DR. FRANTIŠEK BALADA

Z DĚJIN ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKY

PRAHA

1959

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

ZPRACOVAL

DR. FRANTIŠEK BALADA

RECENZOVALI

PROF. DR. KAREL KOUTSKÝ

A LUBOŠ NOVÝ

Schváleno výnosem ministerstva školství a kultury ze dne 25. listopadu 1958, č. 51 199/58 — I/1, v prvním vydání jako pomocná kniha pro školy všeobecně vzdělávací

PŘEDMLUVA

Úkolem této knihy je odpovědět na některé otázky, které si položí učitel a snad i zvídavý žák při výkladu školní látky z matematiky a které se týkají vzniku matematických pojmů, symbolů, početních výkonů a rozmanitých jiných problémů souvisících s vývojem matematické vědy.

Dějiny elementární matematiky obsahují velké množství zajímavých skutečností. Zachycují objevy a děje z dob nejstarších až po dnešní časy, kdy jsme svědky renesance matematiky elementární. Mnohé oddíly této vědy se stávají předmětem objevných úvah vynikajících matematiků, viděných z hledisek zcela nových a s výsledky překvapujícími.

Bylo proto žádoucí učinit určitý výběr z této rozsáhlé látky. Věnoval jsem především pozornost těm odvětvím, která lze stručně nazvat školskou matematikou. Odtud vyplynulo také rozdělení knihy do jednotlivých článků. Neličil jsem životní osudy matematiků, ač je to téma velmi poutavé.

Jsem si vědom toho, že zájem o historii určitého oboru roste se znalostí jednotlivých podrobností historického vývoje událostí. Proto jsem byl obšírnější tam, kde — jak se domnívám — mohla by dát látka podnět k samostatné práci žáků (symbolika čísel, různé uspořádání algoritmů početních výkonů, některé způsoby záznamu algebraických výpočtů, úlohy řešené ve starých učebnicích apod.).

V některých částech knihy jsem úmyslně zachoval epickou šíři starých spisů. Postupoval jsem tak proto, aby si čtenář uvědomil těžkosti, s nimiž byla matematika budována, a současně aby byl zdůrazněn celkový kolorit určité doby. Úplné dokreslení těchto skutečností by si však vyžádalo neúnosného překročení rozsahu publikace.

Toto dílo vzniklo z „Historických poznámek", které byly součástí metodických průvodců k učebnicím všeobecně vzdělávacích škol od r. 1954. Velkým přínosem pro mne byla jednání autorských kolektivů těchto učebnic, zejména diskuse, konané v době soustředění kolektivů v Hamru na Jezeře a v Podhradí u Ledče nad Sázavou. Zvlášť plodné byly debaty se soudruhem Zelinkou, soudruhy docenty dr. Hrušou, Vyšínem, Holubářem a prof. dr. Metelkou.

Spoluautorem někdejších „Historických poznámek" byl prof. dr. Koutský. Jemu děkuji za účast na této práci i za cenné rady, které věci hodně pomáhaly.

Velikými díky jsem zavázán svému synovi inž. Iljovi Baladovi, který mi velmi účinně přispěl při pořizování překladů ze sovětské literatury. Současně mi i pomohl s opatřováním mnohých sovětských pramenů.

Mapky míst významných pro vývoj matematiky ve starověku a ve středověku pečlivě překreslila a umělecky doplnila soudružka Jarka Sitařová.

Zlepšení rukopisu podstatně přispěly také četné připomínky obou recenzentů i pečlivé poznámky odborného redaktora Jaromíra Dubského. Je mojí milou povinností vyslovit jim srdečné díky.

DR. FRANTIŠEK BALADA

MÍSTA VÝZNAMNÁ PRO VÝVOJ MATEMATIKY VE STAROVĚKU

1. Řím: *Agrimensoři, Vitruvius*
2. Syrakusy: *Archimédes*
3. Elea: *Zenon*
4. Tarent: *Pythagoras*
5. Kyrene: *Eratosthénes*
6. Athény: *Platón, Ptolemaios*
7. Stageira: *Aristoteles*
8. Chios: *Hippokrates*
9. Samos: *Pythagoras*
10. Knidos: *Eudoxos*
11. Milet: *Thales*
12. Nicaia: *Hipparchos*
13. Perge: *Apollónios*
14. Alexandrie: *Euklides, Eratosthénes, Apollónios, Heron, Ptolemaios, Diofantos, Pappos*
15. Kroton: *Pythagoras*

MÍSTA VÝZNAMNÁ PRO VÝVOJ MATEMATIKY VE STŘEDOVĚKU

1. Ujjain: *Bráhmagupta, Bhaskara*
2. Patna: *Aryabhata*
3. Bagdád: *Středisko východoarabské kultury*
4. Cordoba: *Středisko západoarabské kultury*
5. Toledo: *Arabská překladatelská škola*
6. Bugia: *Leonardo Pisánský*
7. Pisa: *Leonardo Pisánský*
8. Konstantinopol: *Středisko byzantské kultury*
9. Alexandrie
10. Chorezme: *Al Chovarizmi*

I.

VÝVOJ MATEMATIKY

1. ÚVOD

Matematika byla donedávna obvykle pokládána za vědu o veličinách. Tak např. německý matematik a filosof *G. W. Leibniz* říká: „Obecná matematika je věda o velikosti v obecnosti, nebo-li o způsobu odhadování a tím určování hranic, do nichž něco spadá." I když se snad na prvý pohled zdá toto vymezení matematiky správné, poznáme po krátké úvaze, že lze tuto větu považovat za velmi nepřesný a neúplný popis podstaty a obsahu matematiky. Obtíž spočívá především v tom, že pojem veličiny není obecně stanoven a může být definován teprve prostředky matematickými. Kromě toho však řadíme do matematiky mnohé disciplíny, pojednávající o pojmech, které ani zdaleka nelze zahrnout pod představu nauky o veličinách. Připomeňme si např. teorii komplexních čísel nebo projektivní geometrii.

Dnes považujeme za nejvhodnější definici *Engelsovu*, která výstižně charakterizuje obsah i původ matematiky těmito slovy.

„Předmětem čisté matematiky jsou prostorové formy a kvantitativní vztahy skutečného světa, tedy velmi reální látka. Skutečnost, že se tato látka jeví v nejvýše abstraktní formě může pouze povrchně zastřít její původ z vnějšího světa. Abychom mohli tyto formy a vztahy zkoumat v jejich ryzosti, musíme je úplně oddělit od obsahu a ten jako lhostejný ponechat stranou; tak dostaneme body bez rozměrů, čáry bez tloušťky a šířky, různá „a" a „b", „x" a „y", stálé a proměnné veličiny . . . Právě jako všechny ostatní vědy

vznikla i matematika z praktických potřeb lidí, jako z měření ploch pozemků a objemů nádob, z počítání času a z mechaniky." (B. Engels, Anti-Dühring, české vydání 1949, str. 27).

Těmito slovy Engels zachytil stav matematického vědění ve všech údobích jeho vývoje. Obsahovou náplň Engelsovy definice je ovšem nutno pro různé doby vykládat různě, přiměřeně rozsahu matematických znalostí té či oné doby. Nicméně forma Engelsovy definice matematiky zůstává stále táž, i když se matematická věda čím dále tím rychleji všestranně rozvíjí.

Slavný sovětský matematik, akademik *A. N. Kolmogorov*, rozdělil na podkladě zvyšujících se reálných výsledků dějiny matematiky do tří hlavních vývojových období.

V prvém období, které trvalo od nejstarších dob až do XVII. století n. l., se tvořil a vyvíjel pojem čísla, pojem veličiny i pojem geometrického útvaru. Tyto pojmy byly chápány vesměs jako neproměnné a předem dané.

V druhém období, které zahrnuje XVII. a XVIII. století, se matematika stává vědou o změnách veličin a geometrických útvarů. Rozhodujícím se stává přiřadění prvků dvou nebo více množin. Do popředí vystupuje pojem funkce a pojem geometrických transformací. V pracích tohoto období studují matematikové závislost prvků jedné či více množin na prvcích téže nebo jiných množin.

V třetím období (XIX. a XX. století) matematika zkoumá kvantitativní vztahy a prostorové formy skutečného světa v celé jejich obecnosti. Čísla, veličiny, geometrické útvary a jejich transformace (přeměny) se stávají toliko zvláštními případy oněch nejobecnějších kvantitativních vztahů a prostorových forem, jakým jsou např. pojem grupy nebo pojem topologického prostoru, jehož „body" mohou být zcela libovolné prvky nějaké množiny. Typickým znakem tohoto období je, že se matematika rozvětvila v řadu disciplín, které se zabývají jak nejteoretičtějšími otázkami, tak i řešením konkrétních úkolů techniky a praxe.

2. PRVNÍ VÝVOJOVÉ OBDOBÍ: MATEMATIKA JAKO NAUKA O ČÍSLECH, VELIČINÁCH A GEOMETRICKÝCH ÚTVARECH

Větší část matematiky, která se rozvíjela v prvním vývojovém období, je v podstatě, ačkoli ne zcela přesně, shrnována pod jménem „matematika elementární".

Prvé období ve vývoji matematiky trvalo od vzniku prvotních matematických představ až do počátku XVII. století. Během tohoto období lidé vytvořili pojem přirozeného a racionálního čísla i poznali existenci některých iracionálních čísel. Vytvořili různé způsoby zapisování čísel a vybudovali vhodné algoritmy pro počítání s nimi. Stanovili dále pojmy a vlastnosti jednoduchých geometrických útvarů, jako jsou mnohoúhelníky, kruh, mnohostěn, válec, kužel, koule a některé další křivky a plochy. Podněty, které působily na vývoj matematiky v tomto období a úkoly, které matematika řešila, vznikaly z bezprostředních praktických potřeb člověka v jeho zápasu s přírodou, především z jeho společenské činnosti. Velmi záhy položila matematice významné úkoly astronomie. Jejich řešení pak dalo vznik trigonometrii, zvláště trigonometrii útvarů na kouli, čili trigonometrii sférické.

Na počátku tohoto období byl pojem přirozeného čísla vypracován jako charakteristika toho, co je společné všem ekvivalentním konečným množinám. Současně vznikaly nejzákladnější geometrické představy. Další abstrakcí vznikly nové pojmy matematické, jako některé početní výkony, některé zlomky, délka úsečky, obsah, objem apod.

První dochované početní záznamy jsou babylónské hliněné destičky a egyptské papyrusy. Ty shrnují jednotlivé poznatky aritmetického, geometrického a algebraického charakteru i řadu početních pravidel, ale podávají tato pravidla bez důkazů. Neexistovala žádná obecná teorie, z níž by se tyto poznatky daly odvodit. Některá pravidla nejsou dokonce ani správná.

Z těchto počátečních vědomostí vytvořili Řekové matematiku jako vědecký systém. Vycházejíce z praktických poznatků egypt-

ských a babylónských, zkoumali zprvu matematické otázky na zvláštních případech, jednotlivě a odděleně, a záhy uvedli tyto problémy do souvislosti s úvahami filosofickými a vytvořili z matematiky a zejména z geometrie poměrně dokonalý logický systém. *Thales z Miletu* (asi 624—548 před n. l.) se uvádí jako prvý, kdo prováděl samostatné geometrické úvahy.

V VI. a V. století před n. l. zakládá filosof *Pythagoras* (asi 570 až 500 před n. l.) z ostrova Samu celou školu, které jsou přisuzovány velké zásluhy o rozvoj některých matematických disciplín. Pythagorovci se zabývali zejména naukou o číslech a některými číselnými posloupnostmi a dále naukou o úměrách. V geometrii je pythagorovcům připisována zásluha zejména o větu Pythagorovu.

Pro další vývoj starořecké matematiky a filosofie jsou zvláště důležité poznatky pythagorovců o úsečkách nesouměřitelných. Pythagorovci se též zabývali naukou o zlatém řezu, tj. úlohou rozdělit úsečku na dvě části tak, aby větší část úsečky byla střední měřickou úměrnou celé úsečky a zbývající menší části. Tato úloha vede k rovnici $x^2 = a(a - x)$. Pythagorovci poznali význam zlatého řezu pro konstrukci pravidelného pětiúhelníka a pravidelného pětiúhelníka hvězdicového. Pravidelný pětiúhelník hvězdicový, pokládaný za symbol zdraví, byl poznávacím znamením pythagorovců. Dále doplnili řecké znalosti pravidelných těles objevem pravidelného dvanáctistěnu. Tento objev byl jejich následovníky nejvíce ceněn.

Pythagorovci měli nesporný vliv na vývoj matematiky jako vědy o číslech, veličinách a geometrických útvarech. V pythagorejské nauce o čísle lze spatřovat prvý uvědomělý pokus o přístup k zachycení kvantitativních vztahů hmoty a přírodních jevů. Přesto však matematika byla pythagorovcům součástí náboženství. Byla přípravou k povznesení duše na její cestě k splynutí s bohy. Bůh uspořádal svět podle čísel a číslo je základem všeho, učili pythagorovci. Bůh je jednotka, svět je množství. Ve světě je deset základních protikladů, na kterých svět spočívá: mez a neomezené, liché a sudé, jediné a mnohé, pravé a levé, mužské a ženské, klidné a pohyblivé, rovné a křivé, světlo a tma, dobré a špatné, čtyřúhelníkové a různostranné. Harmonie sjednocuje protiklady v „Kosmos", je božská.

Tvoří ji poměry čísel. Poznáním číselné harmonie dospívá člověk k božství a nesmrtelnosti.

Aristoteles v Metafysice říká: „Pythagorovci se zabývali vědami matematickými a první v nich značně pokročili; poněvadž jimi byli vychováni, začali pokládat jejich principy za principy všech věcí. V oboru těchto věd však zaujímají čísla přirozená první místo, a proto u čísel spatřovali, jak se zdá, mnoho podobných rysů s tím, co existuje a vzniká. Například určitá vlastnost čísel je spravedlnost, jiná je duše a rozum a jiná úspěch. Možno říci, že ve všech ostatních případech je tomu stejně. Kromě toho viděli pythagorovci v číslech vlastnosti a vztahy harmonických spojení. Protože tedy všechno ostatní ukazovalo celou svou podstatou podobnost s čísly a čísla jsou v celé přírodě první, pokládali prvky čísel za prvky všech věcí a celý vesmír považovali za harmonii a číslo."

Není zapotřebí poznamenávat, že byl tento světový názor naprosto idealistický a způsobil odtržení pythagorejské matematiky od objektivní zkušenosti. Měl za následek, že se pythagorovci dostali na cestu neplodných spekulací.

Velký vliv na další rozvoj matematiky měl *Sokratův* žák, athénský filosof *Platón* (427—347? př. n. l.). Platón byl vynikajícím stoupencem reakční athénské aristokracie a nesmiřitelným protivníkem materialistického atomisty, svého staršího současníka *Demokrita* (460?—370? př. n. l.). Zásluhou Platóna a jeho školy je vypracování přesného způsobu matematického myšlení. Byly zavedeny definice i názvy geometrických útvarů a vypracován systematický postup pro řešení konstruktivních úloh. Platón je jedním z prvých, kteří počali používat nepřímého důkazu.

Cestou k poznání pravdy je Platónovi dialektika.

O cílech a hodnotě matematiky mluví Platón zejména při popisu plánu výchovy mládeže ve spise „O státě". Platón rozlišuje matematiku čistou a užitou. Jiná je aritmetika obecného lidu, jiná aritmetika filosofů. U obecného lidu se počítají nestejné jednotky: dva tábory, dva voli, dvě věci nejmenší nebo zase největší. Při myriádě jednotek se jedna od druhé neliší. Jinak počítají a měří stavitelé nebo obchodníci, jiné jsou počty a měřictví ve filosofii. Jak

v aritmetice, tak v geometrii je jedno umění čistší a druhé méně čisté.

Matematika má velký vzdělávací význam, protože bystří rozum pro všechny jiné nauky a je mimořádně pracná a obtížná při učení i cvičení.

Podle Platóna povznáší nauka o čísle duši vzhůru, nutí ji uvažovat o číslech samých, bez ohledu na jejich smyslové projevy a bez ohledu na jejich užitečnost v praktickém životě, jako je tomu například při kupování a prodávání.

Na druhém místě přikládá Platón význam rovinné geometrii (planimetrii). Jejím pravým účelem je odvracení mysli od světa vznikání a zanikání k věčnému jsoucnu. Geometrie je i prostředkem k lepšímu pochopení všech ostatních věd.

Třetí místo vyhrazuje Platón stereometrii (prostorové geometrii). Tento obor však není ještě správně vědecky vybudován, protože pro něj v obcích není náležitého porozumění a vážnosti ani vhodného vůdce. Nicméně je to podle Platónova soudu věda budoucnosti. Ve své „Ústavě" o ní Platón říká: „Kdyby měla celá obec tento obor (tj. stereometrii, pozn. autora) ve vážnosti a účastnila se toho vůdčího úkolu, jednak by se jí lidé podřizovali, jednak by se soustavným a usilovným pěstováním ukázala pravá podstata vědy. Neboť i nyní, přestože je u lidí v nevážnosti a bývá komolena od takových pěstitelů, kteří si neuvědomují, v čem záleží její užitečnost, přece při všech těchto okolnostech se svou silou pro svůj půvab vzmáhá. Nebylo by nic divného, kdyby se v budoucnu ukázala v plném světle."

Posléze hodnotí Platón astronomii: „Astronomie čistí a znovu zažíhá rozum (zvláštní nástroj duše), hasnoucí a znečišťovaný od ostatních zaměstnání, jehož záchrana je cennější než záchrana tisíce očí skutečných, neboť jedině jím je možno vidět pravdu."

V planimetrii vyslovil Platón požadavek, aby konstruktivní úlohy byly řešeny pouze užitím pravítka a kružítka.

Svým idealistickým výkladem o matematických disciplínách zdůvodňoval Platón význam a užitečnost matematiky.

Platónova filosofie je založena na objektivním idealismu, tj. protikladu proměnlivého světa přírody a skutečnosti a transcendentního, neměnného světa duchovních podstat — pravzorů (idejí). Svět idejí je prvotní, svět smyslových věcí je druhotný, odvozený.

Dnešní věda ovšem nemůže souhlasit s tímto Platónovým učením. *Lenin* je charakterizoval jako „arcinesmyslnou mystiku idejí". Bylo to učení reakční, nevědecké. Nicméně bylo po dlouhou dobu pramenem idealistických filosofií a různých náboženství.

Důsledkem tzv. Pythagorovy věty bylo objevení nesouměřitelných úseček. Na poměry těchto úseček nebylo vždy možné použít definicí a vět o poměrech úseček, které mají společnou míru. Bylo proto nutno, aby se přepracovala nauka o poměrech, zejména o poměrech úseček. Bylo též potřebí zavést novou definici rovnosti dvou poměrů. Tyto úkoly rozřešil slavný matematik, lékař a astronom, *Eudoxos z Knidu* (asi 408—356 př. n. l.).

Vědecký způsob myšlení, který od dob Thaletových zdomácněl zásluhou Pythagora a jeho žáků i jiných starořeckých matematiků, rozmnožil do té míry poznatky řeckých filosofů, že největší starořecký filosof *Aristoteles* (385—322 před n. l.) mohl uspořádat všechny tehdejší vědecké poznatky a podat významnou klasifikaci vědních oborů, o níž Lenin praví, že je řešena „skvěle, přesně, jasně a materialisticky, třebaže se autor nedrží důsledně tohoto stanoviska". Z popudu Aristotelova byl zachycen též historický vývoj matematiky. Značná část tohoto historického přehledu se nám dochovala prostřednictvím filosofa *Prokla Diadocha* (412—485 n. l.), který jej zaznamenal v předmluvě svého komentáře k první knize Euklidových „Základů". Jemu vděčíme za většinu našich vědomostí o historii matematiky z této doby.

Platón nazýval všechny nauky „mathémata". Teprve u Aristotelových žáků nabylo slovo matematika svého nynějšího významu. V následujícím období řecké matematiky, kdy řečtí vědci budovali na pracích matematiků VI., V. a IV. století před n. l., bylo dosaženo znamenitých výsledků v rozvoji matematiky a zejména geometrie. Proto bývá toto období nazýváno „*Zlatou dobou řecké matematiky*". Nejvýznamnějšími zástupci této epochy jsou *Euklides*, *Archimédes* a *Apollónios z Pergy*.

Již před touto dobou bylo řeckými vědci nashromážděno tolik matematických, zejména geometrických poznatků, že byly činěny

pokusy o jejich soustavné shrnutí a systematické uspořádání. Proklos ve svém historickém přehledu řeckých matematiků poznamenává, že takové soubory, zvané obvykle „Stoicheia", latinsky „Elementa" čili „Základy", byly napsány již dříve. *Hippokrates* z ostrova Chiu byl prvý, který podobné „Základy" napsal. Autoři dalších podobných spisů náleželi do okruhu učenců z Akademie Platónovy. Proklos říká, že v Akademii se navzájem stýkali a sdělovali si svá zkoumání. Lze proto soudit, že tyto soubory byly v Platónově Akademii při studiu užívány jako učebnice.

Tradici těchto „Základů" dovršil svým znamenitým spisem, napsaným kolem roku 325 př. n. l., *Euklides*. O životě Euklidově nemáme mnoho zpráv. Podle sdělení, které nám dochoval ve svých spisech geometr *Pappos*, žil Euklides v Alexandrii kolem r. 300 př. n. l. Pappos vyzvedá jeho svědomitost, skromnost a přátelskou laskavost ke všem, kteří — třeba i skromnou měrou — přispěli k rozvoji matematiky. Euklides byl současníkem faraóna Ptolemaia I. Tento farao požádal jednou Euklida, aby jej zasvětil snadným způsobem do tajů geometrie. Euklides odpověděl: „Není pro krále soukromé cesty ke geometrii." Králové totiž mívali ke svým komnatám v palácích soukromé schodiště.

Euklides byl nesmlouvavým zastáncem čisté matematiky. V jeho spisech nenajdeme žádnou aplikaci matematiky, ba nejsou tu ani poučky pro délky čar, obsahy obrazců nebo objemy těles. Mluví se vždy jen o poměrech těchto veličin. Matematika — ve smyslu platónské Akademie — byla mu cestou k proniknutí do problémů filosofie. Nebyla prostředkem k výdělku. Vypráví se hezká příhoda o jednom z Euklidových žáků: Mladý muž se začal vzdělávat u Euklida v geometrii. Sotva se začal učit první poučku, zeptal se Mistra: „Jaký zisk mohu mít z toho, když se tuto věc naučím?" Euklides zavolal svého otroka a poručil: „Dej mu tři oboly, neboť tento ubožák si musí vydělávat tím, co se učí."

