaměření β,
tj. je kolmý na: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i na lib. jejich lin. kombinaci $t_1\vec{v}_1+t_2\vec{v}_2$

takže: (ozn.: $G = G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$)

$$\Big\| B-A+\frac{G_1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\,\vec{v}_1 + \frac{G_2}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\,\vec{v}_2 \Big\|^2 = \left[(B-A)+\left(\frac{G_1}{G}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G}\vec{v}_2\right)\right]\cdot\left[B-A+\frac{G_1}{G}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G}v_2\right]$$

$$= (B-A)\cdot\left[B-A+\frac{G_1}{G}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G}\vec{v}_2\right] + \underbrace{\left(\frac{G_1}{G}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G}\vec{v}_2\right)\cdot\left[B-A+\frac{G_1}{G}\vec{v}_1+\frac{G_2}{G}\vec{v}_2\right]}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{G}\cdot\Big((B-A)\cdot\left[(B-A)G + G_1\vec{v}_1 + G_2\vec{v}_2\right]\Big) =$$

$$= \frac{1}{G}\cdot\Big((B-A)\cdot(B-A)\cdot G + (B-A)\cdot\vec{v}_1\cdot G_1 + (B-A)\cdot\vec{v}_2\cdot G_2\Big) =$$

$$= \frac{1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\cdot\left((B-A)(B-A)\cdot\begin{vmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 \\ v_2v_1 & v_2v_2\end{vmatrix} + (B-A)\cdot\vec{v}_1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} (A-B)\,v_1 & v_1v_2 \\ (A-B)\,v_2 & v_2v_2\end{vmatrix}}_{} + (B-A)\,\vec{v}_2\underbrace{\begin{vmatrix} v_1v_1 & (A-B)\,v_1 \\ v_1v_2 & (A-B)\,v_2\end{vmatrix}}_{}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} (B-A)\,v_1 & v_1v_2 \\ (B-A)\,v_2 & v_2v_2\end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} v_1v_2 & (B-A)\,v_1 \\ v_2v_2 & (B-A)\,v_2\end{vmatrix}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} v_1v_1 & (B-A)v_1 \\ v_1v_2 & (B-A)v_2\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}\cdot\begin{vmatrix} v_1v_1 & v_1v_2 & v_1(B-A) \\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2(B-A) \\ (B-A)\,v_1 & v_2(B-A) & (B-A)(B-A)\end{vmatrix} = \frac{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2,B-A)}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)} = \|\cdot\|^2$$

$\Downarrow$

$$\boxed{d(A,\beta) = \min_{X\in\beta}\|X-A\| = \sqrt{\frac{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2,B-A)}{G(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}}}$$