Euklidův spis ovlivnil vývoj geometrie na tisíciletí, třebaže mnohé jeho odstavce nejsou zcela původní. Snadno totiž lze ukázat, že nejobtížnější z jeho třinácti knih byly napsány Euklidovými předchůdci: knihu V a XII napsal *Eudoxos*, knihu X a XIII *Theaitetos*. Tyto knihy mají také vysokou logickou úroveň, podobně jako aritmetické části knihy VII a IX, kdežto jiné partie nedosahují jejich logické dokonalosti. Euklides byl skvělý interpret a příkladný učitel. Byl tak znamenitým učitelem, že řada jeho žáků ani dnes nekončí. Ještě nedávno se na anglických školách učila geometrie podle přepracovaných Euklidových „Základů" a také školní geometrie v Anglii se nazývá „Euklid".

Druhým vedoucím matematikem „Zlaté doby řecké matematiky" je mladší současník Euklidův *Archimédes*, žijící v Syrakusách na Sicílii v letech 287—212 před n. l. Archimédes náleží k největším matematikům všech dob. Jeho práce o vyšetřování obsahů obrazců, omezených buď zčásti nebo úplně křivkami, a jeho úvahy o objemech — zvláště objemu koule — daleko předstihly Archimédovu dobu. Archimédes při nich užívá exhausční metody, která byla objevena sice Eudoxem, ale kterou přivedl Archimédes k neobyčejné účinnosti. Její podstatou je věta: „Odečteme-li od nějaké veličiny polovinu nebo více než polovinu a opakujeme-li tento postup dostatečně dlouho, pak se vždy dostaneme k veličině, která je menší než některá daná veličina téhož druhu."

Archimédovo jméno je též spojeno se známým axiómem, který musí být splněn pro veličiny, které chceme měřit obvyklým způsobem. Tento axióm byl však znám již Euklidovi a pochází patrně od Eudoxa.

Archimédes měl velké zásluhy též v oborech, kde se matematika spojuje s praxí, zvláště v mechanice a v hydrostatice. Byl jedním z prvých, kdo v matematických úvahách sledoval změny studovaných útvarů, čili uplatnil prvky funkčního myšlení, které se v dalších vývojových obdobích matematiky staly rozhodujícím činitelem matematického pokroku.

Třetí vynikající matematik „Zlaté doby řecké matematiky", *Apollónios z Pergy* (asi 265—170 před n. l.), byl mladším současníkem Archimédovým. V osmi knihách spisu „Konika" (O kuželosečkách) studuje křivky, ve kterých roviny protínají rotační kužel. Apollónios se rovněž nevyhýbá prvkům funkčního myšlení. Pro vyšetřování kuželoseček vytvořil Apollónios důmyslnou metodu, která je předchůdcem analytické geometrie.

Po „Zlaté době řecké matematiky" nastalo ochabnutí v kladení teoretických problémů matematických i v hledání nových metod. Přesto však ještě po několik století byla řecká matematika vedoucí a jedinou vědecky pěstovanou matematikou vůbec. Všestranný *Herón z Alexandrie* v I. století před n. l. zabývá se ve spisech „Geometrika", „Metrika" a „Dioptrika" praktickou geometrií a nahrazuje nesprávné staroegyptské předpisy pro výpočty obsahů, o měření úhlů atd. předpisy přesnějšími a přitom prakticky vhodnějšími.

Po výpravě Alexandra Velikého se Řekové seznámili s astronomickými a geometrickými vědomostmi babylónsko-chaldejskými. Zakladatelem řecké astronomie a sférické trigonometrie se stal *Hipparchos* (II. stol. př. n. l.). Studium geometrie na kouli vedlo Hipparcha též k objevu stereografické projekce, kterou prováděl tak, že promítal body nebeské koule z jejího pólu do bodů v rovině jejího rovníku. Lze snadno dokázat, že při tomto zobrazení se všechny kružnice (kromě poledníků) promítají jako kružnice. Rovněž úhly, pod kterými se kružnice — respektive kružnice a přímky — průmětny protínají, zůstanou zachovány. K dalšímu rozvoji trigonometrie přispěl *Menelaos z Alexandrie* (kolem r. 100 n. l.).

Hlavním spisem starověku, který se zabýval trigonometrií a současně byl nejrozsáhlejším starověkým kompendiem astronomie opírajícím se o geocentrický názor, bylo dílo „Megalé syntaxis" napsané *Klaudiem Ptolemaiem* (100—178 n. l.). Spis tento, ačkoli byl napsán pohanem, byl po tisíciletí oporou katolického dogmatismu a bylo potřebí velkého úsilí pokrokových vědců XVI. století, *Galileo Galileiho*, *Giordana Bruna*, *Mikuláše Koperníka* aj., aby byl Ptolemaiův nesprávný názor vymýcen.

Politické dějiny prostoru, obývaného Řeky, jsou v druhé polovině prvního tisíciletí před n. l. z převážné části dějinami sporů, válek a bojů mezi jednotlivými řeckými státy. Nejen však řecká nesvornost sama, ale i bohatá členitost řeckých osad na ostrovech Egejského moře, v Malé Asii, Egyptě, Jižní Itálii a na Sicílii sváděla některé silné sousedy — zejména mohutnějící Říši římskou — k ozbrojeným vojenským zásahům.

Popsané nepříznivé okolnosti a současně rozdílná kulturní a hospodářská úroveň jednotlivých řeckých států měly za následek postupný úpadek řecké otrokářské společnosti. S tím byl spjat i úpadek starověké matematiky, vrcholící zvláště na počátku n. l. Ještě se sice vyskytují slavní matematici, jako např. *Diofantos z Alexandrie* (III. stol. n. l.), který se ve své „Aritmetice" zabýval hlavně aritmetickými a algebraickými problémy, nebo *Pappos z Alexandrie* (konec III. stol. n. l.), který učinil řadu významných geometrických objevů. To však jsou už poslední vynikající zástupci kdysi slavné tradice řecké matematiky.

Diofantovi přísluší zásluha o prvý významný pokus symbolisovat početní výkony a vztahy zvláštními znaky. Odchýlil se od geometrické tradice řecké a ve svých dílech o rovnicích položil základ nauky, která byla mnohem později nazvána algebrou.

Dědicové politické a hospodářské moci řecké, Římané, nestali se důstojnými pokračovateli starořeckých matematiků. V rukách římských agrimensorů se matematika zvrhla v prakticismus a nebyla teoreticky dále rozvíjena.

Další pokrok do vývoje matematiky přinesli národové žijící v Asii. Zde se od pradávna rozvíjela čínská matematika, která spolu s řeckými spisy pronikla do Indie a tvořivě ovlivnila tamější vyspělou matematickou kulturu. Zatím co řecká matematika byla převážně geometrického rázu a zachovávala přísný logický systém, byla indická matematika spíše aritmetická a názorná. Vrcholného vývoje dosáhla ve dvou obdobích. Prvé se vyznačuje jmény matematiků *Aryabhata* (* 476 n. l.) a *Bráhmagupta* (* 598 n. l.), druhé představuje matematik *Bhaskara* (1114—1185?).

Největší zásluhu o rozvoj matematiky a tím i o kulturní vývoj lidstva vůbec si získali Indové myšlenkou psaní čísel pomocí deseti znaků a zavedením místní hodnoty číslic. Zároveň s psaním čísel v desítkové soustavě vytvořili Indové některé zvláštní formy zápisů početních výkonů. Rovněž v geometrii, zejména v trigonometrii, znamená indický přínos rozhodný pokrok. Indové zavedli užívání poloviční tětivy příslušné k danému středovému úhlu (sinus) místo celé tětivy, jak tomu bylo pod vlivem řeckých geometrů až do této doby.

Čínské, indické a řecké vědomosti převzali Arabové a arabsky píšící zakaspičtí národové, Uzbeci, Tadžikové, Azerbejdžané a Chorezmejci, kteří rozvedli indické myšlenky v účinné matematické nástroje. Nejvýznačnější ze zástupců těchto národů je tadžický matematik *Abu Abdalah Muhamed ben Musa z Chorezmu*, stručně nazývaný *Al Chovarizmi* (IX. stol. n. l.), který bývá nazýván otcem algebry. Jeho spis Aldžebr v'almukakabala, pojednávající hlavně o rovnicích, dal první částí svého jména název celé algebře.

Díla zakaspických matematiků byla záhy překládána do latiny. Je zajímavé, že opis jednoho překladu Al Chovarizmiho byl též v majetku *Tadeáše Hájka z Hájku*, českého matematika a lékaře, který žil v XVI. stol.

Vedoucí politické postavení arabské říše v době přelomu prvého tisíciletí je provázeno též mohutným rozmachem arabské kultury. Bohatý kalifův dvůr v Bagdádu soustředil vědce zakaspických národů i vědce arabské a tím podnítil rychlý rozvoj arabské vědy. Zejména v trigonometrii bylo dosaženo významných úspěchů pracemi *Albattaniho* (zemřel r. 929), *Abu'Lvafi* (940—998) a *Nasir eddina al Tusiho* (1201—1274).

Křesťanský starověk a středověk celkem nepřispěl k dalšímu rozvoji matematiky. Západní národové se jen pozvolna seznamovali s arabskými matematickými spisy, které tehdy znamenaly vrchol matematického vědění. Latinské výtahy ze spisů řeckých byly nedokonalé. Teprve přímý styk s Araby a latinské překlady z arabského jazyka, pořízené především ve XII. století školou v Toledu po dobytí Pyrenejského poloostrova Araby, přinesly hlubší poznatky do západních zemí. Překládáni byli Al Chovarizmi, Albattani, Ptolemaios, Euklides a jiní tehdy známí autoři matematických spisů.

Tím byla skončena dlouhá cesta, kterou prodělala řecká geometrická matematika, doplněná aritmetickými poznatky čínskými, indickými, algebraickými pracemi zakavkazských matematiků a polotětivovou trigonometrií Arabů. Tato cesta vedla ze střední Asie na pobřeží severní Afriky, dále na Pyrenejský poloostrov a odtud do kulturních západoevropských zemí.

Od XIII. do XV. století se seznamovaly západoevropské národy hlouběji se základními matematickými vědomostmi přinesenými Araby.

Rozvíjející se hospodářské potřeby a vzkvétající obchod kladly zvýšené nároky na početní techniku, která se zejména vlivem bohatnoucí buržoasie čile obchodujících italských států stále zdokonalovala. V této době — na počátku XIII. století — napsal *Leonardo Pisánský* dvě významné učebnice matematiky. V prvé, zvané „Liber abaci" (kniha o abaku), vykládá Leonardo indický způsob počítání, zdokonalený podle Al Chovarizmiho. Druhá kniha: „Praktika geometriae", obsahuje soubor tehdejších geometrických vědomostí, které poznal Leonardo na svých cestách po severní Africe a u maurských vědců.

Velké zásluhy o rozšíření tehdy moderního a zároveň praktického způsobu počítání indickými číslicemi a o zavedení nových idejí do strnulé evropské scholastické matematiky měl též *Jordanus Nemorarius* (kolem r. 1200), člen dominikánského řádu v Paříži.

Rovněž nejstarší známý ruský matematický spis pochází z této doby. Napsal jej člen novgorodského kláštera *Kirik* a jmenuje se: „Kirika diakona a člena novgorodského Antonievova kláštera učení, jímž lze člověku poznati všechny letopočty". Kniha má 19 odstavců, které jsou věnovány převážně aritmeticko-chronologickým výpočtům. Podle této knihy a řady dalších pramenů („Ruská pravda" Jaroslava Moudrého, novgorodský letopis z XIII. století aj.) je zřejmé, že v této době byly matematické vědomosti staré Rusi na téže úrovni jako v západní Evropě. Ovšem dvě století tatarského jařma zle dolehly na rozvoj ruské kultury a zabrzdily i v matematice její další vývoj.

Během XV. století se znalost indických čísel stala majetkem širokých vrstev. Účelnost a hospodárnost tohoto způsobu počítání zvítězila nad různými světskými i církevními reakčními zákazy a zapisování čísel římskými číslicemi zmizelo i z obchodního počítání právě tak, jako již předtím bylo vytlačeno z výpočtů vědeckých.

Pád Cařihradu r. 1453 měl velký vliv na vývoj evropské společnosti. Mnozí řečtí filosofové a vědci odešli do západní a jižní

Evropy, zvláště do Itálie. Jejich vlivem i vlivem jiných okolností se obrátil obecný zájem k antické kultuře. Vynalezení knihtisku koncem XV. století umožnilo širší a rychlejší rozšiřování vědomostí mezi lidem. Německé tiskárny vydaly záhy různé učebnice počtů, slavné benátské tiskárny začaly vydávat rozmanité klasické spisy. Znovu probuzená snaha po poznání vedla k rozsáhlejšímu pěstování ryzích věd, v neposlední řadě též věd přírodních a matematiky.

Daleké a smělé námořní plavby, podnícené neustále se stupňujícími obchodními a hospodářskými potřebami, rozvíjející se umění válečné (stavby pevností, zdokonalování střelných zbraní, rozmach dělostřelectva a strategická potřeba určování vzdáleností nepřístupných bodů a výšek), dále rozvoj architektury, pokrok realistického malířství (perspektiva) a současně i rostoucí vnitřní potřeby vytvářely problémy a otázky matematiky, které vedly k stále mohutnějšímu rozvoji matematických věd. To se týká zejména trigonometrie, nauky o rovnicích vyšších stupňů a počítání s písmeny. Byla soustavně propracována nauka o desetinných zlomcích a byly objeveny logaritmy.

Západní matematický svět se seznámil s trigonometrií jednak prostřednictvím spisu „De triangulis omnimodis" (O obecných trojúhelnících), který napsal *Regiomontanus* (Johannes Müller; 1436—1476), jednak pracemi vídeňského astronoma a matematika *Georga z Peuerbachu* (1428—1461). Také slavný polský astronom *Mikuláš Kopernik* (1473—1543) uvedl ve svém proslulém spise „De revolutionibus orbium coelestium" (O pohybech těles nebeských) stručný úvod do trigonometrie.

Algebra, zvláště nauka o rovnicích vyšších stupňů, byla úspěšně pěstována v Itálii. *Scipione del Ferro* (1465—1526) a *Geronimo Cardano* (1501—1576) se zabývají obecným řešením rovnic třetího stupně a *Lodovico Ferrari* (1522—1565) pak objevuje obecné řešení rovnic čtvrtého stupně. V matematických spisech pomalu zdomácňují záporná čísla a jsou objevována čísla imaginární (Cardano).

Rozhodující význam pro pokrok matematického myšlení a jeho zhospodárnění nejen v algebře, ale i v ostatních matematických disciplínách, má odvážná myšlenka zavedení symbolů pro matematické operace. Tu provedli angličtí a němečtí matematikové

koncem XV. a během XVI. století. Neméně významné je ovšem i důsledné zavedení písmen ve významu čísel, které uskutečnil francouzský matematik *François Viète* (1540—1603). Tento objev bezprostředně ukázal, že mnohé úlohy a problémy, jež předtím bylo nutno řešit odděleně a nezávisle, jsou často jen speciálními případy téhož problému obecného. Jeho řešení pak okamžitě poskytlo i řešení oněch zvláštních případů; postačilo v něm jen nahradit použitá písmena vhodnými čísly.

V této době též nizozemští matematikové zasáhli rozhodujícím způsobem do vývoje matematiky. Mohutný rozvoj zámořského obchodu, založeného zvláště na vykořisťování bohatých kolonií a výhodná poloha Nizozemí při ústí velkých řek, způsobily bohatnutí měšťanstva i hospodářský rozkvět venkova. Inženýr *Simon Stevin* (1548—1620) vybudoval nauku o desetinných zlomcích a *Gemma Frisius* (1503—1555) napsal učebnici aritmetiky, která též u nás byla hojně užívána. *Ludolf van Ceulen* (1539—1610) se stal populárním svým výpočtem čísla π na 35 desetinných míst. Velmi úspěšné byly též práce nizozemských matematiků v oboru trigonometrie. *Adriaen van Roomen* (1561—1615) zdokonaluje trigonometrické metody, *Willebrord Snellius* (1591—1626) řeší důležité geodetické úlohy.

Rozsáhlé výpočty v nejrůznějších oborech teoretické i praktické matematiky, sestavování trigonometrických tabulek, astronomické výpočty, kupecké a obchodní počty a vojenské pozemní i námořní úkoly vedly k různým pokusům a metodám, jak usnadnit obtížné početní postupy. Počátkem XVII. století byly tyto snahy korunovány vynálezem logaritmů. Hlavní zásluhu o to má anglický matematik *John Napier* (1550—1617) a Švýcar *Joost Bürgi* (1552—1632), který roku 1620 vydává v Praze spis „Progress Tabulen".

Tím končí první nejdelší období matematiky jako statické nauky o číslech, veličinách a geometrických útvarech.

3. DRUHÉ VÝVOJOVÉ OBDOBÍ:

MATEMATIKA JAKO NAUKA O ZMĚNÁCH VELIČIN A O GEOMETRICKÝCH TRANSFORMACÍCH

Na sklonku XVI. a počátkem XVII. století byly učiněny v matematice důležité objevy, které připravovaly půdu k jejímu dalšímu mohutnému rozvoji. V aritmetice se počaly používat desetinné zlomky a byly objeveny logaritmy. Francouzský matematik *François Viète* (1540—1603) zavedl do algebry užívání písmen ve významu čísel, čímž dovršil dosavadní dialektický vývoj pojmu čísla. Současně se pak pracemi fyziků a astronomů nahromadilo množství látky čekající na matematické obory, které podstatně změnily tvářnost celé matematické vědy. Byla to především analytická geometrie a pak infinitesimální počet.

V analytické geometrii se již zcela jasně projevuje směr, jímž se matematika druhého vývojového období liší od matematiky období prvního. Zatím co se v prvním období prováděly jednotlivé a pro každý útvar jiné úvahy, vystupuje v analytické geometrii již obecná myšlenka a jednotný postup. V matematice prvního období, která se zabývala čísly, veličinami a geometrickými obrazci, byly uvažovány pouze jednotlivé okamžiky existence určitých věcí. Proto v ní nebylo možné dostatečně přesně zobrazit kvantitativní vztahy a prostorové formy skutečného světa v celé jejich proměnlivosti, nýbrž jen jakési „fotografické momentky" oněch ustavičně se měnících forem a vztahů. V souvislosti s obrovským rozvojem výrobních sil a nově se přetvářejících společenských vztahů, které podnítily bouřlivý rozvoj přírodních věd a vyvolaly ovzduší pilné horečnaté práce a vědeckého zápalu, přešla matematika XVII. století k proměnným veličinám a závislostem mezi nimi. Do matematiky vnikly takto dvě nové základní myšlenky — idea pohybu a změny — jež pak určily její celkový rozvoj v XVII., v XVIII. a v první polovině XIX. století „. . . celá příroda," praví *Engels*, „od nejnepatrnějších zrnek až po slunce, od prvoků až po člověka, je ve věčném vznikání a zanikání, v neustálém toku, v ustavičném pohybu země" (B. Engels: Dialektika přírody, české vyd. 1950, str. 31).

Tvůrcem analytické geometrie je slavný francouzský filosof a matematik *René Descartes* (1596—1650), jenž roku 1637 podal ve své „Geometrii" náčrtek nové metody pro rovinu a poukázal i na možnost její prostorové aplikace. Vycházeje z určení polohy bodů pomocí čísel (souřadnic) ukázal, že lze geometrické vlastnosti vyjádřit aritmetickým způsobem. Obrovský význam souřadnicové metody se stal okamžitě patrný z jejího použití na vyšetřování rozmanitých křivek. Analytická geometrie odstranila také poslední pochybnosti o důvodech pro zavedení záporných čísel do matematiky.

Současně s Descartesem pojal základní myšlenku analytické geometrie duchaplný francouzský právník a matematik *Pierre Fermat* (1601—1665), který si dobyl předního místa v matematice též svými příspěvky k teorii čísel. Jeho — třebaže úryvkovité a jen na rovinu se omezující — úvahy o analytické geometrii vynikly v mnohých směrech nad metody Descartesovy. Analytickou geometrii pak propracovali četní další odborníci, vyzkoušeli její výhody a rozvinuli její metody při vyšetřování křivek vyššího stupně.

Objev analytické geometrie vynutil si přeorientování staršího způsobu matematického myšlení, které většinou rozlišovalo mezi poznatky aritmetickými a geometrickými. Zvládnutí vlastností geometrických útvarů aritmetickými prostředky vytvořilo z aritmetiky jakési centrum, kolem něhož se soustředilo téměř všechno matematické bádání. Tím se dosáhlo ideové jednoty aritmetiky a geometrie, jež sice již předtím byla leckdy nejasně tušena, až dosud však nikdy spolehlivě prokázána. Stará klasická geometrie ztratila svou dominující úlohu, neboť ta se přesunula na aritmetiku, která poznenáhlu přijala záruku za správnost všeho matematického vědění.

Zásadní důležitost přechodu matematiky prvního vývojového období k období druhému, přechodu od studia jednotlivých okamžiků existence věcí k studiu jejich změn a vývoje, přechodu od statického studia čísel k studiu funkcí a jejich změn, krásně charakterizuje B. Engels těmito slovy:

„Obrat v matematice znamenala Descartova proměnná veličina. Tím pronikl do matematiky pohyb a dialektika, tím se stal neodkladně nutným diferenciální a integrální počet, který pak ihned vzniká a který byl celkem vzato dovršen a nikoli vynalezen Newtonem a Leibnizem" (Dialektika přírody, české vydání 1950, str. 220).

Přesnost Engelsova výroku dobře pochopíme, jestliže si uvědomíme, že se již v starořecké matematice (zejména u Archiméda) objevují úvahy o spojitosti, o mezných hodnotách (limitách), o veličinách nekonečně malých a jejich použití k stanovení obsahu a objemu těles. Též Galileiho úvahy o mechanice z počátku XVII. století se zabývaly podobnými problémy. Slavný astronom *Jan Kepler* pak provedl podle Archimédova vzoru řadu výpočtů objemů těles (zejména kubatur sudů). Rovněž italský geometr *Bonaventura Cavalieri* (asi 1598–1647), tvůrce principu po něm nazvaného, objevil metodu, pomocí níž bylo možno stanovit obsah rovinných obrazců i objem těles srovnáním jejich rovnoběžných řezů s rovnoběžnými řezy ploch a těles, jejichž obsah, resp. objem byl již znám.

Vlivem analytické geometrie nabyly tyto a podobné metody jednotného rázu a vyhranily se ve dva důležité obecné problémy. Jedním z nich bylo stanovení tečny k dané křivce v daném jejím bodě, druhým pak určení obsahu plochy omezené danou křivkou a určení objemu tělesa ohraničeného danou plochou. Tyto dva úkoly pak vedly bezprostředně k objevu infinitesimálního počtu.

Po pozoruhodných pokusech již vzpomenutého matematika Fermata i dalšího geniálního, třebaže idealistického francouzského myslitele *Blaise Pascala* (1623—1662) a jiných matematiků dospěla věc tak daleko, že objev infinitesimálního (= diferenciálního a integrálního) počtu již delší dobu před Newtonem a Leibnizem takřka „visel ve vzduchu". Koncem XVII. století nabyla potřeba jistoty poznání přírodních jevů a jejich přesného popisu pomocí obecných zákonů tak vysokého stupně, že dosavadní matematika, včetně analytické geometrie, již nebyla schopna podat exaktní vysvětlení a přijatelný popis přírody. A právě tehdy dochází k objevu infinitesimálního počtu, který současně a na sobě nezávisle

vynalezl slavný anglický fyzik *Isaac Newton* (1642—1727) a německý matematik a filosof *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646—1716).

Newton vyšel z potřeby stanovení okamžité rychlosti bodu, který se pohybuje podle určitého zákona; tato úloha je v podstatě totožná s úlohou stanovení tečny k dané křivce v daném jejím bodě. Proměnlivé souřadnice pohybujícího se bodu nazval Newton „fluentami", složky rychlosti pak „fluxemi". Svou metodou pak Newton hravě rozřešil nejen problém stanovení okamžité rychlosti z dané dráhy, nýbrž i řadu úloh o minimech a maximech, o tečně k dané křivce atd.

Leibniz si položil geometrickou otázku určit početně tečnu v libovolném bodě dané křivky. První Leibnizovo pojednání o diferenciálním počtu vyšlo v roce 1684. Dvě léta na to Leibniz vyložil základy počtu integrálního. Je nespornou zásluhou Leibnizovou, že do diferenciálního a integrálního počtu zavedl stručnou a účelnou symboliku. Pro diferenciál použil značky d, pro integrál značky ∫. Značky tyto se ihned ujaly a jsou užívány až dodnes.

Infinitesimální počet je jedním z největších úspěchů matematiky vůbec, neboť měl rozhodující vliv na rozvoj nejen matematiky samé, nýbrž i ostatních přírodních věd a techniky. Proto je objev infinitesimálního počtu vysoko hodnocen jako jeden z největších triumfů lidského ducha. Bedřich Engels píše o něm takto: „Ze všech teoretických pokroků není žádný pokládán za tak velký triumf lidského ducha jako vynález infinitesimálního počtu v druhé polovině XVII. století. Jestliže máme vůbec někde ryzí a výlučný čin lidského ducha, pak jej máme zde" (B. Engels: Anti-Dühring, české vydání 1949, str. 294).

Třeba však ještě poznamenat, že tento počet vznikl skoro v téže době, kdy náš Komenský umírá jako vyhnanec v cizině a kdy u nás nastala doba nejhlubšího temna. Je proto pochopitelné, že objev tak pokrokový, jako byl počet infinitesimální, měl mnoho zaujatých nepřátel. Např. anglický biskup a idealistický filosof Berkeley píše o infinitesimálním počtu jako o „řadě záludností, absurdností, zmatků a dokonce nemožností a rozporů", ba jako o „poblouznění křesťanského ducha". Nicméně infinitesimální počet zvítězil svými

praktickými úspěchy nad všemi podobnými hlasy a krok za krokem nabýval stále většího uznání. Mladá vznikající buržoasie i panovníci, kteří se ještě zcela neoprostili od církevní moci, si záhy povšimli nových možností, které jim infinitesimální počet dával. Použili ho k potřebám dělostřelců a budovatelů pevností, loďařů, národohospodářů i majitelů prvních manufaktur.

Mezi první pěstitele infinitesimálního počtu náleželi slavní Švýcaři, bratři *Jakub Bernouilli* (1654—1705) a *Jan Bernouilli* (1667—1748), kteří se předstihovali s Leibnizem v hledání a řešení různých problémů, jimiž prokázali mimořádný význam nového počtu. Infinitesimální počet dále rozvíjeli zejména *Gaspard Monge* (1746—1818), zakladatel deskriptivní geometrie a organizátor první polytechnické školy v Paříži, jenž použil infinitesimálních metod v oblasti geometrie, *J. L. Lagrange* (1736—1813), jehož činnost jak v teorii počtu infinitesimálního, tak i při jeho aplikacích v mechanice byla velmi významná pro další rozvoj matematických věd, *P. S. Laplace* (1749—1827), který svým základním dílem o pohybové mechanice nebeských těles ukázal neobyčejný dosah infinitesimálního počtu v astronomii. Vedle nich ovšem celá řada dalších znamenitých matematiků, jako např. *A. C. Clairaut* (1713—1765), *J. d'Alembert* (1717—1783), *A. M. Legendre* (1752—1833), *J. B. J. Fourier* (1768—1830) aj. pracovala v teorii i na praktických aplikacích infinitesimálního počtu a docílila mnoha pronikavých úspěchů.

Nad všemi však svou vynikající a přebohatou činností stojí Švýcar *Leonard Euler* (1707—1783), jenž zdokonalil objevené metody a vyzkoušel jejich výkonnost a účelnost v nejrozmanitějších odvětvích matematiky. V algebře, v teorii čísel a nauce o řadách, v geometrii křivek, v trigonometrii i v infinitesimálním počtu, všude je dodnes patrný jeho tvůrčí duch. Říká se o něm, že byl posledním matematikem-polyhistorem.

Prudký vývoj matematiky v XVII. a XVIII. století byl především způsoben tím, že se tato věda neodtrhovala od praktických úkolů. Ve Velké sovětské encyklopedii, sv. 30, str. 370 je tato doba charakterizována následujícími slovy: „Autoři XVII. století chápou a s oblibou zdůrazňují velký praktický význam matematiky. Růst buržoasní společnosti v XVII. století umožnil dát

vědě úkoly na několik století dopředu s plným poznáním jejich praktické ceny. Opřena o těsnou souvislost s matematickou částí přírodních věd, mohla matematika XVII. století nastoupit novou etapu dialektického vývoje. Nové pojmy, které se nedaly vtěsnat do starých formálně logických kategorií matematiky, nabývaly svého prvého plného oprávnění v odpovídajících jim vztazích skutečného světa. Tak např. vyplývá reálnost pojmu derivace z reálnosti pojmu rychlosti v mechanice. Nebylo proto otázkou, je-li možno tento pojem logicky zdůvodnit, nýbrž jenom to, jak jej formulovat."

Základním pojmem matematiky druhého vývojového období byl pojem funkce, jenž až do dnešní doby si plně zachoval svou nesmírnou důležitost. Zpočátku byla funkce považována za proměnnou veličinu, jejíž hodnoty jsou určovány podle nějakého vzorce (tzv. analytické vyjadřování funkce) libovolně volenými hodnotami druhé proměnné veličiny (nezávisle proměnné neboli argumentu). Tak Euler ve svém „Úvodu do analysy" praví např.: „Funkce proměnné kvantity je analytický výraz složený nějakým způsobem z této proměnné kvantity a čísel neboli konstantních kvantit."

Další vývoj matematiky vedl ovšem k daleko obecnějšímu pojetí funkce, které je založeno na vzájemném přiřazování prvků dvou množin. Toto pojetí funkce mohlo však být uskutečněno teprve ve třetím vývojovém období, kdy byla vybudována teorie množin.

Dnešní obecný pojem funkce je tento: Jestliže každému prvku x nějaké množiny **M** je podle nějakého pravidla přiřazen jistý prvek y množiny **N** (která popřípadě může být i totožná s množinou **M**), pak říkáme, že na množině **M** je definována funkce (jednoznačná) a píšeme $y = f(x)$. Prvky množiny **M** se nazývají hodnoty argumentu, jim přiřazené prvky množiny **N** pak hodnoty funkce nebo též obrazy prvků množiny **M**. Je ovšem myslitelný i případ, že množina **N** obsahuje i takové prvky, které nejsou obrazem žádného prvku množiny **M**. Prvky množin **M**, **N** mohou být zcela libovolné podstaty, tj. nemusí to být výhradně čísla. Případ, kdy prvky množin **M**, **N** jsou čísla, je ovšem velmi důležitý, nicméně jsou běžné i případy, kdy tomu tak není. Jestliže prvky množin **M**, **N** jsou například body, pak máme jednoduchý případ geo-

metrického zobrazení (bodové zobrazení). Tak je tomu např. v deskriptivní geometrii při různých druzích promítání. Každému bodu zobrazovaného objektu je v rovině (průmětně) přiřazen podle zvláštního pravidla určitý bod, zvaný průmět. Ono pravidlo, pomocí něhož sestrojujeme průměty bodů v prostoru, je ovšem různé podle druhu promítání (zobrazení).

Snaha po zachycení pohybu a změny se v XVII. i XVIII. stol. projevila v matematice i mimo analytickou geometrii a infinitesimální počet. Bylo to zejména v klasické ryzí geometrii (syntetické), v níž rovněž došlo k důležitým objevům, které připravily půdu pro pozdější mohutný rozvoj projektivní geometrie. Lyonský architekt *Girard Desargues* (1593—1661), vycházeje z malířské perspektivy, zpracoval teorii centrální projekce, zavedl nevlastní (úběžné) prvky a použil jich k vyšetřování geometrických útvarů. Jeho myšlenky však nebyly současníky pochopeny. Pouze již dříve uvedený francouzský matematik Blaise Pascal vytvořil na jejich základě zcela novou nauku o kuželosečkách.

Sem také patří i vznik deskriptivní geometrie, kterou, jak jsme si už řekli, založil *Gaspard Monge*. Zpočátku byla deskriptivní geometrie tajnou vojenskou vědou a teprve francouzská buržoasní revoluce ji učinila široce přístupnou lidu. Poslání a důležitost deskriptivní geometrie vyzdvihl Monge při zahájení svých přednášek v roce 1795 těmito slovy: „Deskriptivní geometrie se v budoucnosti stane jednou z hlavních částí národní výchovy, protože její metody jsou pro pracující tak důležité jako čtení, psaní a aritmetika."

Jestliže obsah matematiky prvního období se obyčejně, byť i ne zcela přesně, označuje názvem „elementární matematika", pak lze nazvat matematiku druhého vývojového období (také ne zcela přesně) „klasickou vyšší matematikou". Matematická látka, která se u nás vyučuje na všeobecně vzdělávacích školách, patří převážnou většinou do elementární matematiky. Nicméně i elementární matematika obsahuje četné oddíly, které se vymykají z rámce školských možností. Podstatným částem klasické vyšší matematiky (vyšší algebře, matematické analyse, analytické geometrii a diferenciální geometrii) jsou věnovány přednášky až na vysokých školách.

4. TŘETÍ VÝVOJOVÉ OBDOBÍ: MATEMATIKA JAKO VĚDA O KVANTITATIVNÍCH VZTAZÍCH A PROSTOROVÝCH FORMÁCH SKUTEČNÉHO SVĚTA V CELÉ JEJICH OBECNOSTI

XVI., XVII. a XVIII. století vytvořilo všechny předpoklady, aby se mohla matematika mohutně rozvíjet. Zejména se stalo běžným užívání indických čísel a posičního systému. Stále více pronikal počet s desetinnými čísly. Tím se usnadnilo provádění složitých výpočtů, k čemuž dopomohl především vynález logaritmů. Pohodlná algebraická symbolika přispěla k rozvoji teorie rovnic a algebry vůbec. Analytická geometrie vedla k zobecnění pojmu funkce a pomohla současně opodstatnit skutečnost záporných čísel.

V XIX. století se nahromadilo velmi mnoho poznatků v různých oborech matematiky. Stále více mohl být zdůrazňován názor, že matematika je věda o mnohem obecnějších kvantitativních vztazích, než jakými jsou čísla a veličiny a o mnohem obecnějších prostorových formách, než jsou obyčejné geometrické útvary o jednom, dvou nebo třech rozměrech. Matematika třetího období se vyznačuje bohatostí a všestranností svého obsahu, má naprosto abstraktní charakter a přitom dovede řešit i nejkonkrétnější úkoly, které jí předkládá praxe. Toto třetí období trvá od počátku XIX. století dodnes.

Význam pojmu funkce a transformace je stále pronikavější. Teorie funkcí se osamostatňuje od počtu infinitesimálního a zásluhou řady matematiků se stává jednou z nejdůležitějších kapitol matematiky.

Z vynikajících pracovníků na tomto poli je to zejména náš *Bernard Bolzano* (1781—1848), francouzský matematik *A. L. Cauchy* (1799—1857), mladý norský matematik *Henrik Niels Abel* (1802—1829) a němečtí matematikové *Georg Riemann* (1826—1866) a *Karl Weierstrass* (1815—1897). Protějškem tohoto rozvoje v oblasti analysy je neméně bouřlivý rozvoj v oblasti geometrie. Na základě

studia transformací rozvíjí se projektivní geometrie, kterou se zabýval zejména její tvůrce francouzský matematik *J. V. Poncelet* (1788—1867) a po něm řada dalších matematiků francouzských, německých a italských, k nimž se ve druhé polovině XIX. století řadí také česká škola projektivní geometrie, representovaná především vynikajícím *Emilem Weyrem* (1848—1894).

Teorie obecnějších transformací (biracionálních) byla studována italským matematikem *Luigi Cremonou* (1830—1903). Významný pojem grupy zavedl do teorií transformací Nor *Sophus Lie* (1842—1899) a německý matematik *Felix Klein* (1849—1925).

V prvé polovině XIX. století dochází též k vyvrcholení dialektického vývoje pojmu čísla. Nor *Gaspar Wessel* (1745—1818) a po něm Němec *Karl Friedrich Gauss* (1777—1855) znázornili komplexní čísla pomocí bodů roviny a použili jich při řešení mnohých problémů, především v teorii dělení kruhu (Gauss).

Teorie funkce komplexní proměnné se nyní stala nepostradatelným prostředkem ke studiu mechaniky kontinua homogenních látek. Uplatňuje se tak v nejrůznějších oborech techniky, zejména v aerodynamice, teorii pružnosti a v mnohých dalších oborech.

Němečtí matematikové *Karl Weierstrass*, *Richard Dedekind* (1831—1916), *Georg Cantor* (1845—1919) a Francouz *Charles Méray* (1835—1911) položili vědecké základy teorie iracionálních čísel.

Jejich úvahy o iracionálních číslech byly podnětem pro vytvoření pojmu množiny, který je jedním z nejdůležitějších pojmů moderní matematiky. Rozvíjením teorie množin se zabýval zejména G. Cantor. Stejně jako v historii čísel záporných a komplexních objevila se při začátcích teorie množin řada logických rozporů — sofismat. Ty vedly některé konzervativní matematiky k přesvědčení, že teorie množin nepatří vlastně do matematiky a má být z ní proto vyloučena. Jiní — méně zaujatí — vyslovovali mínění, že teorie množin byla objevena příliš brzy.

Teprve začátkem XX. století vybudoval matematik *E. Zermelo* teorii množin na axiómatickém základě. Tím byly v podstatě odstraněny hlavní rozpory, které vedly k pochybnostem o správnosti této disciplíny.

Na podkladě teorie množin vznikla záhy řada nových matematických nauk. Je to zvláště množinová topologie, funkcionální analysa, teorie reálných funkcí, teorie svazů a konečně i matematická logika. Všechny tyto disciplíny nacházejí větší či menší uplatnění v praxi, nebo jsou připraveny, aby mohly být použity při stále rozsáhlejších aplikacích teoretických úvah v nejrůznějších oborech tvůrčí lidské činnosti.

Dalším charakteristickým rysem třetího období vývoje matematiky je rozvoj a uplatnění matematické přesnosti. Bouřlivý růst některých matematických disciplín, zejména pak počtu infinitesimálního v XVIII. století, měl za následek kvalitativní rozvoj matematických poznatků, nicméně dokazovaných často způsoby, které sice svědčily o znamenité intuici autorů, neobstály však pod přísnou kritikou doby pozdější. Bylo proto nutno podrobit kritickému zkoumání základy všech matematických disciplín.

Přesné základy teorie algebraických rovnic vybudoval *K. Fr. Gauss*, *H. N. Abel* a francouzský matematik *François Evarist Galois* (1811—1832).

Výstavbě a kritickému zkoumání základů analysy se vedle Cauchyho věnoval již jmenovaný Abel, Riemann, Weierstrass a dále francouzský matematik *Charles Hermite* (1822—1901).

Bádání o základech axiómatické výstavby geometrie, hlavně otázka pátého postulátu Euklidova, vedla geniálního ruského matematika *Nikolaje Ivanoviče Lobačevského* (1793—1856) k vybudování nové geometrie, ve které neplatí pátý axióm Euklidův. Tato geometrie se nazývá podle svého objevitele geometrií Lobačevského nebo geometrií neeuklidovskou. Podobnými otázkami se zabýval také Fr. Gauss, dále maďarský matematik *Jan Bolyai* (1802—1860) a později též B. Riemann a jiní.

Matematické úvahy, prováděné v třetím období, směřují k nejširší obecnosti. V aritmetice a algebře jsou zavedeny zcela abstraktní pojmy čísel a veličin vůbec, v teorii funkcí se dospívá k složitým a matematicky obtížným funkcím, v abstraktní teorii grup a jiných podobných teoriích se studují kvantitativní vztahy v celé jejich obecnosti. V abstraktní geometrii se zamítá názor jako pomůcka prostorové představivosti. Dospívá se k abstraktní představě pro-

storu o více než třech rozměrech. Dalším zobecněním pojmu prostor vznikají prostory metrické a topologické.

Veškerá tato zobecnění mají důležitý význam nejen v různých disciplínách matematiky, ale i v přírodních vědách, zejména ve fyzice.

Dalším význačným rysem vývoje matematiky třetího období je mnohostrannost předmětů, které moderní matematika zkoumá, i všestranná rozmanitost pracovních metod. Vedle řešení problémů, které matematice předkládají přírodní vědy a technika, se rozvíjejí též odvětví vysoce abstraktního rázu. Matematickými úvahami se řeší mnohé problémy společenského dění i obtížné otázky dobytí meziplanetárního prostoru. V geometrii se uplatňují výsledky algebry a analysy a naopak.

Logaritmy odstranily obrovské potíže při numerických výpočtech, které zejména astronomům komplikovaly život. Osvětlily současně mnohé otázky z funkční analysy a připravily řešení četných problémů této disciplíny. Užívá se metod statistických šetření i grafických metod početních; do služeb matematiky jsou pojaty i matematické stroje (stroje na zpracování informací) a elektronové mozky velké výkonnosti a překvapivé počítací rychlosti.

Jejich pomocí jsou hravě řešeny mnohé problémy, které čekaly dlouhou dobu na své vyřešení. Nicméně se objevují další neřešené problémy zcela nových druhů a podstat. Byla vyslovena obava, že nové problémy rostou rychleji, než vůbec mohou být řešeny. Přesto se lze domnívat, že nahromadění problémů určitého druhu v jistém časovém období povede k vytvoření teorie, která tyto problémy bude řešit z vyššího jednotícího hlediska. Tímto způsobem byly už nejednou ve vhodné době řešeny problémy, které vyvstaly před sta a tisíciletími. Počet diferenciální a integrální řešil z jednotného hlediska mnohé, tehdy zdánlivě izolované problémy, kterými se zabývali Eudoxos, Apollónios, Archimédes, Pappos, Guldin, Kepler, Cavalieri aj.

II.

ARITMETIKA

1. PRVNÍ POČETNÍ PŘEDSTAVY

Jedním z nástrojů, jichž počal velmi záhy člověk užívat, aby si usnadnil boj s přírodou, byl soubor představ a pojmů, které později daly vznik matematice. Společenské vztahy lidí vytvořily brzy předpoklady pro vznik čísla a pozvolna také pro vytvoření početních výkonů. Bylo potřebí předvídat, jak dlouho vydrží nahromaděné zásoby, odhadovat, na jakou dobu postačí ulovená zvěř k výživě kmene. Vyměňovaly se rozličné předměty, srovnávala se velikost stád různých majitelů apod. Počalo se uvažovat o množství.

Pojem množství vznikl patrně dříve, než vznikla jména pro jednotlivá čísla.

Máme četné zprávy o tom, že primitivní pastevec zjistí takřka jediným pohledem, zda mu nějaká ovce ve stádě chybí. Přitom nemá představu čísla, udávajícího počet ovcí ve stádě a nedovede je také žádným způsobem vyjádřit. V takovém případě jde o zvláštní pamětnou schopnost primitiva nezatíženého řadou poznatků, který pozná, že mu ve stádě chybí dobytče určitých vlastností, jak je má ve své představě. V tomto stadiu chápání množství ještě nevystupuje číslo jako abstraktní pojem. Ten se teprve velmi pozvolna buduje abstrahováním ostatních vlastností počítaných objektů (barva, velikost atd.).

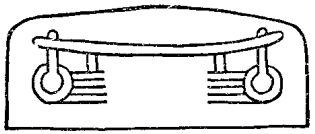
Bedřich Engels ve spise „Anti-Dühring" říká: „Pojmy počtu a obrazce nejsou vzaty odnikud jinud, než ze skutečného světa. Deset prstů, na nichž se lidé naučili počítat, tedy provádět první aritmetický úkon, jsou vším jiným, jen ne volným výtvorem

rozumu. K počítání patří nejen počítatelné předměty, nýbrž i schopnost opomíjet při pozorování těchto předmětů všechny jejich ostatní vlastnosti, vyjímaje jejich počet — a tato schopnost je výsledkem dlouhého dějinného zkušenostního vývoje." (Anti-Dühring, české vydání 1949, str. 36).

Čísla byla nejprve vyjadřována přiřazováním ekvivalentních množin stejnorodých předmětů jako byly prsty na rukou a na nohou, při větších číslech i kotníky, klouby, jindy zase kaménky, hůlky apod.

Vzájemné přiřazování různých množství hrálo velmi důležitou úlohu při směňování rozličných druhů zboží a bylo velmi názorné. Soudíme tak z toho, že i v naší době primitivní národové — podle zpráv různých cestovatelů — provádějí obchodování na podkladě velmi konkrétního vyměňování malé skupiny prodávaných předmětů za stanovenou protihodnotu. Domorodec prodával např. dvě ovce a za každou požadoval dva svazky tabákových listů. Nevzal však najednou čtyři svazky a nedal ani hned obě ovce. Dal napřed jednu ovci a vzal za ni dva svazky, pak dal druhou ovci a vzal si další dva svazky tabákových listů.

Názornost byla také ovšem zachována všude tam, kde okolnosti vedly k vytvoření trvalého číselného záznamu. Když bylo třeba poslat nějakou zprávu, která obsahovala číselné údaje, bylo číslo vyjádřeno kaménky, vloženými do sáčku. Příjemce si kaménky přepočítal a tím poznal číslo, které posílající tímto způsobem „zapsal".



Obr. 1. Dopis pohlavára domorodého kmene na Cejlonu

Na obr. 1 je vyobrazen dopis pohlavára domorodého kmene na Cejlonu, psaný na stromové kůře. Náčelník si tímto dopisem objednává dva hrnce medu a deset kusů divoké zvěře. Horní prohnutá dvojitá čára představuje tyč, na které má být zboží neseno, dva hrnce jsou znázorněny dvěma kruhy, deset kusů zvěře pak vyjadřuje deset vodorovných čar, seskupených souměrně do dvou skupin po pěti.

Často se setkáváme se „zápisem" čísel na dřevěných holích pomocí zářezů. Hole, do nichž se čísla „zařezávala", se nazývají rabuše, zářezům říkáme vruby. Různé druhy číselných záznamů na rabuších nacházíme takřka u všech národů. I u nás na Valašsku zaznamenávali obecní pastýři na rabuších veškeré číselné údaje, spojené s obhospodařováním ovcí, které jim byly jednotlivými sedláky v obci svěřeny do opatrování. Počet ovcí, patřících jednotlivým hospodářům vesnice, si pastýř zaznamenával na jedné straně rabuše, na druhé zapisoval odevzdané máslo, na třetí sýr a na čtvrté straně sůl, dodanou na salaš.

Nejstarší „vrubový" zápis pochází z vykopávek z Dolních Věstonic na Moravě a je asi z doby 50 000 až 60 000 let před naším letopočtem. Je to stehenní kost z mladého vlka s 25 a 30 zářezy. Je pravděpodobné, že lovec mamutů si tu poznamenal své úlovky. Počet zářezů patrně ukazuje na zárodky pětkové soustavy.

Některé národy užívaly uzlů na provázcích jako zápisu čísel.

Tibetské modlitební šňůry, stejně jako katolické růžence, jsou vlastně početní šňůry k zaznamenávání počtu předepsaných náboženských úkonů.

Nejznámější číselné zápisy na provazcích se dochovaly z doby říše Inků, kteří kdysi zřídili bohatý stát se svéráznou kulturou na území jihoamerické republiky Peru. Provazce se nazývaly „kipu" a tvořily svazky šňůr, až několik kilogramů těžké. Veškeré „písemnictví" říše Inků bylo zaznamenáno na takových svazcích provazců. Úřední oznámení byla po celé říši rozesílána v těchto svazcích. Uzly byly vázány zvláštními úředníky a ti jediní jim též rozuměli.

Rovněž Číňané užívali kdysi uzlových zápisů. Čínský mudrc Laotse v VI. století př. n. l. napomíná své spoluobčany, aby se vrátili k jednoduchému způsobu života a radí: „Nechte lidi dělat opět uzly z provazců a užívat jich jako písmen."

Vyjadřování čísel pomocí uzlů bývalo donedávna v různých oborech lidské činnosti běžné a někde se dochovalo až dodnes. Na japonských ostrovech Rjúkjú označují si dělníci vyslouženou mzdu značkami různého druhu na povříslech.

2. ČÍSELNÉ SOUSTAVY

Jak jsme viděli v předešlém článku, pomáhal si pravěký člověk při počítání a zapisování čísel jednoduchými pomůckami jako např. prsty, kaménky, uzly nebo vruby, popřípadě i jinak. Zásoba čísel tak stále rostla a tím rostla i odvaha počítat s čísly většími a většími. Záhy se však ukázaly rozmanité potíže. Příliš velký počet uzlů nebo vrubů nebyl přehledný. Bylo proto nutno shrnout určitý počet jednotek v jeden „vyšší" celek, v jednotku vyššího řádu. Počítání na prstech, které jsou nejpřístupnějším počitadlem, přivedlo lidstvo logickým vývojem k návyku, shrnovat v jednu jednotku vyššího řádu zprvu pět, později deset a třeba i dvacet jednotek. Tak patrně vznikla číselná soustava pětková, desítková a dvacítková.

Zkratkové znaky pro „vyšší jednotky" byly pravděpodobně užívány ještě před vznikem písma. Na kostech, které pocházejí ze starší doby kamenné, nacházíme vruby tvaru V a X, které bývají vykládány jako znaky pro tyto vyšší jednotky. Znak V představuje snad obraz ruky s pěti roztaženými prsty a byl to tedy symbol pro číslo 5. Je pak nasnadě vyložit znak X jako obraz dvou spojených rukou, tedy symbol pro číslo 10.

Zbytky pětkové číselné soustavy se dochovaly až do nedávné doby u některých národů střední Afriky. Tamější domorodci měli velká stáda dobytka a jeho počítání bylo pro ně těžkým problémem. Dělali to tedy tak, že jeden domorodec odpočítával na prstech jedné ruky jednotky (tj. jednotlivé kusy dobytka vždy po pěti), druhý zase „zaznamenával" na prstech své ruky počet těchto (ovšem zase jen do pěti) pětek, třetí zachycoval počet „pěti-pětek" (tj. vždy $5 \cdot 25 = 125$ kusů dobytka, znázorněných na prstech jedné ruky).

Dvacítkové soustavy užívali Indiáni kmene Mayů ve Střední Americe ještě v VI. století našeho letopočtu. Stopy této soustavy jsou patrny z názvů některých čísel v mnohých indoevropských jazycích. Tak např. ve francouzštině se číslo 80 nazývá quatre-vingts, což v doslovném překladu znamená čtyři dvacítky.

Poměrně častý výskyt dvacítkové soustavy v různých dobách a kulturách pramení pochopitelně z okolnosti, že člověk má na všech končetinách dohromady 20 prstů. V době, kdy lidé chodili bosí, poutaly prsty na nohou pozornost počítajícího stejně jako prsty na rukou. Pak ovšem soubory „ruka" (pět) a „člověk" (dvacet) byly pochopitelně prvními stupni při budování číselné soustavy.

Ve vzdálených končinách zeměkoule zachovaly se dosud stopy počítání v jiných číselných soustavách. Tak např. Eskymáci na poloostrově Čukotském mají svůj svérázný způsob podle počtu prstů na rukou a na nohou. Známý sovětský spisovatel Semuškin vypravuje o matematických znalostech Čukčů v knize „Žil jsem na Čukotce" toto:

„Hodiny počtů měly čukotské děti stejně rády jako „rozhovor na papíře". Překážel při nich však jejich domácí způsob počítání do pěti podle počtu prstů na rukou a na nohou. Dospělí Čukčové takovým způsobem počítají velmi dobře až do tisíce. Zřídka se zmýlí, i když jim takové počítání trvá dlouho. Pro větší pohodlí se někdy zouvají a počítají na dvaceti prstech rukou a nohou. Pět lidí při tomto počítání tvoří jednu stovku."

Shrnování několika jednotek do větších celků se velmi záhy stalo běžným zvykem. Usnadňovalo to přehled o množství kupovaného a prodávaného tovaru. Takové větší celky měly různá jména podle počtu kusů a někdy také podle druhu zboží, ze kterého byly tyto soubory tvořeny. Tak vznikly pojmy a názvy mandel, kopa, tucet apod.

Tvořením ekvivalentních skupin stejných předmětů si usnadňovali lidé odedávna přehled o svém vlastnictví. Byl to též jeden z důležitých předpokladů umožňujících spravedlivé obchodování. Současně to však byla i důležitá cesta, po které člověk pronikal stále dál v poznávání posloupnosti přirozených čísel. Zde se dosti brzy ustálila soustava desítková, která posléze ovládla všechno běžné počítání. Veškerá technika, měření délek, ploch, objemů, vážení, procentový počet a celé desetinné dělení se opírá o desítkovou soustavu.

3. PSANÍ ČÍSEL

Zápisy čísel na rabuších nebo pomocí uzlů vyhovovaly primitivním potřebám v určitém období lidského vývoje a pro svou jednoduchost se v různých formách udržely hodně dlouho. Nicméně tvořivý vývoj lidského myšlení šel dále a písemné značky se počaly psát na vhodně volené hladké plochy. Naše vědomosti o číslech a cifrách nesahají dále než do čtvrtého tisíciletí před počátkem našeho letopočtu. Opírají se o nápisy na starých budovách a památnících — zejména v údolí řeky Nilu — jsou však též výsledkem studia zápisů na hliněných destičkách, nalezených jako pozůstatky starých „knihoven" v údolích řek Eufratu a Tigridu.

Naše vědomosti o starých číselných zápisech jsou doloženy též prameny psanými na papyrech. Ty pocházejí především z údolí řeky Nilu. Pyramidy a různé hrobky byly tisíciletými úschovnami staré kultury egyptské, která je nyní krok za krokem znovu objevována.

Přesto jsou tyto dochované doklady psaní čísel jen jednotlivé články dlouhého vývoje, který můžeme v celé úplnosti pouze tušit. Mohutné stavby pyramid, chrámů, hrobek a jiné stavitelské památky vyžadovaly vyspělou početní i geometrickou kulturu, která se nám objevuje ve stavu značně dokonalém a na dlouhou dobu ustrnulém a neměnném. Lze proto předpokládat, že se tyto početní kultury vyvíjely již tisíciletí před dobou, ze které máme její první písemné doklady.

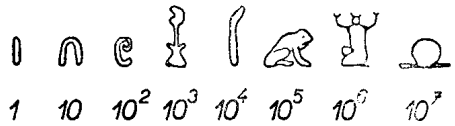
Různé národy během svého vývoje dospěly k odlišným způsobům psaní čísel. Všechny staré kultury — babylónská, egyptská, řecká, indická, čínská a arabská — vytvořily svoji vlastní číselnou symboliku.

Národy, jejichž přínos pro další rozvoj číselné symboliky byl nejsměrodatnější, lze podle způsobů, jak čísla psaly, rozdělit do tří odlišných skupin. Každá z těchto skupin má vždy určitou společnou myšlenku, na které je psaní čísel založeno. Vznikl tak systém: A. obrazového písma, B. založený na místní hodnotě číslic a C. zápisu čísel pomocí písmen abecedy.

A. OBRAZOVÁ PÍSMA

Do první skupiny náležejí ty národy, které užívaly obrázkových znaků. V této skupině nejvýznačnější je ten systém, kterého se užívalo ve starém Egyptě. Tam se k psaní i počítání užívalo znaků, kterým dnes říkáme hieroglyfy. Ukázku takového číselného hiero-

Obr. 2. Reliéf s čísly psanými hieroglyfy



Obr. 3. Hieroglyfické číslice

glyfického zápisu nám představuje obr. 2. Na obr. 3 je přehled hieroglyfů pro některá čísla. Znak pro 1 představuje hůlka, obraz ruky je symbolem pro 10, spirála pro 100 je patrně stylizovaný

obraz svinutého palmového listu. Znak pro 1 000 ukazuje květ lotosu — symbol Nilu — kterému Egypt vděčí za svou úrodu. Současně to byl také symbol hojnosti, jejímiž bohy byli Osiris a Isis. Číslo 10 000 je představováno ohnutým prstem, hieroglyf pro 10^5 čili 100 000 je obrázkem zárodku žáby (kterých se vždy po nilských záplavách objevovalo nesmírné množství). Milión je vyjádřen obrazem žasnoucího muže; podle jiných pramenů představuje kosmického boha, který drží oblohu a jehož jméno znamená nekonečnost. S pojmem nekonečna bývá též spojován poslední znak pro 10^7. Jindy však i znaky pro 10^3 a 10^5 již znamenají „velmi mnoho".

Popsaných znaků se většinou užívalo pro vyjadřování čísel na monumentálních zápisech na stavbách. Zobrazované jednotky se při čtení čísla sčítaly; jejich seskupování se dálo podle hledisek praktických i estetických. Řadění jednotek podle řádu nebylo jednotné. V některých textech se psalo od levé ruky k pravé, v jiných zase obráceně. Symbol pro milión během doby vymizel a pokud se psala čísla, v nichž se vyskytoval, napsal se znak pro 10^5 a pod něj potřebný násobek.

Při rychlém psaní nabývaly znaky zkrácených a zjednodušených forem. Vzniklo tak zvané písmo hieratické, užívané většinou kněžími. Toto písmo nacházíme také zpravidla v papyrech staré egyptské říše, kde se dochovalo v různých variantách. Nejstarší početní památky tohoto druhu jsou slavné papyry, tzv. *papyrus moskevský a papyrus Ahmesův*, které oba pocházejí z XVIII. století př. n. l.

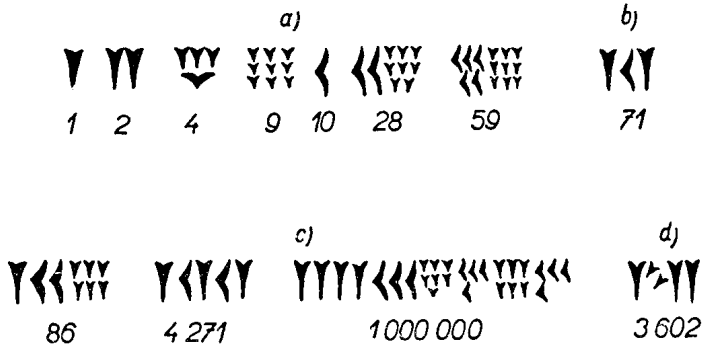
Asi v VII. století př. n. l. se objevuje písmo, které řecký dějepisec z V. století př. n. l. Herodot nazval démotické čili lidové. V egyptských památkách bývá nazýváno písmem knihovým, kdežto písma hieroglyfická i hieratická bývají zvána písmy bohů.

B. SYSTÉMY ZALOŽENÉ NA MÍSTNÍ HODNOTĚ

Druhá skupina zahrnuje ty národy, které píší čísla pomocí místní hodnoty číslic. Tento způsob psaní čísel nacházíme na hliněných destičkách u národů v údolích Eufratu a Tigridu, sem patří také číselná symbolika středoamerického indiánského kmene Mayů a ovšem i číselná soustava, které užíváme my a která má své prvé počátky v Indii.

Hliněné destičky pocházejí ze čtvrtého tisíciletí před n. l. a z dob mladších. Obsahují zprávy z nejrůznějších oborů tehdejšího života, zejména pak záznamy významných událostí a náboženské předpisy. Jsou též dochovány celé zákoníky i zápisy ze života hospodářského, dále zápisy z astronomie a také zápisy matematické. Psalo se rákosovým rydlem do měkkých destiček, které se pak vypalovaly. Znaky, ze kterých se písmena a čísla skládala, měly většinou tvar klínů, a proto se tyto systémy nazývají písmy klínovými.

V Mezopotamii se během tisíciletí vystřídala řada národů, z nichž každý tak či onak ovlivnil kulturní vývoj a přejímal kulturní návyky národů podrobených. Tím vznikla celá řada kultur, které měly své více méně odlišné číselné systémy.



Obr. 4. Čísla psaná klínovými znaky

Od poloviny třetího tisíciletí před n. l. se vedle jiných způsobů psaní čísel užíval i způsob, který kromě vlastní hodnoty přisuzoval číselným znakům též hodnotu místní (poziční systém). Jednotka byla znamenána svislým klínem, dvě jednotky se zapisovaly dvěma svislými klíny apod. Desítka byla psána klínem lomeným. Způsob psaní čísel od 1 do 59 je patrný z obr. 4a. Obr. 4b představuje

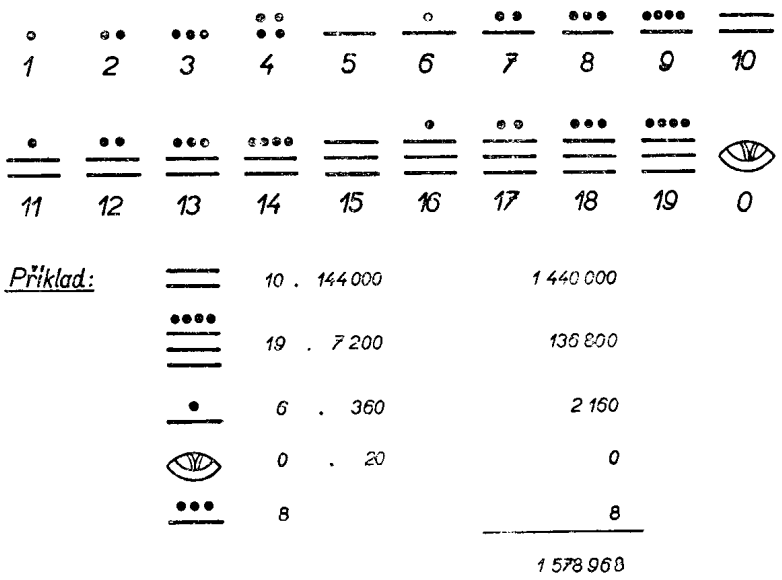
číslo 71. Svislému klínu, napsanému vlevo od klínu lomeného pro deset, je přisouzena hodnota „místní", šedesátkrát větší než ta, kterou měl svislý klín na místě jednotek. V obr. 4c jsou zapsána čísla $1 . 60 + 2 . 10 + 6 = 86$, číslo $60^2 + 10 . 60^1 + 60^1 + 10 + 1 = 4\,271$ a číslo $4 . 60^3 + 37 . 60^2 + 46 . 60^1 + 40 = 1\,000\,000$.

Na základě těchto pravidel není obtížné přepsat některá čísla z našeho číselného systému do systému tohoto klínového písma. Při zápisu mnohých čísel klínovou symbolikou se však často setkáme s obtížemi. Nevyskytne se vždy znak pro 10 (lomený klín), který odděluje jednotky nižšího řádu od jednotek vyššího řádu a kromě toho není posud znám způsob, jak vyznačit chybějící jednotky některého řádu. S těmito obtížemi se např. setkáme, když chceme přepsat do klínového písma číslo $3\,602 = 60^2 + 2$. Je samozřejmé, že i Babylóňané se setkali s touto svízelí, která vznikne při každé symbolice, založené na pozičním systému, pokud ta symbolika nemá zvláštní znak pro nulu. Babylóňané si pomáhali v různých dobách různým způsobem. Chybějící řady byly vyznačovány kupř. mezerou apod. Ve čtvrtém století př. n. l. se poprvé objevuje znak dvou malých šikmých klínů psaných nad sebou. Tento znak označoval místo, kde chyběly jednotky určitého řádu. Použitím tohoto znaku bylo zmíněné číslo (3 602) zapsáno v obr. 4d.

Zmíněný už středoamerický kmen Indiánů Mayů měl vyspělou číselnou symboliku, založenou na systému místních hodnot o základu 20. Protože se čísel užívalo zejména k údajům kalendářovým a k zapisování sledu dní, jevil se soubor (18 . 20 =) 360 jednotek (tj. dnů) jako časový celek, který po přičtení pěti dnů činí jeden sluneční rok. Proto nebyl číselný systém kmene Mayů důsledně stupňován po dvaceti. Prvních dvacet jednotek (nultého řádu) tvořilo jednu jednotku řádu vyššího (prvního), dále však už jen 18 jednotek tohoto řádu bylo shrnováno v jednu jednotku řádu druhého. Měla tedy jednotka řádu druhého celkem 20 . 18 jednotek řádu nultého. Tvoření jednotek vyšších řádů pak pokračovalo opět vždy po dvaceti. Způsob zápisu čísel je zřejmý z obr. 5.

Tento způsob psaní čísel se u Mayů vyskytoval téměř od počátku našeho letopočtu. Když Španělé v XVI. století počali dobývat

zemi, byla kultura těchto kmenů již v úpadku. Její největší rozkvět byl pravděpodobně v období mezi VI. až XI. stoletím.



Obr. 5. Číselná symbolika indiánského kmene Maya

Náš nynější způsob psaní čísel spočívá rovněž na pozičním systému. Za jeho objevitele jsou všeobecně pokládáni Indové. Nejstarší číselný systém, známý na částech území nynější Indie ve III. století př. n. l., užíval znaků písma, zvaného kharosti, vzniklého z abecedy perskoaramejské. Nápisy tímto písmem byly nalezeny východně od Afghánistánu a v severním Pandžábu. V podstatě byly používány znaky, které se při psaní čísel opakovaly tolikrát, kolikrát bylo třeba.

Bezprostředními předky našich číselných znaků jsou pravděpodobně číslice bráhmi, které byly v Indii rovněž od dávných dob užívány.

Při psaní čísel větších než sto býval znak pro 100 nebo 1000 spojován s číslem, které určovalo, kolik stovek či tisícovek je v čísle zahrnuto. Z tohoto způsobu psaní čísel se v době kolem roku 500 n. l. vyvinul zásluhou Indů zavedením pozičního systému zápis čísel

pomocí devíti znaků (číslic) a zvláštního znaku pro chybějící jednotky (nuly) náš nynější způsob psaní čísel.

Zkoumání problémů, souvisících s původem pozičního systému v indických číslicích, je velmi obtížné také proto, že mnoho listin z té doby tvoří padělky. Tak ze sedmnácti částí textů, které obsahovaly poziční způsob psaní čísel, se ukázala pouze dvě místa bezpečně správná.

C. ZAPISOVÁNÍ ČÍSEL UŽITÍM PÍSMEN ABECEDY

Třetí způsob zapisování čísel spočíval v tom, že se čísla označovala určitými písmeny abecedy. Tímto způsobem psali čísla jónští Řekové, Židé, Arabové aj. U Slovanů se objevuje tento systém jednak v abecedě glagolské, jednak v abecedě kirilické, která byla užívána na staré Rusi.

α=1, β=2, γ=3, δ=4, ε=5, ϛ=6, ζ=7, η=8, ϑ=9,

ι=10, κ=20, λ=30, μ=40, ν=50, ξ=60, ο=70, π=80, ϙ=90,

ρ=100, σ=200, ς=300, υ=400, φ=500, χ=600, ϕ=700, ω=800, ϡ=900.

Obr. 6. Řecké číselné znaky

V obr. 6 je přehled řeckých znaků pro čísla. Tento způsob psaní čísel v Řecku byl užíván od V. století př. n. l. a vystřídal nevhodný a těžkopádný dřívější způsob číselných zápisů.

Aby se čísla odlišila od slov, bývala označována čarou nad číslem nebo nějakým jiným vhodným způsobem. Čísla větší než myriáda (10^4) byla psána pomocí symbolu M s nadepsanou číslicí, která vyjadřovala, s jakým násobkem myriády se má počítat. Největší číslo, které jónský způsob podle užívaných pravidel umožňoval napsat, bylo $10^8 - 1$. *Archimédes* a později i *Apollónios* vyjadřovali jinými prostředky velká čísla a přiblížili se přitom velmi blízko myšlence pozičního systému.

Ve staré Rusi — podobně jako ve starém Řecku — se zapisovala čísla pomocí písmen. Církevně slovanská abeceda byla vytvořena v polovině IX. století n. l. pro jižní slovanské národy, u nichž vykonávalo byzantské duchovenstvo misionářskou činnost. Autory této abecedy byli bratři Konstantin (řádové jméno Cyril, zemřel r. 869) a Metoděj (zemřel r. 885), oba ze Soluně. Jimi sestavená abeceda, dnes nazývaná „kirilika", měla za základ velkou řeckou abecedu. Tato abeceda pronikla na půdu Kyjevské Rusi v X. století současně s církevními knihami.

Ve slovanské číselné soustavě se užívalo písmen běžné abecedy, nad písmenem ve významu čísla se však dělal znak „titlo", který měl různý tvar, nejčastěji ale podobu krátké vlnovky. Každé písmeno představovalo jedno číslo (viz obr. 7).

Staroruské číselné znaky

А҃=1, В҃=2, Г҃=3, Д҃=4, Є҃=5, Ѕ҃=6,

З҃=7, И҃=8, Ѳ҃=9, І҃=10, К҃=20, Л҃=30,

М҃=40, Н҃=50, Ѯ҃=60, О҃=70, П҃=80, Ч҃=90,

Р҃=100, С҃=200, Т҃=300, Ѹ҃=400, Ф҃=500, Х҃=600,

Ѱ҃=700, Ѡ҃=800, Ц҃=900 nebo Ѧ҃=900.

Příklady:

РНѕ҃=156, ВІ҃=12, *ЗВ҃=7002.

Obr. 7. Staroruské číselné znaky

Táž písmena znamenala i čísla vyšších řádů. Tak k označení tisíců se psal před každým písmenem zvláštní znak (viz obr. 7), k označení desetitisíců (tmy) se písmena psala do kroužku, k označení stotisíců (legionů čili nevědí) se kolem čísla dělal kroužek z teček a pro vyjádření miliónů se kroužek vyčárkoval.

Zápis některých čísel ve slovanském systému uvádíme na obr. 7.

Kromě uvedeného číselného systému, který šel do miliardy a na-

zýval se „malé číslo", byl užíván ještě druhý systém, zvaný obvykle „velké číslo" nebo „velké slověnské číslo". Tento systém obsahoval čísla až do 10^{48} a někdy i do 10^{49}. Za hranicemi tohoto „velkého čísla" bylo „více než může lidský rozum obsáhnout". Názvy, kterých bylo užito pro pojmenování čísel v „malém čísle", byly používány i v „čísle velkém", ale měly jiný význam. Tak „tma" ve „velkém čísle" značila ne deset tisíc, ale tisíc tisíců, čili milión, „legion" značil „tmu těm" čili milión miliónů, tj. bilion, „leodr" značil „legion legionů" (10^{24}); dále se říkalo deset leodrů, sto leodrů . . . a nakonec sto tisíc těm leodrů (10^{47}); „leodr leodrů" (10^{48}) se nazýval „voron". Deset voronů (10^{49}) byla „koloda". Numerace však ani zde vždycky nekončila, ačkoli v přehledech staroslovanské numerace bývala poznámka „většího čísla není". Jsou dochovány některé doklady, podle kterých staroslovanská numerace pokračovala i nad tuto hranici.

4. POČETNÍ VÝKONY S PŘIROZENÝMI ČÍSLY

Abacisté a algoritmikové

Je na prvý pohled zřejmé, že početní výkony s čísly zapsanými babylónskými, egyptskými, římskými nebo staroruskými číslicemi nelze prakticky provádět způsobem, jakým počítáme dnes, tj. na podkladě zápisu čísel užitím indických číslic. Čísla byla vyjadřována položením drobných stejných předmětů — kaménků, penízů apod. — na vhodně upravenou desku, zvanou v Itálii abacus. Proto počtáři tohoto druhu bývají nazýváni abacisté. Deska byla opatřena mezerami nebo linkami pro položení jednotek určitého řádu. Tyto mezery a linky byly zprvu vertikální; později se vyvinul způsob, zvaný u nás „počet na linách", s linkami horizontálními. Tento systém byl obvyklý ve střední a západní Evropě až do XV. století. K psaní čísel se užívalo římských číslic — ale v poněkud jiné podobě, než je píšeme dnes.

V Rusku se vytvořila obdobná praktická početní pomůcka, tzv. sčoty. Počtář na sčotech vyjadřuje čísla přesunutím kuliček

na drátu z jedné strany na druhou. Kuličkám na různých drátech jsou přisuzovány různé místní hodnoty, které obvykle stoupají zdola nahoru. Početní výkony se provádějí velmi názorně posunováním kuliček. Přitom se zachovávají určité praktické úmluvy, které jsou obdobné pravidlům počtů na linách. Sovětští pracující na kolchozech, a často i jinde dovedou v běžné praxi užívat sčotů se zručností, která z nich činí úspěšné konkurenty jednodušších kancelářských počítacích strojů.

V Číně byla užívána podobná početní pomůcka zvaná „suanpan". Japonci poněkud pozměněnému počitadlu říkají „soroban".

Dnes rozeznáváme čtyři základní početní výkony: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Dříve k nim byla počítána též numerace (čítání), duplace (zdvojení) a mediace (půlení). Nicméně již český počtář Klatovský ve svých „Knížkách početních" z roku 1530 říká v prvém traktátu o počtu na cifrách: „Duplatio a mediatio, ty dvě species zdají se mi zbytečné a daremné zaneprázdnění, neb duplatio jiného nic není, než skrze dvě multiplicatio, mediatio jest skrze dvě divisio. Protož o nich krátce zavru, při kterých není se co zastavovati, neb multiplicatio a divisio o tom šíř oznamují."

Způsoby, jimiž dnes provádíme čtyři základní početní výkony s vícemístnými čísly, dříve známy nebyly. Vznikaly až po zavedení indického způsobu psaní čísel. S rostoucí znalostí tohoto výhodného způsobu zapisování čísel se postupně vyvíjely a zdokonalovaly.

Znamenitá myšlenka místní hodnoty cifer spolu s revolučním objevem symbolu něčeho, co je nic, tj. nuly, překonaly první rozpaky i počáteční odpor některých konzervativních počtářů. Ti se ještě v prvé polovině XVI. století zpečovali užívat arabských číslic i v některých velkých centrech obchodního života — včetně Prahy. Dávali přednost „bezpečnějšímu" způsobu psaní čísel na rabuších nebo číslicím římským před zapisováním nespolehlivými — jak se jim alespoň tenkrát zdálo — číslicemi indickými.

Návod k provedení určitého početního výkonu a později i návod určité stereotypní operace v matematice vůbec bývá nazýván „algoritmus" (viz str. 83). Odtud počtáři, kteří podobných návodů používali, se nazývali algoritmikové.

A. SČÍTÁNÍ

V IX. století pronikly indické objevy psaní čísel pomocí devíti znaků a nuly do zakaspických a arabských zemí. Vyvinul se takový způsob uspořádání početních výkonů, že se při počítání postupovalo odleva doprava. Tento způsob se udržel v učebnicích počtů až do XVI.století, někde i déle. Výsledek se zpravidla nadpisoval nad dané sčítance. Odtud také pochází název „summa". Při počítání od levé strany musel počtář některé částečné výsledky korigovat, protože výpočet v nižších řádových jednotkách ovlivnil výsledek v jednotkách vyšších. Tato okolnost nečinila obtíže počtářům indickým, popřípadě ani arabským, kteří počítali na poprášených deskách. Nevhodná číslice se koncem pisátka odstranila (vymazala) a nahradila jinou. Ukažme, jak si počínal počtář při sčítání. Jednotlivé kroky při výpočtu vidíme na následujícím příkladu (součet se tvoří na horním řádku; na desce byl ovšem jen zápis ze sloupce posledního):

6	**8 0**	**8 07**	**8 083**
2 837	2 837	2 837	2 837
3 524	3 524	3 524	3 524
1 722	1 722	1 722	1 722

Když byly později ve středověku početní výkony zaznamenávány na papír, nebylo vymazávání nevhodných výsledků již tak snadné a nahrazovalo se proto škrtáním částečných výsledků a nadepisováním číslic opravených. Čtenář nechť sleduje tento postup na předešlém případě, který jsme přepsali středověkým způsobem:

	8	8	8 8
6	~~6~~ 0	~~6~~ 07	~~6~~ 0~~7~~3
2 837	2 837	2 837	2 837
3 524	3 524	3 524	3 524
1 722	1 722	1 722	1 722

Všimněte si, že výsledek teď čteme na dvou řádcích (platí nepřeškrtnuté číslice). Výpočet je ovšem opět rozložen na jednotlivé kroky, aby postup byl přehlednější a srozumitelnější. Skutečný zápis vypadal tak, jak ukazuje poslední sloupec.

Podstata algoritmu sčítání se po vynálezu indických číslic v podstatě nezměnila. Během staletí se však objevily různé varianty zápisu. Byly podmíněny jednak růzností technických prostředků, kterých se užívalo při psaní (psaní na poprášených deskách, na voskových destičkách, na kůře stromů, na pergamenu, na papíru atd.), jednak tím, že se lidé seznamovali stále podrobněji s indickým způsobem psaní čísel a poznávali hospodárnost a účelnost tohoto systému.

B. ODČÍTÁNÍ

V zápisu odčítání se po proniknutí indického způsobu psaní číslic objevilo rovněž několik variant.

Indové postupovali při odčítání na poprášených deskách stejně jako při sčítání, tj. odleva doprava. Nevhodné částečné výsledky vymazávali a nahrazovali správnými. Postup výpočtu ukazuje následující příklad, v němž odčítáme 824 — 735:

	1	**9**	**89**
824	824	824	824
735	735	735	735

Zápis, který měl počtář na desce, je ve sloupci čtvrtém.

Z tohoto zápisu odčítání se vlivem arabských a evropských matematiků vyvinul ve středověku algoritmus, ve kterém už nebyly částečné výsledky mazány. Výpočet byl opět prováděn od levé ruky k pravé. Postup je patrný ze zápisu příkladu 8 946 — 6 983:

19
~~2~~0~~6~~3
~~8~~9~~4~~6
~~6~~9~~8~~3

Výsledek odčítání 1 963 čteme na dvou horních řádcích.

Vedle tohoto způsobu odčítání se během středověku vyvinuly ještě jiné algoritmy tohoto početního výkonu. Jedním z nich byl

postup, který užíval desítkového doplňku. Desítkovým doplňkem číslic 1, 2, . . ., 9 rozumíme číslici 10 — 1, 10 — 2, . . ., 10 — 9. Zápis početního výkonu odčítání se děje stejným způsobem, jak jej provádíme nyní. Prvý řádek je menšenec, druhý, který podtrhneme, je menšitel, a pod čárou se píše rozdíl. Odčítáme od pravé ruky k levé. Je-li v menšenci větší cifra než pod ním stojící cifra menšitele, pak odčítáme stejně jako při běžném způsobu odčítání. Jestliže však je v menšenci cifra menší než v menšiteli a odčítání nelze takto provést, vychází počtář z identity:

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Vyložme celý postup na příkladu:

$$\begin{array}{r} 62\,315 \\ \underline{47\,836} \\ 14\,479 \end{array}$$

6 od 5 nedovedeme odečíst. Stanovíme desítkový doplněk číslice 6, tj. 10—6, čili 4 a přičteme k číslicí v menšenci, tj. k 5. Součet 9 napíšeme pod jednotky do rozdílu. „Vypůjčenou" desítku přičteme k třem desítkám menšitele (3 + 1 = 4); zase nemůžeme odčítat od výše stojící jedničky v menšenci. Stanovíme tedy opět desítkový doplněk číslice 3 + 1 = 4, tj. 6. Tento doplněk přičteme k číslici 1, která je v menšenci nad trojkou menšitele. Součet 7 napíšeme do rozdílu. Podobně pokračujeme v těch případech, kdy nelze provádět bezprostřední odčítání.

Také český počtář *O. Klatovský* v početnici „Nowe knížky wo poczteech na Cifrý a na lyny" používá desítkových doplňků při odčítání „na cifrách".

C. NÁSOBENÍ

Historie vývoje zápisu násobení je mnohem rozmanitější, než historie algoritmů sčítání a odčítání. Indové, Arabové i některé evropské národy se podílely na vytváření formy zápisu tohoto početního výkonu, až nabyl nynější účelné, hospodárné a jednoduché formy, kterou poznáváme už na národní škole.

Všechny způsoby algoritmu násobení, které spočívaly na indickém číselném systému, vycházely z předpokladu, že počtář dovede používat malé násobilky. Proto učitelé pečovali především o to, aby jejich žáci se naučili pohotově stanovit součiny čísel od 1 · 1 až do 9 · 9. Nejnáročnější učitelé požadovali, aby počtář tyto součiny tvořil zpaměti. Tento požadavek byl však pro počtáře středověku a raného novověku příliš veliký. Hledaly se cesty, které by počítajícímu umožnily užívání násobilky s nejmenší námahou. Za tím účelem byly sestaveny přehledné tabulky malé násobilky, které byly pravidelně v různém uspořádání uváděny v čele kapitol o násobení.

Vznikly ještě jiné metody, které měly usnadnit počtáři užívání celé malé násobilky. Byly hledány návody, jak stanovit součiny „druhé poloviny" násobilky, (tj. součiny od 5 · 5 do 9 · 9) za předpokladu, že počtář dovede stanovit zpaměti součiny čísel menších než 5.

Uvedeme jeden z řady takových způsobů.

Chceme stanovit součin dvou přirozených čísel a, b, když

$$5 \leqq a \leqq 10, \quad 5 \leqq b \leqq 10.$$

Vypočítáme desítkové doplňky obou čísel, tj. stanovíme čísla $10 - a$, $10 - b$. Tyto doplňky vynásobíme. Jednotky součinu těchto doplňků tvoří jednotky součinu čísel a, b; počet desítek součinu $a \,.\, b$ obdržíme, když od součtu $a + b$ obou čísel odečteme 10. Je-li součin doplňků větší než 10, připočteme příslušnou opravu k počtu desítek ve výsledku.

Násobme podle tohoto návodu čísla 6 . 8. Po středověkém způsobu je napíšeme pod sebe:

$$\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{array}$$

Do pravého sloupce pak zaznamenáváme desítkové zbytky. Čísla pravého sloupce vynásobíme: 2 . 4 = 8, obdržíme tak počet jednotek hledaného součinu. Od součtu čísel v levém sloupci odečteme 10, což je počet desítek; součin čísel 6 · 8 dává tedy 48.

Podstatou tohoto způsobu násobení dvou přirozených čísel mezi 5 a 10 je identita $ab = 10(a + b - 10) + (10 - a) \,.\, (10 - b)$.

Na podobném principu spočívá tvoření součinu „druhé poloviny“ malé násobilky pomocí prstů dvou rukou. Tento vtipný způsob násobení bývá někde nazýván „cikánská násobilka“. Počtář má např. za úkol násobit opět čísla 6 . 8. Na jedné ruce vztyčí jeden prst, na druhé tři prsty. (Obecně vždy tolik prstů, o kolik je každý z činitelů větší než 5.) Součet vztyčených prstů pak udává počet desítek součinu, součin nevztyčených prstů (všimněte si, že jsou to desítkové doplňky obou čísel) tvoří jednotky.

Středověký způsob násobení

Indický způsob násobení, při kterém se — podobně jako při sčítání — částečné výsledky vymazaly a korigovaly, byl vhodný, pokud se číslice zapisovaly pisátkem na poprášenou desku. Když se rozšířilo užívání papíru, nebylo mazání neplatných cifer a jejich nahrazování opravenými ciframi ani snadné, ani pohodlné, zvláště když uvážíme obtížnost kontroly výpočtu. Ta pravidelně spočívala při indickém způsobu počítání v tom, že se celý výpočet provedl znovu.

Tyto okolnosti vedly již zakaspické matematiky v IV. století — a pak zvláště evropské počtáře — k takovému uspořádání zápisu násobení, při kterém vymazávání cifer bylo nahrazeno škrtáním a správné cifry byly nadpisovány. Při tomto zápise musel počtář předem pamatovat na to, aby měl nad čísly i pod čísly, která násobí, dost volného místa na zápisy.

Ukažme toto násobení na příkladě, kterým učil německé počtáře tomuto algoritmu matematik *Apianus*: násobíme čísla 4 876 . . 2 395. Začátek zápisu je stejný jako při indickém způsobu násobení:

4876
2 395

Apianus v návodu k tomuto příkladu říká: „Násob nejprve 2 čtyřmi, facit 8. Ty posaď nad 2.

8 **4 8 7 6**
2 3 9 5

Pak řekni 4 . 3 je 12, posaď dvě nad 3, jedničku připočítej k 8, bude 9, škrtni 8 čárečkou, posaď nad ni 9.

9
~~8~~ 2 **4 8 7 6**
2 3 9 5

Řekni 4 . 9 je 36, posaď 6 nad 9 a 3 přičti k 2, facit 5, škrtni 2, posaď 5 nahoru.

9 5
~~8~~ ~~2~~ 6 **4 8 7 6**
2 3 9 5

Potom násob také pět čtyřmi, řekni 4 . 5 je 20, posaď nulu nad 4, 2 přičti k 6, škrtni 6, posaď nad ni 8.

9 5 8 0
~~8~~ ~~2~~ ~~6~~ **4 8 7 6**
2 3 9 5

Potom posuň multiplicant (násobitel) o jedno místo, 5 pod 8, 9 pod 4 etc. A dělej, jak jsi dělal dosud.“

9 5 8 0
~~8~~ ~~2~~ ~~6~~ **4 8 7 6**
2 3 9 5 5
2 3 9

Potud Apianův výklad o násobení dvou vícemístných čísel. Rozepsání jednotlivých kroků, jak jsme je provedli pro snazší porozumění, Apianus neprovádí, nýbrž celý výpočet dává do jednoho zápisu, který reprodukujeme níže:

8
7 ~~7~~
~~6~~ ~~3~~ 0
~~5~~ ~~3~~ ~~0~~
6 ~~3~~ ~~7~~ ~~4~~
~~4~~ ~~9~~ ~~6~~ ~~6~~ 2
1 1 ~~1~~ ~~2~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~0~~
~~9~~ ~~5~~ ~~8~~ 0 0 ~~5~~ 0
~~8~~ ~~2~~ ~~6~~ **4 8 7 6**
2 3 9 5 5 5 5
2 3 9 9 9
2 3 3
2
---
1 1 6 7 8 0 2 0

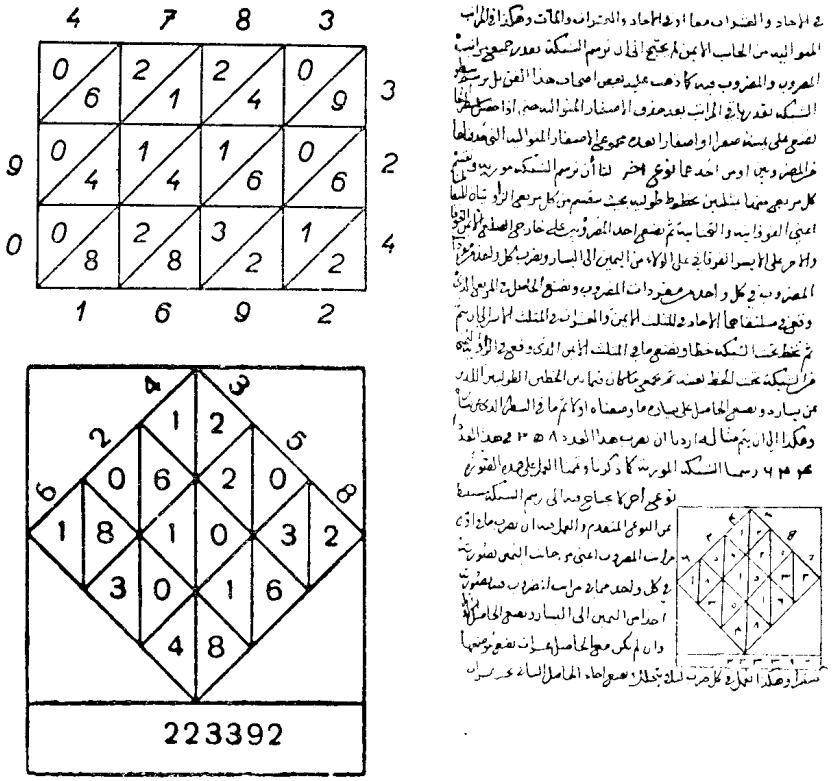
Pro snazší porozumění poznamenáváme, že násobitel byl po posunutí napsán na dvou řádcích, při dalším kroku na třech a posléze na čtyřech řádcích. Výsledek čteme v příslušném pořádku v nepřeškrtnutých číslicích na počátcích a na koncích řádků pyramidy nad násobitelem a nad násobencem. Apianus zapisuje dodatečně ještě jednou celý výsledek pod čárou pod výpočtem. Většinou to však počtáři nedělali a výsledek bylo nutno pracně shledávat v nepřeškrtnutých číslech zápisu. Pro celkový přibližný vzhled obrysu hotového zápisu násobení byl tento algoritmus nazýván „galea" nebo „batello" (loď, člun).

Tento způsob násobení, jakož i další druhy zápisu násobení a dělení (i s různými jmény) nacházíme v knize, kterou napsal r. 1494 florentský matematik *Luca Pacioli* (XV. stol.).

Algoritmus násobení zvaný „gelosia"

Tento algoritmus je velmi starý. Vznikl patrně v Indii ještě před vynalezením nuly. Na obr. 8a jsou tímto způsobem násobena čísla 4 783 × 324. Počtář si nejprve nakreslil čtvercovou síť. Každý čtverec sítě byl úhlopříčkou rozdělen na dvě trojúhelníková pole, levé horní a pravé dolní. Cifry násobence se psaly nad sloupce čtverců sítě, cifry násobitele byly vyznačeny shora dolů na pravé straně vedle sítě. Příslušné součiny byly vpisovány do čtverců sloupců a řádků těch cifer, které počtář právě násobil. Desítky součinu byly zapsány v levém horním trojúhelníku čtverce, jednotky v pravém dolním trojúhelníkovém poli. Po vypsání částečných součinů do jednotlivých polí se sčítaly cifry v pásech ve směru úhlopříček od pravého dolního pole schématu postupně až k jeho levé horní části. Případné počty desítek se přičítaly k součtu cifer v následujícím šikmém pásu. Výsledek násobení četl počtář na levé straně schématu a pod schématem. V našem případě je součin obou čísel 901 692.

Tvar sítě, užívané při tomto algoritmu, připomínal některým italským matematikům mříže v oknech benátských příbytků, obývaných ženami. Proto Luca Pacioli nazval tento způsob násobení



Obr. 8. Násobení zvané „gelosia"

„multiplicare gelosia". (Gelosia znamená žárlivost.) Protože čtvercová síť připomínala také dlaždice, býval tento algoritmus označován též jako „multiplicare per graticola" (násobení po způsobu dlaždice) nebo též „multiplicare per quadrilatero" (násobení ve čtvercích).

Zajímavým způsobem uspořádal tento algoritmus matematik *Džemid ibn Mas'ud ibn Machmud*, lékař z města Kaši (zvaný krátce *Al Kaši*) ve spise „Miftach al-muchitija" (Klíč k aritmetice), vydaném r. 1456. Spis byl věnován „velikému, spravedlivému, šlechetnému sultánovi, který řídí národ, pánu arabských a adžanských sultánů, sultánu obou Východů, útočišti největších sultánů, stínu Alahovu na zemi, vítězi nad vodou a zemí, znamení Alahovu

ve všech světech, tomu, který rozprostírá ubrus míru, šiřiteli spravedlnosti a dobrodiní, ničiteli kořenů zla a pobouření, ochránci měst Alahových na východě i na západě, tomu, pro kterého se otáčí nebe, tomu, před jehož vítězným mečem se v dobách válečných strachy rozžhavuje země, tomu, který získává díky přečistého Alaha, vítězi nad nepřáteli podle milosti jediného, tomu, který má duši čistou a dokonalost lidskou, mrav andělů a povahu Mohamedovu, velkolepost a spravedlnost, smělost a chrabrost, šťastnému a drahému, soucitnému, kterému pomáhá nejlepší z pomocníků, sultánu a synu sultánovu, útočišti pravdy a víry a celého světa, Ulugbekovi, nechť Alah učiní věčnou jeho vládu kalifa a sultána v dědičné čtvrtině světa a rozšíří ve všech světech jeho dobrotu a šlechetnost". Na konci věnování prosí Al Kaši *Ulugbeka*, aby dílo přijal a opravil v něm, co je nesprávné, odpustil chyby a doplnil nedostatky. Toto přání mělo své důvody. Mocný vladař Ulugbek (XV. stol.) byl také znamenitým astronomem, zakladatelem významné observatoře v Samarkandu a autorem na svou dobu přesného katalogu hvězd, tabulek oběhu planet apod. Džemidovo uspořádání algoritmu násobení pochopí snadno čtenář z obr. 8b, 8c.

Jiné způsoby násobení

Další zajímavý způsob zápisu násobení je opět původu indického. Je uveden v knize indického matematika *Bhaskary*, který se narodil r. 1114 n. l.

Ukažme tento způsob na příkladě. Násobíme čísla 9 576 a 4 213. Napíšeme čísla pod sebe:

$$\begin{array}{cccc} 9 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Tvoříme součty součinů číslic podle připojeného schématu; začínáme od pravé ruky a silně psané číslice zapisujeme do výsledku:

$$\begin{aligned} 6 \,.\, 3 &= \mathbf{18} \\ 1 + 3 \,.\, 7 + 6 \,.\, 1 &= \mathbf{28} \\ 2 + 5 \,.\, 3 + 7 \,.\, 1 + 6 \,.\, 2 &= \mathbf{36} \\ 3 + 9 \,.\, 3 + 5 \,.\, 1 + 7 \,.\, 2 + 6 \,.\, 4 &= \mathbf{73} \\ 7 + 9 \,.\, 1 + 5 \,.\, 2 + 7 \,.\, 4 &= \mathbf{54} \\ 5 + 9 \,.\, 2 + 5 \,.\, 4 &= \mathbf{43} \\ 4 + 9 \,.\, 4 &= \mathbf{40} \end{aligned}$$

Součin je tedy 40 343 688.

Výpočet si usnadníme tím, že jednoho činitele (např. násobitele) napíšeme na proužek papíru v obráceném pořádku (3124). Proužek umístíme pod druhým činitelem (násobencem) tak, aby levá krajní číslice na obráceném násobiteli byla pod pravou krajní číslicí násobence:

$$\begin{array}{cccc} 9 & 5 & 7 & 6 \\ & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \; \boxed{4} \end{array}$$

Utvořme součin číslic, které jsou pod sebou, tj. 3 . 6 = 18. Zapíšeme 8 jako poslední číslici hledaného součinu zprava, tj. na místo jednotek (a 1 si pamatujeme). Nyní posuneme proužek o jedno místo nalevo od předešlé polohy

$$\begin{array}{cccc} 9 & 5 & 7 & 6 \\ & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \; \boxed{4} \end{array}$$

a utvořme součet obou součinů číslic, které jsou pod sebou, tj. 3 . 7 + 1 . 6 = 27. Připočteme jednu, kterou jsme si zapamatovali, a dostaneme 28. Zapíšeme 8 jako předposlední číslici hledaného součinu, tj. na místo desítek (pamatujeme si 2). Podobně postupujeme dále. Proužek papíru postupně posunujeme vždy o jedno místo směrem k levé ruce a tvoříme součty ze součinů číslic, které jsou vždy dvě a dvě v jednom sloupci nad sebou. K tomu přičteme číslici, kterou jsme si z předcházejícího součtu zapamatovali. Poslední poloha proužku v našem případě je

$$\begin{array}{cccc} & & 9 & 5 \; 7 \; 6 \\ & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2} \; \boxed{4} \end{array}$$

Při pomocných výpočtech lze tu s výhodou použít sčotů. Částečné výpočty se pak provádějí postupně vždy o jeden drát výše.

Způsob násobení, jak byl na počátku odstavce vyložen, nazvali Italové „multiplicare per crocetta" (crocetta = křížek), nebo „per casella" (skříňka). Někdy bývá nazýváno též „metodou bleskovou". Obratný počtář dosahoval touto metodou v raném novověku správných výsledků s překvapivou rychlostí. Takových počtářů nebylo arci mnoho. Luca Pacioli poznamenává o této metodě, že vyžaduje „trochu více rozumu a fantazie".

Nynější způsob násobení je původu italského. Shledáváme se s ním v jednom spise, který už v roce 1410 napsal *Prosdocimo de Beldomandi.*

D. DĚLENÍ

Algoritmus dělení prodělal obdobné proměny jako algoritmy ostatních početních výkonů. Byl však odedávna považován za algoritmus zvlášť obtížný. Znamenitost matematického vzdělání na mnohých universitách ve středověku byla dokládána tím, že se na nich učilo i dělit.

Nejrozšířenější způsob dělení, který byl v XVI. století užíván, pochází z indického dělení na poprášených deskách. Vymazávání číslic, které počtář nahrazuje jinými, je při tomto způsobu provádění dělení opět zaměněno přeškrtáváním neplatných číslic a nadpisováním cifer, které počtář potřebuje k dalšímu výpočtu. Celý číselný zápis tím nabývá zvláštního tvaru, který tehdejším počtářům připomínal, podobně jako zápis násobení, loďku s kormidlem, stožárem a plachtami, proto se tento způsob dělení nazýval často galea (loďka) nebo batello (člun).

Vyložme tento způsob dělení na příkladu

97 535 399 : 9 876

Počtář zapsal dělence a pod něj dělitele. Jestliže číslo, napsané tolika prvními ciframi dělence, kolik jich měl dělitel, bylo větší než celý dělitel, nebo se mu právě rovnalo, byla první číslice (zleva) dělitele napsána pod první cifrou dělence. Jestliže tomu tak nebylo,

umístil počtář dělitele pod dělence tak, že se první cifra dělitele nacházela pod druhou cifrou dělence. Tedy v našem případě

9 7 5 3 5 3 9 9
9 8 7 6

Nyní byl proveden odhad podílu 9 7 5 3 5 : 9 8 7 6. Přibližná hodnota tohoto podílu je 9. (Nazývejme ji částečný podíl.) Byla zapsána za svislou čáru (nebo za oblouk) vpravo od dělence:

9 7 5 3 5 9 9 | 9
9 8 7 6

Částečným podílem se násobí dělitel a postupně odčítá od dělence. Výpočet se provádí od levé ruky, použité číslice se škrtají. Zaznamenáváme jednotlivé fáze tohoto počtu:

1 6
~~9~~ ~~7~~ 5 3 5 3 9 9 | 9
~~9~~ 8 7 6

0 9
~~1~~ ~~6~~ 3
~~9~~ ~~7~~ ~~5~~ 3 5 9 9 | 9
~~9~~ ~~8~~ 7 6

Počtář odčítá součin 9 . 9 = 81 od 97 (první dvojčíslí dělence) a částečný zbytek nadpisuje nad číslo 97. Škrtá číslice 9, 7 v dělenci a 9 v děliteli. Nyní je součin 9 . 8 odečten od nadepsaného čísla 165 (číslo je psáno na dvou řádcích, škrtnuté číslice se ovšem neuvažují). Pak je tento výpočet proveden i se součiny 9 . 7 a 9 . 6.

8
0 ~~9~~ 7
~~1~~ ~~6~~ ~~5~~ ~~0~~
~~9~~ ~~7~~ ~~5~~ ~~3~~ 5 3 9 9 | 9
~~9~~ ~~8~~ ~~7~~ 6

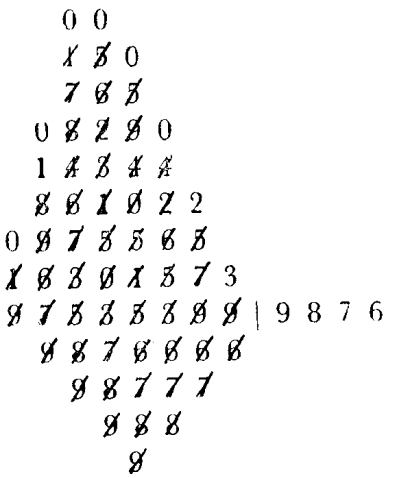
8 6
0 ~~9~~ ~~7~~ 5
~~1~~ ~~6~~ ~~5~~ ~~0~~ 1
~~9~~ ~~7~~ ~~5~~ ~~3~~ ~~5~~ 3 9 9 | 9
~~9~~ ~~8~~ ~~7~~ ~~6~~

Po skončení tohoto výpočtu posunul počtář dělitele o jedno místo vpravo. Zápis dělitele byl nyní proveden na dvou řádcích:

8 6
0 ~~9~~ ~~7~~ 5
~~1~~ ~~6~~ ~~5~~ ~~0~~ 1
~~9~~ ~~7~~ ~~5~~ ~~3~~ ~~5~~ 3 9 9 | 9
~~9~~ ~~8~~ ~~7~~ ~~6~~ 6
9 8 7

Počet se stává obtížnější, protože jak dělitele (9 876), tak částečného dělence čteme nyní na různých řádcích; dělence 8 6 5 1 3 docela na čtyřech řádcích. Výpočet se po odhadu další cifry podílu (8) provádí obdobně, jak bylo vysvětleno dříve.

Počtář ovšem nerozděloval jednotlivé početní kroky do dalších a dalších obrazců, nýbrž nadpisoval, přeškrtával a podpisoval cifry v jednom zápisu. Zápis celého algoritmu pak v našem případě vypadal takto:



Shrneme-li výpočet, obdrželi jsme dělením čísla 97 535 399 číslem 9 876 podíl 9 876. Zbytek 23 čteme z třetí a první řádky nad dělencem (nepřeškrtnuté číslice).

Náš nynější způsob zápisu vzájemného dělení víceciferných čísel pochází z konce XV. století. Hlavní zásluhu o jeho rozšíření má již dříve zmíněný italský matematik *Luca Pacioli.*

5. ZLOMKY

Podobně jako první počátky vzniku přirozených čísel, sahají i počátky vzniku zlomků do dob, které nám nezanechaly přímých svědectví. Lze předpokládat, že tvoření pojmu zlomků a počítání s nimi bylo podmíněno rostoucími potřebami hospodářskými.

Víme dnes, že zlomky vznikaly nejdříve u těch národů, které záhy přešly k usedlému způsobu života. Hospodářské a společenské podmínky života těchto národů vyžadovaly, aby byla měřena pole, objemy nádob, sýpek, dělena kořist nebo úroda, váženy různé předměty. Všechny tyto výkony vyžadovaly vytvoření měrných jednotek i jejich dělení a ruku v ruce s tím se vyvíjel pojem některých zlomků.

Lidé nevytvořili pojem zlomku najednou v celé šíři. Podobně jako se seznamovali postupně s přirozenými čísly, tak také poznávali postupně různé zlomky.

Dějiny matematiky zaznamenávají ve starověku čtyři historicky významná období rozvoje nauky o zlomcích.

I. V Mezopotamii, kde se užívalo šedesátkové číselné soustavy, bylo i počítání se zlomky založeno na šedesátinném dělení. Při zapisování těchto zlomků se užívalo pozičního systému. Šedesátinný způsob zapisování zlomků se udržel ve výpočtech matematiků vedle jiných soustav po celý středověk. Byl předchůdcem počítání s desetinnými zlomky.

II. Nejstarší dochovaná početnice, Ahmesův papyrus, obsahuje jinou svéráznou nauku o zlomcích. Užívá se zde takřka výhradně zlomků s čitatelem jedna. Kromě těchto měla staroegyptská aritmetika ještě znaky pro několik málo jiných zlomků, např. pro $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$. Jiné zlomky vyjadřovali Egypťané jako součty více zlomků o čitateli jedna. Důvod k tomuto těžkopádnému opatření spočíval v symbolice. Zlomek o čitateli jedna se psal v hieroglyfickém písmu tak, že se nad číslem, značícím jmenovatele, udělal znak ⬭, v písmu hieratickém krátká čárka nebo tečka. Zlomek $\frac{1}{10}$ se psal ⬭. Toto označení nebylo však užíváno důsledně. Znak ⬭ neznamenal $\frac{1}{2}$ — jak bychom podle úmluvy očekávali — nýbrž značil zlomek $\frac{2}{3}$. Znak ⬭, který měl značit 1, byl užíván pro $\frac{1}{3}$. Symbol ⬭ značil $\frac{3}{4}$. Teprve později bylo tohoto symbolu užíváno jako znaku pro $\frac{1}{2}$ a zlomek $\frac{3}{4}$ byl od té doby zapisován jako součet $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Podstatnou částí kapitoly o zlomcích v Ahmesově papyru je tabulka, ve které jsou všechny zlomky tvaru $\frac{2}{2n+1}$ (kde n jsou

přirozená čísla, $2 \leqq n \leqq 50$) vyjádřeny jako součty zlomků o čitateli 1 a s různými jmenovateli. Tak například je:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}; \qquad \frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104};$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}; \qquad \frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$$

a poslední zlomek této tabulky

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

Byly vysloveny různé doměnky o tom, proč Egypťané obtížně počítali tuto tabulku a nepovažovali prostě takový zlomek za součet dvou zlomků o stejném jmenovateli a čitateli 1. Tato otázka není však dosud uspokojivě zodpověděna.

Počítání se zlomky o čitateli 1 převzali Řekové a jejich prostřednictvím Římané i Arabové. Tak např. římský spisovatel *Plinius* (I. stol. n. l.) uvádí (podle tehdejších nedokonalých znalostí zeměkoule) velikost Evropy jako $\frac{1}{3} + \frac{1}{8}$, velikost Asie jako $\frac{1}{4} + \frac{1}{14}$ a velikost Afriky jako $\frac{1}{5} + \frac{1}{60}$ velikosti celé země.

Prostřednictvím spisů *Leonarda Pisánského* a jiných matematiků se počátkem XIII. století dostává znalost egyptského počítání se zlomky i do západní Evropy a objevuje se v různých obměnách ve středověkých učebnicích.

III. Ve starověkém Římě nebyla teoretická matematika oblíbena a tak Římané nepřispěli ničím podstatnějším k dalšímu rozvoji matematického myšlení. Jedině v nauce o zlomcích projevili jakousi samostatnost. Většinou se zabývali pouze těmi matematickými otázkami, které vznikaly z praktických potřeb dědického práva, úrokového počtu, obchodního života i zeměměřické a stavitelské činnosti. Počítání se zlomky vycházelo z dělení římské peněžní jednotky „as" na dvanáct uncií. Počítalo se se zlomky o jmenovateli 12 a dalšími, jejichž jmenovatelé byly násobky dvanácti. Tyto zlomky značily původně rozdělení asu, $\frac{12}{12}$ byl jeden as; $\frac{11}{12}$ se nazýval deunx (de uncia — as bez uncie); $\frac{10}{12}$ dextans (de sextans, as bez šestiny asu); $\frac{4}{12}$ se jmenovaly triens (třetina); $\frac{3}{12}$ quadrans (čtvrtina); $\frac{1}{288}$ scriptulum a jeho čtvrtina čili $\frac{1}{1152}$ se nazývala ceratus (odtud naše pojmenování „karát"). Tyto názvy pro díly asu ztrácely pozvolna svůj konkrétní význam. Časem se přenesly

na názvy zlomků, které označovaly i části jiných celků než peněžní jednotky asu.

Římský systém počítání se zlomky ovládal praktické počítání v raném středověku až do XII. století. Nebyl však schopen dalšího vývoje.

IV. Nynější obecný pojem zlomku má své historické kořeny v Indii. Také Indové nejprve počítali se zlomky o čitateli 1, ale již velmi záhy, snad ve IV. století př. n. l., přešli k počítání se zlomky i s jinými čitateli, jako jsou např. $\frac{3}{8}$ a $\frac{2}{7}$. V pracích indických matematiků ze VI. století n. l. je rozvinuta nauka o zlomcích velmi široce.

Indická matematika znala také všechny čtyři početní výkony se zlomky již skoro v té podobě, jak je známe dnes. Již zmíněný matematik *Bráhmagupta* učí např.: „Součin z čitatelů dělený součinem ze jmenovatelů je násobení . . ." Indická nauka o zlomcích proniká prostřednictvím spisů zakaspických matematiků, zvláště Al Chovarizmiho i jiných arabských vědců, do díla *Leonarda Pisánského* a do děl ostatních matematiků XIII. století. Odtud se pak znalost počítání se zlomky rozšířila do celé západní Evropy. Způsob psaní zlomků je u Indů takřka shodný s naším, jen zlomková čára chybí. Celá čísla při psaní čísel smíšených se nadpisovala. Tak např. $2\frac{4}{5}$ se psalo takto: $\begin{smallmatrix}2\\4\\5\end{smallmatrix}$.

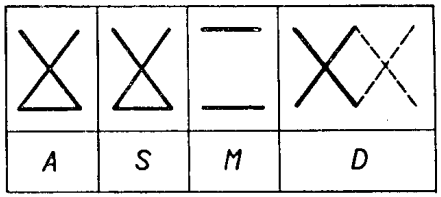
Druhým významným interpretem indického způsobu počtu v Evropě je německý matematik *Jordanus Nemorarius*. Jak v dílech Leonardových, tak v pracích Nemorariových se jeví stopy arabských překladů, z kterých oba čerpali. Zajímavý je způsob, který doporučuje Jordanus při dělení zlomky. Víme, že zlomek se dělí zlomkem, když čitatel dělence se dělí čitatelem dělitele a výsledek se pak lomí jmenovatelem dělence, děleným jmenovatelem dělitele. Jestliže to nelze provést, doporučuje Jordanus Nemorarius násobit čitatele i jmenovatele zlomku, který představuje dělence, součinem utvořeným z čitatele a jmenovatele dělitele. Pak lze vždy dělení provádět. Například:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3.5.7}{4.5.7} : \frac{5}{7} = \frac{3.7}{4.5}.$$

5 85-0-04

Zlomkovou čáru nacházíme už u Leonarda Pisánského. Nazývá ji „virgula". Poznal ji u některých arabských matematiků (poprvé ji patrně užívá *Abu Zagarija Alhassar*). Trvalo to nicméně až do XVI. století, než byla zlomková čára všeobecně zavedena. Počtáři ve středověku se zabývali víc rozšířením počtu se zlomky a jeho propagací, než prohloubením jeho teoretického obsahu. Jak ze symboliky zlomků, tak i z pojetí mizí úplně charakter vzniku tohoto pojmu jakožto původního označení měr a vah, z něhož tento počet vznikl v Babylónii, v Římě i jinde.

Počítání se zlomky je předkládáno v dogmatické formě, jako návod bez jakýchkoli důkazů a opodstatnění. Přitom jsou doporučovány různé pomůcky k zapamatování těchto „obtížných pravidel". Tak např. *Petrus Apianus*, astronom Ingolstadtské university, uvádí v r. 1532 schématické pravidlo v grafické úpravě pro všechny čtyři početní výkony se zlomky (viz obr. 9). K tomu



Obr. 9. Schéma početních výkonů se zlomky u Apiana

poznamenává „Item tímto uvedeným způsobem můžeš se všechny výkony se zlomky lehko naučit a tak si je snadno zapamatovat". (Poznamenejme, že písmena A, S, M, D v obrázku 9 znamenají latinské názvy početních výkonů: Addition, Subtraction, Multiplication, Division, tj. sčítání, odčítání, násobení, dělení.)

Prvý souhrn vědomostí ve stručné, přehledné a přitom správné formě podává nizozemský matematik *Simon Stevin* (XVI. stol.) v knize „Arithmétique" vydané v r. 1585. Stevin se obracel ve svém spise jen na vědecky školené čtenáře. Mezi obecným lidem nebylo počítání se zlomky oblíbeno a platilo za nejtěžší kapitolu matematiky vůbec.

Již zmíněný františkánský mnich *Luca Pacioli*, profesor matematiky ve Florencii, se pozastavoval nad tím, proč při násobení zlomkem menším než 1 je výsledek menší než násobenec, zatím co v bibli stojí psáno: „Rostež a množte se a naplňte zemi!" (Množit — archaický termín pro násobit.) Dnešního čtenáře překvapí okolnost, že násobení zlomků se neděje vždy podle pravidla dnes užívaného, třebaže je tak jednoduché. Leonardo Pisánský (a před ním mnozí Arabové a Řekové) předpisuje při násobení zlomku zlomkem, aby čtenář utvořil součin obou čitatelů a výsledek dělil napřed jedním a pak druhým jmenovatelem.

Krácení a rozšiřování zlomků bylo známo již velmi dávno. V jednom francouzském rukopise z r. 1484 byly už tyto úpravy prováděny zcela moderním způsobem a při dělení čitatele a jmenovatele týmž číslem byl společný dělitel stanoven známým Euklidovým algoritmem. Nicméně populární německý počtář *Adam Ries* (XVI. stol.) radí, aby krácení zlomku bylo prováděno tak, že se nejdříve čitatel i jmenovatel bude dělit dvěma, a to tak dlouho, pokud to půjde u obou čísel, pak třemi, pěti, atd. Primitivnost tohoto návodu nelze však svádět na samy autory početních příruček XVI. století, jako spíše na matematické schopnosti, které mohli u svých čtenářů předpokládat. Až na některé výjimky nebyla však ve většině středověkých učebnic vůbec žádná zmínka o tom, že násobením nebo dělením čitatele i jmenovatele týmž číslem se velikost zlomku nemění.

Příklady ve školních sbírkách byly zpravidla voleny tak, aby výsledky byly velmi jednoduché. Tuto vlastnost nacházíme již u příkladů, které kolem roku 850 n. l. předkládá k řešení indický matematik *Mahavira*. Tento vědec dává svým žákům k sečtení např. tyto zlomky:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{36}+\tfrac{1}{180}=1;\ \tfrac{8}{15}+\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{21}+\tfrac{7}{36}+\tfrac{11}{63}=1.$$

Dnešní nevhodný žákovský zvyk, volit při slučování zlomků za společného jmenovatele součin jmenovatelů všech sčítanců bez ohledu na jejich společného dělitele, zaznamenáváme také již u indických matematiků. Ani *Aryabhata*, ani *Bráhmagupta*, ani *Bhaskara* nehledají společného dělitele a počítají prostě se souči-

nem všech jmenovatelů jakožto se společným jmenovatelem.

Ještě v XVI. století byla značná nejednotnost v psaní čísel. Užívaly se jak zápisy pomocí číslic římských (kterým se tehdy u nás říkalo „figury české"), tak zápisy pomocí číslic indických (tehdy zvaných „figury latinské", poněvadž byly rozšiřovány hlavně kupci, přicházejícími z Itálie).

Tato okolnost má svůj odraz též v tehdejších učebnicích. Roku 1577 vydává český matematik *Jiří Goerl z Goerlštejna* knihu pod názvem „Arithmetica to gest knijžka početnij neb uměnij počtůw na lynách a Cifrách skrze exempla a mince rozličné wšem w handlech, w auřadech, a w hospodářstwij se obiragijcým welmi užitečná a prospěšná." Autor v ní říká, že „někteří neumějí jináč psáti čísla lámaná, než figurami českými". Pro ty pak je uveden vzor přepisu. Lámání českými figurami se převede na latinské takto: $\frac{ij}{iij}$ značí $\frac{1}{2}$; $\frac{iiij}{iiij}$ je $\frac{3}{4}$, $\frac{vj}{viij}$ $\frac{5}{6}$ atd.

6. DESETINNÁ ČÍSLA

K vyjadřování přesných kvantitativních vztahů užíváme dnes všeobecně desetinných čísel. Hospodárná symbolika, umožněná desetinnou čárkou, činí z desetinných čísel účinný, pohodlný a snadno použitelný nástroj veškeré početní praxe. I toto zařízení, které nám dnes připadá tak snadným, rodilo se zvolna za spolupráce několika národů, které si předávaly své poznatky a zdokonalovaly je.

Předchůdce desetinných čísel tvoří zlomky o jmenovateli šedesát, které se vyvinuly v Babylónii. Měly tehdy za úkol vyjádřit určité míry a váhy. V této úloze známe šedesátkovou soustavu zlomků u nás i dnes, a to v mírách časových i úhlových. Hliněné tabulky se záznamy tohoto druhu jsou dochovány z třetího tisíciletí před n.l.

Lze se domnívat, že v pradávné době měly zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{10}$ tvořivou funkci při volbě šedesátky jako základu početní soustavy. Dokazuje to např. německý badatel *O. Neugebauer*, který studuje sumerskou soustavu měr délkových, plošných, vah a měr dutých.

Původní, u většiny národů prvotně rozvinutý systém desítkového počítání do 100, bylo třeba na podkladě nějaké zvolené základní míry (snad loktu či míle) uvést v soulad s dělením v menší míry, hlavně $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 a 10. Zde je patrný již důležitý činitel 6, čímž vedle čísla 100 nabývá důležitého významu i číslo 60 jako společný násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 a 30. Toto jednotící stmelení všech měr číslem 60 „zdá se být důsledkem vědomého regulativního zasáhnutí státní moci" (citováno z Neugebauera).

Je přitom ovšem velmi pravděpodobné, že bohatá dělitelnost čísla 60 měla podstatnou měrou vliv na volbu tohoto čísla jakožto základu šedesátkové soustavy a že tedy určité zlomkové jednotky spolupůsobily. Astronomické i hospodářské potřeby, které si vynutily rozšíření početního oboru vůbec, způsobily též rozsáhlé užití zlomkového počtu o základu 60. Tento způsob počítání se rozšiřuje do jiných zemí, současně s ním se však poznenáhlu šíří přesvědčení, že podstatnou věcí při praktické použitelnosti systému není číslo 60 jako jmenovatel, nýbrž okolnost, že i v oboru hodnot pod jednotkou lze zachovat princip místních hodnot. Ve středověku se stále ještě mísí při počítání se zlomky soustava šedesátková s desítkovou. Hospodárnější úpravu početní techniky vyžadují především rozsáhlé propočty trigonometrické nutné pro potřeby astronomie i mořeplavectví. Pro ně bylo třeba uskutečnit přepočtení starých ptolemaiovských celotětivových tabulek na indické sinusové hodnoty. Vídeňský profesor *Georg z Peuerbachu* (XV. stol.), který se podjal tohoto úkolu, volí základní kružnici o poloměru 600 000, aby mohl potřebná dělení provádět s dostatečnou přesností. Jeho žák a pomocník *Regiomontanus* (občansky Joh. Müller, XV. stol.) volí poloměr ještě desetkrát větší. Při výpočtu nových tabulek užívají oba autoři ještě směsi soustavy šedesátkové s desítkovou a přepočítávání z jedné soustavy do druhé. Teprve při sestavování dalších tabulek r. 1467 se Regiomontanus vědomě obrací k způsobu počítání na podkladě ryze dekadickém.

Ačkoli se volbou stále většího poloměru (až do 10^{15}) přesnost výpočtů stupňovala, přece zůstávala vypočtená čísla (siny a tangenty) čísly celými. Ještě nebyl učiněn onen nezbytný krok, kterým bylo oddělení „představené" nuly — naše „žádná celá", nebo prostě

celých jednotek od následujících desetin. Byl-li zvolen poloměr kružnice např. 600 000, jako v tabulkách Peuerbachových, byl sin 1° = 10 470, přičemž si byl Peuerbach vědom, že toto číslo je jen přibližné. Teprve slavný francouzský matematik *François Viète* (žijící jako státní úředník a právník v Paříži a v Tours v XVI. století) prokázal přesvědčivě vhodnost a užitečnost desetinných zlomků před šedesátinnými a zavedl oddělování míst za naší desetinnou čárkou tím, že je dával tisknout menšími typy. Příležitostně užíval také svislé čáry, kterou odděloval celky od zlomků.

Rozhodující význam desetinných zlomků pro praktickou potřebu vyložil obsáhle holandský inženýr a obchodník *Simon Stevin* (XVI. stol.). Roku 1585 uveřejnil ve vlámském jazyce spisek „De Thiende", který vyšel později i francouzsky jako dodatek spisu „Practique d'Arithmétique" pod názvem „Desítková soustava, pomocí které lze všechny výpočty v denním životě lehce provést celými čísly bez užití zlomků". Na sedmi stránkách uvádí Stevin hodnoty 10 000 000 peněžních jednotek, splatných za 1, 2, 3,... až 33 let při složeném úrokování jedním, dvěma až šestnácti procenty. Počítá i se zlomky procent. Třebaže slib, který Stevin v názvu spisu vyslovil, je trochu příliš odvážný a přehnaný, je přece význam spisu pro rozšíření počítání tohoto druhu rozhodující. Stevin jako první si plně uvědomuje význam soustavy desítkové, neboť ke konci svého spisu se přimlouvá, aby všechny tehdejší vlády zavedly desetinný systém v penězích, váhách i měrách, aby „nový způsob počítání mohl být úplně využit". Ačkoli se prý v přítomnosti nedá tato myšlenka plně uskutečnit, doufá Stevin, že si v budoucích pokoleních nedá lidstvo výhody tohoto nového užitečného objevu ujít. Stevin doporučuje desetinné dělení také pro měření úhlů. Teprve Velká francouzská revoluce tyto významné požadavky inženýra Stevina uskutečnila.

Zápis desetinných čísel provádí Stevin takto:

0,3759 píše jako	3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④
8,937	8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③

Později užívá Stevin i jiné způsoby psaní desetinných čísel.

Vědomé oddělování desetinných míst od celků při psaní desetinných čísel provedl poprvé pražský matematik švýcarského původu *Joost Bürgi* (XVI. a poč. XVII. stol.). Dosvědčuje to jeho rukopis „Arithmetika", uchovaný v *Keplerově* pozůstalosti v knihovně v Pulkově u Leningradu a dále i svědectví Keplera samotného. Kepler odděluje celky od desetinných zlomků oblou závorkou a říká: „Tento způsob počítání se zlomky vymyslel Joost Bürgi k počítání hodnot sinů." Podobných pokusů o oddělení celků od desetinných zlomků bylo ovšem v historii desetinné čárky celá řada.

Desetinná čísla začala být používána širšími vrstvami teprve tehdy, když byl splněn Stevinův požadavek zavedení desetinného dělení do peněžnictví, měr a vah. U nás byl metrický systém zaveden až v roce 1871.

7. ÚMĚRY

Počátek nauky o úměrách byl položen v Babylóně. Babylónské poznatky převzali a dále rozvedli Řekové. Pythagorejská matematická škola rozeznávala úměry aritmetické, tj. vztahy tvaru $a - b = c - d$, úměry geometrické $a : b = c : d$, tedy úměry v našem slova smyslu a úměry harmonické $a : c = (a - c) : (b - c)$. Nejdokonalejší úměra podle pythagorovců byla úměra, utvořená ze dvou čísel a, b, jejich aritmetického průměru (tj. výrazu $\frac{a+b}{2}$) a jejich harmonického průměru (tj. čísla $\frac{2ab}{a+b}$), tedy úměra

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b .$$

Aritmetické i geometrické úměry měly u Řeků velký význam. Do jisté míry měly v řecké matematice stejně významnou roli, jakou asi mají dnes rovnice. V páté knize svých „Základů" podává *Euklides* nauku o úměrách, kterou buduje na geometrickém podkladě; tato část Základů obsahuje poučky o úměrách v té formě, jak se jich užívalo po celý další starověk, středověk a značnou část novověku.

Budeme sledovat ve zkratce vývoj definice úměry v řecké matematice. V pythagorejské škole se považovaly čtyři veličiny tehdy za

úměrné, jestliže první veličina byla takovým dílem nebo naopak násobkem druhé veličiny, jakým dílem nebo násobkem veličiny čtvrté byla veličina třetí. Tato definice zahrnovala ovšem jenom poměry těch čísel, která dnes nazýváme racionální. Tento nedostatek odstranily další úvahy řeckých matematiků, zejména znamenitého *Eudoxa*. Získané poznatky pak shrnul *Euklides* v V. knize Základů.

Třetí, čtvrtá a pátá definice této knihy říkají: „Poměr dvou veličin je jistý vztah mezi stejnorodými veličinami podle jejich velikostí."

„Pravíme, že veličiny tvoří poměr, když násobek jedné může být větší než násobek druhé."

„Pravíme, že veličiny jsou ve stejném poměru, první ke druhé jako třetí ke čtvrté, jestliže libovolný násobek první a třetí je současně větší, roven nebo menší než libovolný, ale pro obě stejný, násobek veličiny druhé a čtvrté, zachováme-li příslušné pořadí."

Dnes bychom řekli: Úměra $a : b = c : d$ platí tenkrát, jestliže pro všechna přirozená čísla m, n je

$$ma > nb \text{ a } mc > nd$$

nebo

$$ma = nb \text{ a } mc = nd$$

nebo

$$ma < nb \text{ a } mc < nd.$$

Tento způsob definování rovnosti poměru dvou čísel je jedním z vrcholů, kterých dosáhla stará řecká matematika. Pokračováním této nauky je známá definice *Dedekindových* řezů, jimiž se dnes definují iracionální čísla.

Ve středověku tvořila nauka o úměrách jednu z nejdůležitějších kapitol matematiky. Pro nedostatek vhodné symboliky bylo však počítání s úměrami velmi obtížné. Bylo proto třeba vytvořit aspoň pro některé častěji užívané poměry vhodné názvosloví.

V dnešní době dáváme před úměrami přednost funkčnímu vztahu přímé úměrnosti $y = ax$. Také nauka o rovnicích zvolna zatlačuje užívání úměr takřka ve všech oborech do pozadí.

8. TROJČLENKA, POČET ŘETĚZOVÝ, SPOLKOVÝ APOD.

Už od pradávna tvořilo počítání s veličinami přímo a nepřímoúměrnými největší část prakticky užívané matematiky. Leč obecná znalost úměr a potřebná matematická symbolika nebyly ve středověku a v raném novověku takové, aby jich široké masy obchodníků, řemeslníků a ostatních lidí, kteří podobné úkoly řešili, mohli používat jako početního nástroje. Vznikly proto záhy různé mechanické početní předpisy, čili — jak se dříve říkalo — praktiky nebo regule, pomocí nichž byly úlohy s úměrnými veličinami řešeny. Tyto předpisy se během času obměňovaly, dostávaly různá jména a mnohé z nich po určité době zanikly.

Základem většiny těchto početních předpisů byla tzv. trojčlenka (regula de tri). Trojčlenkou se rozuměl určitý předpis, podle kterého ze tří daných čísel se dalo vypočítat číslo čtvrté. Přitom dvě z daných čísel tvořila poměr, který se rovnal poměru čísla třetího a hledaného.

Autoři prvních předpisů, kterých bylo při řešení podobných úloh použito, byli Indové. Indické vědomosti poznal prostřednictvím zakaspických a arabských matematiků nám již známý slavný italský matematik *Leonardo Pisánský*, který počátkem XIII. století napsal významnou učebnici, nazvanou „Kniha o abaku" (Kniha o počtech). V tomto spise bylo věnováno důležité místo úlohám o trojčlence a úlohám, které s trojčlenkou souvisí. Leonardo zde probral velké množství praktických příkladů; čtenář měl jejich čtením a řešením získat potřebnou zkušenost a dovednost pro počítání samostatných úloh. Uveďme příklad jednoduché úlohy z „Knihy o abaku":

„100 rotulí (pisánská jednotka váhy) jistého zboží stojí 40 penízů; kolik stojí 5 rotulí téhož zboží?" Podle návodu Leonardova napsal počtář na levou stranu tabulky zboží, na pravou pak zaznamenal jeho váhu. Pod toto číslo napsal váhu zboží, jehož cenu počítal:

40 penízů	100 rotulí
	5 rotulí

Spojil pak šikmou čárou levé horní číslo s pravým dolním. Vynásobil tato dvě čísla a jejich součin dělil číslem třetím. Podle tohoto postupu činila cena 5 rotulí zboží v našem případě 2 peníze. Podobně tedy počítal počtář cenu zboží vždy, když znal jeho množství.

Složená trojčlenka byla často řešena postupem, který Leonardo nazývá „regula kata". Tento název bývá překládán jako „počet řetězový". Úlohy, které zde Leonardo řeší, jsou dokladem složitých peněžních a obchodních poměrů na počátku XIII. století. Tak se zde uvádí úloha: 12 římských penízů platí 31 pisánských, 23 pisánské platí 12 janovských penízů, 13 janovských penízů stojí 12 turinských, 11 turinských platí 12 penízů barcelonských. Kolik barcelonských penízů dostaneme za 15 římských? Zápis provádí Leonardo následujícím způsobem:

Barc.	Tur.	Jan.	Pis.	Řím.
	12	13	31	12
12	11	12	23	15

Lomenou čarou spojená čísla se vynásobí a výsledek se dělí součinem čísel zbývajících.

Počet barcelonských penízů se rovná $\frac{12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 31 \,.\, 15}{11 \,.\, 13 \,.\, 23 \,.\, 12}$.

Úkoly tohoto druhu se objevují takřka ve všech učebnicích praktických počtů středověku a raného novověku. Tak v české početnici z roku 1577, kterou napsal *Jiří Goerl z Goerlštejna*, nacházíme podobný příklad: „Item 6 penízů polských platí 1 peníz uherský, 4 uherské 12 vídeňských a 4 vídeňské 3 peníze bílé české. Otázka: Kolik polských má dáti za 40 penízů bílých českých?" Vypočítejte tuto úlohu způsobem užívajícím pravidla řetězového. Dostali jste 106 $\frac{2}{3}$ penízů polských?

Rozmach obchodu italských měst v první polovině druhého tisíciletí měl také za následek rozšíření italského způsobu řešení různých úloh, s obchodem souvisících. Rovněž italské učebnice počtů se rozšířily po celé Evropě a s nimi i různé praktiky početní v nich popisované. Již v učebnici Leonardově kromě trojčlenky a počtu řetězového se vykládá také počet spolkový, počet směšovací aj.

Rozsáhlé užití trojčlenky a snaha po takovém počítání, které by co nejméně zaměstnávalo počtářovu mysl, vedly k formalistickému rozdělení způsobů výpočtů na rozmanité počty, regule a praktiky, které se mechanicky učily a mechanicky prováděly. Počtář *Johann Widmann z Chebu* rozeznává ve své početnici z roku 1489 celkem 28 různých takových praktik.

Teprve italský matematik *Nicolo Tartaglia* (XVI. stol.) roku 1556 provedl nové a rozumnější seskupení těchto různých počtů. Mnohé z nich se vyskytují dodnes v učebnicích tzv. politické aritmetiky.

Postup při řešení praktických úloh pomocí trojčlenky byl často upravován. Soubor některých těchto pravidel byl nazván vlašskou praktikou. Ta pak zvláště v XVII. století — kdy se již obecně ujal indický způsob počítání i větší znalost desetinných čísel mezi řemeslníky a obchodníky — doznala takového rozšíření, že se stala přímo charakteristickou pro praktické užití matematiky v tomto století. Leč již významný německý matematik *Michael Stifel* (XVI. stol.) na rozdíl od většiny současných počtářů roku 1545 poznamenává, že se lze bez vlašské praktiky obejít.

Úlohy, které nazýváme souhrnným jménem počet spolkový, se objevují již v nejstarších početnicích. Tak v Ahmesově papyru z XVIII. století před n. l. se řeší úlohy, které mají ráz úloh ze spolkového počtu, jako např.: Je známa celoroční sklizeň; má se vypočítat množství úrody připadající na každý den v roce.

Ve středověku se spolkovým počtem řešily úlohy, při kterých byl počítán zisk osob, jež se zúčastnily určitými vklady na nějakém obchodu. V prvé české dochované učebnici *Ondřeje Klatovského*, která vyšla r. 1530, čteme příklad: „Tři se složili v tovaryšství, první dal 20 kop, druhý 33 kop, třetí 45 kop, kterouž sumou vydělali 35 kop. Co se dostane z toho každému?" Podobné úlohy se vyskytují již od vydání „Knihy o abaku" ve většině učebnic.

V kapitole o počtu spolkovém důležité místo zaujímá řešení problémů, které vyplývají z práva dědického. Takové úlohy se objevují již v prvém století n. l. Někdy bývají vymýšleny velmi složité dědické poměry. Tak např. velmi starou je úloha: „Otec umřel krátce před narozením svého dítěte. V závěti rozdělil dědictví takto: narodí-li se mu syn, obdrží dvojnásobný podíl než matka,

narodí-li se mu dcera, obdrží polovinu matčina podílu. Matka však porodila dceru a syna. Jak má být nyní dědictví ve smyslu závěti rozděleno?" Již za císaře Hadriana řešili matematikové tuto úlohu tak, že rozdělili dědictví na 7 dílů, syn dostal 4 díly, matka 2 a dcera 1. Úloha se objevuje později v mnohých učebnicích počtů. Matematik *Luca Pacioli* (XV. stol.) rozšiřuje tento „problém" na trojčata a posléze až na pět současně narozených dětí různého pohlaví. Počátkem XVIII. století autoři početnic takové úlohy zavrhují jako nesmyslné a bezúčelné.

Již ze starověku známe úlohy, které se později řešily „počtem směšovacím". V jednom starořeckém epigramu se říká: Královská koruna váží 60 váhových jednotek. Byla vyrobena ze zlata, mědi, zinku a železa. Zlato a měď tvoří dohromady $\frac{2}{3}$, zlato a zinek $\frac{3}{4}$, zlato a železo $\frac{3}{5}$ celkové váhy koruny. Kolik kterého kovu je v koruně obsaženo?

Podobné úlohy převzal též Leonardo do své knihy s látkou čerpanou od arabských a zakaspických matematiků. Úlohy se zde dělí ve dvě skupiny. V první skupině jsou úlohy, v nichž se počítá jakost slitiny kovů, utvořené z několika slitin známé jakosti, ve druhé skupině pak byly úlohy hledající ze známé kvality slitiny jakost složek, z nichž daná slitina vznikla. Zásluhou Leonardovou bylo, že převáděl váhové poměry kovů ve slitinách na čísla celá. Také tento počet vešel ve známost cestou obchodních styků v ostatní Evropě a vyskytuje se v různých učebnicích středověku i novověku. Zvláštní oddíl tvořil „počet zlata a stříbra", který zvláště v složitém středověkém mincovnictví měl značný význam.

Počet zisku a ztráty tvořil až do XVII. století různorodou a neuspořádanou kapitolu v učebnicích kupecké aritmetiky. Řešení úloh se většinou opíralo o trojčlenku; jen zřídka bylo užito procent. Teprve XVII. století vneslo určitý systém do úloh tohoto druhu. V odstavcích pojednávajících o tomto počtu bylo zkoumáno, jak zakoupené zboží dále prodávat, aby byl docílen určitý zisk, nebo jaký byl zisk či ztráta při uzavření určitého obchodu, nebo jaká prodejní cena musí být stanovena, aby byl dosažen v předepsaném čase určitý procentový zisk apod.

V učebnici z roku 1732 je čtenář varován před častými chybami,

kterých se počítající dopustí. Tak se zvláště zdůrazňuje, že při koupi zboží za 100 tolarů je při desetiprocentním zisku zboží prodáváno za 110 tolarů; když však je toto zboží dále prodáváno se ztrátou 10 tolarů — tj. opět za 100 tolarů — nečiní už ztráta 10 %, ale jen $9\frac{1}{11}$ %.

Složité poměry různorodých měr, vah a peněžních jednotek v různých obchodních střediscích ve středověku a raném novověku nutily spekulující obchodníky k rozsáhlým výpočtům. Ty se týkaly toho, jak nejvýhodněji provádět poukazy peněz, zda přímo z jednoho města do druhého nebo přes různá obchodní spojení, aby se přitom využilo výhodných měnových kursů a aby tak byl zisk co největší. Zavedení jednotných měr a vah a zjednodušení peněžních jednotek činilo tyto vykořisťovatelské praktiky stále nesnadnějšími. V naší době se mohou takové obchody odehrávat jen na bursách kapitalistických spekulantů. Země se socialistickým hospodářstvím jim učinily přítrž navždy.

9. VLASTNOSTI PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Vlastnosti přirozených čísel poutaly lidskou pozornost již v dávných dobách. Zpočátku přisuzovali lidé těmto vlastnostem mystický a náboženský význam; škola Pythagorova posléze tvrdila, že principem všech věcí je číslo. Během dalšího vývoje se však poznatky o přirozených číslech množily a postupně očišťovaly od všeho idealistického nazírání. Zásluhou nejpřednějších matematiků různých zemí byla vybudována zvláštní nauka zvaná teorie čísel, jejíž jedna část se zabývá vědeckým zkoumáním vlastností přirozených čísel. O tuto teorii se především zasloužili francouzští matematikové *Pierre de Fermat* (XVII. stol.) a *Adrien Maria Legendre* (XVIII. stol.), dále ruský matematik švýcarského původu *Leonard Euler* (XVIII. stol.) a německý matematik *Karl Friedrich Gauss* (XIX. stol.). V poslední době je to zvláště sovětská číselně teoretická škola pod vedením akademika *I. M. Vinogradova*.

Jedním z prvních poznatků, které lidé o přirozených číslech učinili, bylo rozlišování čísel kardinálních a ordinálních. Již ve

starých egyptských a sumerských nápisech jsou obsažena slova svědčící o tom, že již tehdy byl tento dvojí význam čísel znám. Slova „kardinální" a „ordinální" jsou původu latinského a byla v tomto významu zavedena římskými gramatiky v polovině prvního tisíciletí n. l.

Řekové rozlišovali už prvočísla a čísla složená a provedli i důkaz, že prvočísel je nekonečně mnoho (*Platón*, IV. stol. př. n. l. a po něm *Euklides* ve IV. stol. př. n. l. v „Základech").

Zkoumání otázky, jak jsou rozložena prvočísla v posloupnosti přirozených čísel, je jedním z nejobtížnějších problémů matematiky vůbec, který dodnes není vyřešen. O některé částečné výsledky při jeho řešení se velmi zasloužili ruští a sovětští matematikové. Pro výpočet nevelkých prvočísel bývá užíván návod, známý pod jménem „síto Eratosthenovo" (*Eratosthenes z Kyrene*, III. stol. př. n. l.).

Řekové se zabývali také výpočtem nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

I dělitelnost čísel některými prvočísly zajímala lidstvo již dávno. Egypťané znali patrně některá pravidla pro dělitelnost dvěma. Velmi záhy byla též zkoumána dělitelnost přirozených čísel číslem devět. Vyšetřovali ji patrně již Řekové ve III. století n. l. Příslušné pravidlo se objevuje v arabských učebnicích a jejich prostřednictvím se dostává do středověkých početnic evropských. Dělitelnost třemi byla patrně známa již velmi dávno, v matematické literatuře se však objevuje teprve počátkem XIII. století v knize „Liber abaci". Pravidla o dělitelnosti dvěma a pěti plynou bezprostředně z podstaty desítkové soustavy, byla tedy jistě známa již Indům; v matematické literatuře je však nelze před Leonardem Pisánským doložit.

Známé pravidlo o dělitelnosti číslem jedenáct pochází z první poloviny XVIII. století. Nicméně v jedné učebnici z roku 1767 je vysloveno velmi těžkopádně: „Jestliže dělíme součet cifer na místech sudých jedenácti a součet číslic na místech lichých rovněž jedenácti a jsou-li zbytky, které při těchto děleních vzniknou, stejné, jest číslo dělitelné jedenácti."

Byla odvozena ještě mnohá další pravidla pro zkoumání dělitelnosti čísel různými prvočísly. Většinou jsou však tak složitá, že

je výhodnější uposlechnout rady *Leonarda Pisánského*, který doporučuje, aby bylo provedeno skutečné dělení.

Devítková zkouška správnosti výpočtu je jedním z pradávných příkladů praktického užití teorie čísel. *Al Chovarizmi* užívá běžně devítkové zkoušky pro zkoumání správnosti násobení. Též geniální filosof, lékař, matematik, astronom a učitel všech vědců, Tadžik *Ibn Sina* (X. stol.), obecně známý pod jménem *Avicena*, pocházející z dnešního Uzbekistánu, zkoumá správnost některých svých výpočtů pomocí devítkové zkoušky.

Západní matematici poznali devítkovou zkoušku zároveň s celou matematickou kulturou indických, zakaspických a arabských národů. Ve středověkých učebnicích a v učebnicích raného novověku byla devítková zkouška považována za velmi důležitou. Je však nespolehlivá a dnes je pouze zajímavou číselně teoretickou kuriositou.

10. AXIÓMATISACE ARITMETIKY

Od počátku svého vzniku vyrůstala aritmetika živelně z úkolů praxe a vnitřních potřeb vědy. K axiómatickému vybudování aritmetiky došlo mnohem později než u geometrie.

V XIX. století byla vypracována a dokončena nauka o reálných číslech. Tento úkol vyřešili úspěšně zejména matematici *Karl Weierstrass*, *Charles Méray*, *Georg Cantor* a *Richard Dedekind*. Na podkladě úvah, spojených s těmito pracemi a na základě výsledků práce matematiků dob předchozích — zvláště českého *Bernarda Bolzana* — byl pak vybudován pojem množiny. Německý matematik Cantor si prvý uvědomil, že tento nový pojem je základním pojmem matematiky. Množinou se podle *Cantora* rozumí soubor nějakých věcí libovolné podstaty; tyto věci se nazývají prvky množiny. Teorie množin studuje pak takové jejich vlastnosti, které nezávisí na jakosti prvků. Na množinovém základě vybudoval Cantor teorii kardinálních a ordinálních čísel.

Cantorova teorie množin — jako každá nová matematická disciplína — byla zpočátku zavrhována mnohými konzervativními

matematiky jako nesrozumitelná, ba docela i falešná. Cantorovi bylo vytýkáno, že přišel se svou teorií příliš brzy apod. Všechny tyto námitky měly svůj původ v tom, že teorie množin nebyla založena na axiómatickém podkladě, a proto některé její poznatky vedly při naivním uvažování ke sporům. Vyskytli se docela i někteří matematikové, kteří tvrdili, že teorie množin by měla být úplně vyloučena ze souboru matematických věd.

Tyto rozpory odstranil počátkem XX. století německý matematik *E. Zermelo*, který vybudoval axiómatiku teorie množin. Ta se pak stala východiskem při aritmetické výstavbě mnohých matematických disciplín, zejména též aritmetiky. Proti myšlence vybudování pojmu přirozených čísel na teorii množin byly uplatňovány mnohé námitky. Tvrdilo se, že pojem množiny předpokládá již pojem iterace (opakování) a pojem přirozeného čísla. V těchto pojmech byly spatřovány základy matematického myšlení. Mnohé teorie základů aritmetiky opravdu vycházely z pojmu posloupnosti přirozených čísel. Přesto je nutno připustit, že pojem konečné množiny předchází pojmu čísla. Již kvočna například pozná změnu množství kuřat, aniž by dovedla vyjádřit jejich počet. Podobné příklady lze uvést také na příkladech chápání určitého množství u malých dětí a primitivních lidí, jak jsme se o tom zmínili již dříve (viz str. 35). Vytvoření univerzálního pojmu množiny, nezávislého na čase a prostoru, předpokládá již vyspělý stupeň abstrakce.

Axiómatické základy nauky o přirozených číslech položil italský matematik *G. Peano* r. 1889.

Přirozená čísla jsou charakterizována podle Peana těmito pěti axiómy:

1. 1 je přirozené číslo.
2. Každé přirozené číslo n má jednoho nástupce n'.
3. Vždy je $n' \neq 1$.
4. Platí-li $n' = m'$, pak platí také $n = m$.
5. Budiž $\mathfrak{M}$ množina přirozených čísel těchto vlastností:
   a) 1 patří do $\mathfrak{M}$,
   b) patří-li m do $\mathfrak{M}$, pak i m' patří do $\mathfrak{M}$.

Potom je $\mathfrak{M}$ množinou všech přirozených čísel.

Na počátku XX. století byly vybudovány axiómatické systémy pro obor všech reálných čísel (*David Hilbert*), které současně definují sčítání a násobení těchto čísel.

Roku 1930 vydal německý matematik *E. Landau* knihu: Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen und komplexen Zahlen) [Základy analysy (Počítání s celými, racionálními, iracionálními a komplexními čísly)].

V ní je poprvé vybudována bez mezer teorie racionálních, reálných a komplexních čísel, která se v podstatě opírá o teorii přirozených čísel založenou na Peanových axiómech.

Definování nových druhů čísel pomocí dvojic čísel bylo provedeno ve XX. století. *K. Weierstrass* vytvořil teorii celých čísel jako teorii uspořádaných dvojic čísel přirozených, *J. Tannery* r. 1894 vytvořil teorii zlomků jako teorii uspořádaných dvojic celých čísel. Předtím však již r. 1835 vybudoval anglický matematik *W. R. Hamilton* teorii komplexních čísel jako teorii uspořádaných dvojic čísel reálných.

6 85-0-04

III.

ALGEBRA

1. VZNIK ALGEBRY

Počátky matematických poznatků, které shrnujeme pod společným názvem algebra, můžeme sledovat přibližně od doby kolem roku 2 000 př. n. l. Z těchto časů se dochovaly některé úlohy, které nazýváme dnes souborně rovnicemi. Formulace těchto úloh i způsob jejich řešení se měnily s vývojem matematického myšlení a matematických prostředků. Podstatou zůstával stále požadavek stanovení neznámého čísla, které by vyhovovalo určitým podmínkám.

V dobách, kdy lidé tvořili pouze značky pro čísla a kdy nebyly ještě známy znaky pro početní výkony ani znaménko rovnosti, byly všechny vztahy mezi matematickými veličinami vyjadřovány slovy a větami. Toto období vývoje algebry bývá někdy nazýváno obdobím verbalistickým. Sem patří úlohy z doby asi 2 000 let před n. l., psané klínovým písmem na hliněných destičkách, objevených v Babylónii. Číňané kladou do tohoto období původ úloh některých svých sbírek; ve stejné asi době vznikl původní text Ahmesova rukopisu v Egyptě.

Rovněž Řekové nerozvinuli v první polovině prvního tisíciletí před n. l. algebraickou symboliku, třebaže položili velmi zdařilé základy geometrie a objevili významné vlastnosti přirozených čísel. Přesto však řešili se zdarem i mnohé úkoly, které dnes zařazujeme do oboru algebry; užívali však přitom převážně pojmů a úvah geometrických. Mluvíme proto o geometrické algebře Řeků.

Teprve *Diofantos* napsal soustavný spis o rovnicích, zvaný Aritmetika. V tomto díle užil některých symbolů, které dnes můžeme nazvat algebraickými. Tak zavedl symbol pro odčítání (str. 98), dále symboly mocnění (str. 101) a zejména označil neznámou jediným znakem ς. Diofantem bylo zahájeno druhé období vývoje algebry, kdy některé vztahy mezi matematickými veličinami byly posud ještě popisovány větami, jiné byly už dost důsledně vyjadřovány zvláštními symboly. Nazýváme je proto obdobím synkopickým. Trvá asi do konce XV. století n. l., to je do doby, kdy vývoj matematiky dospěl k zavedení operačních znamének (znaky pro sčítání, odčítání, násobení, dělení, znak pro rovnost), kdy byla do matematiky přijata písmena ve významu čísel, zavedeny důsledně exponenty apod.

Nejvýznačnějším matematikem tohoto druhého období je tádžický matematik *Abu Abdalah Muhamed ben Musa al Chorezme* (stručně zvaný *Al Chovarizmi*). Žil v IX. století n. l. a pocházel z chanátu Chorezemského (nynější Tádžická SSR). Byl pozván kalifem Almasurem do Bagdádu, aby tu překládal práce řeckých a indických matematiků. Bylo mu také svěřeno měření poledníkového stupně a řada jiných důležitých prací. Napsal dva matematické spisy, které mají rozhodující význam pro rozvoj matematiky v arabském světě a jeho prostřednictvím též pro rozvoj matematiky v Evropě. Oba spisy vznikly v letech 800 až 825 n. l. Vycházejí z řeckých a indických poznatků, zejména poznatků Bráhmaguptových. První spis „Aritmetika" počíná v latinském překladu slovy: Algoritmi dicit (Al Chovarizmi praví). Slovo „algoritmus" (polatinštěné jméno Al Chovarizmiho) bylo přijato za označení určitého přesného souboru předpisů, „které umožňují úplně mechanicky řešit všechny úlohy určitého druhu". Zejména tak označujeme předpisy pro provádění nějakého početního výkonu. Tak např. mluvíme o algoritmech násobení a dělení a rozumíme tím předpisy, podle kterých se tyto výkony písemně provádějí. Obsah druhé knihy Al Chovarizmiho je v podstatě základem algebry. Nazývá se „Aldžebr v'almukabala". Spis je uvedením do užité matematiky a do nauky o rovnicích, kterou Al Chovarizmi vykládá na řadě příkladů. Slovo Aldžebr (tj. doplnění) znamenalo převedení zápor-

ných členů z jedné strany rovnice na druhou, m kabala (vyrovnání) značilo sečtení členů na téže straně rovnice. Učebnice Al Chovarizmiho byla přeložena také do latiny a stala se do značné míry základem středověké literatury algebraické. První část jejího názvu „aldžebr" se ponenáhlu stala názvem celé nauky, tj. algebry. Ve středověku měla algebra ještě celou řadu jiných jmen, pocházejících z arabského pojetí nauky o rovnicích: Ars magna (tj. velké umění), kdežto aritmetika se nazývala ars minor — malé umění, praktika spekulativa, ars rei (res znamená věc a pak neznámou), ars rei et census (census je čtverec neznámé), arte della cosa (cosa se nazývala neznámá), regula della cosa, ars cossica, ars cosse, cossa. Němečtí počtáři v XV. a XVI. století se nazývali také cosisté.

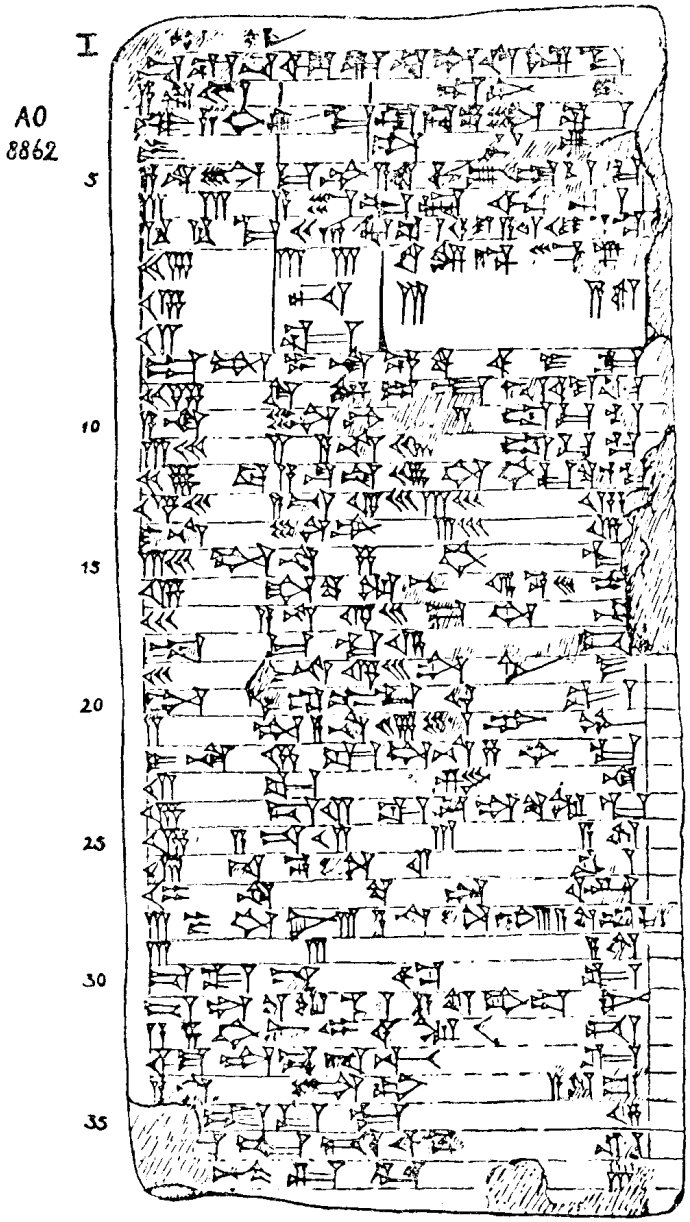
V třetím období používá algebra znamének pro matematické operace, počítá s písmeny ve významu čísel a užívá exponentů. Toto období bývá proto nazýváno obdobím symbolickým a trvá od konce XV. století až dosud.

Čtenář je možná zvědav, jak asi vypadal algebraický zápis v období, kdy ještě nebylo dnes běžných algebraických symbolů kromě znaků pro čísla.

Obr. 10 nám představuje hliněnou tabulku nalezenou v Senkerehu. Tabulka pochází ze starobabylónské říše a z doby panování dynastie Hammurapi (asi 2 000 let př. n. l.). Je na ní zaznamenána úloha, která vyžaduje, aby byly stanoveny rozměry i obsah jistého obdélníku. Přitom jsou vyjádřeny určité podmínky, kterým mají strany a obsah obrazce vyhovovat. Dále je v tabulce vyložen způsob řešení této úlohy a na posledních čtyřech řádcích je provedena zkouška správnosti řešení.

Text tabulky je tento:

„Délka, šířka. Délku a šířku jsem znásobil a tak jsem udělal obsah. Opět to, oč je délka větší než šířka, jsem přičetl k obsahu a (obdržel jsem) 3,3. Opět délka a šířka sečteny (činí) 27.



Obr. 10. Zápis slovní úlohy klinovým písmem

Délka, šířka, obsah (je) kolik?

27	3,3	součty
15		délka
12		šířka
3,0		obsah

K tvému počítání: 27, součet délky a šířky, k 3,3 přičti; (je) 3,30. 2 přičti k 27 (je) 29. Děl 29 na dva díly 14; 30krát 14; 30 (je) 3 . 30; 15.

Od 3,30;15 odečti 3,30; rozdíl (je) 0;15. Kvadratický kořen čísla 0; 15 je 0; 30. Číslo 0; 30 přičti k prvému 14; 40; (je) 15 (jako) délka.

0;30 od druhého 14;30 odečti; (je) 14 (jako) šířka. 2, které jsi přičetl k 27, od 14, šířku odečti; (je) 12 (jako konečná šířka). Délku 15, šířku 12 jsem násobil. 15krát 12 (je) 3,0 (jako obsah). 15 délka, 12 šířka.

Jedna je (o) 3 větší. 2 k 3,0 obsahu, přičti, 3,3 (je výsledek)."

Trpělivý čtenář již patrně pochopil, že čísla, která jsou v textu uvedena, musí být čtena v soustavě sexagesimální. Tak číslo 3,3 (na obr. 10 na 6. řádku na levém kraji) představuje $3 \,.\, 60 + 3 = 183$. Pak je také snadné uvážit, že $29 : 2 = 14{,}5$, což zapisujeme ako 14;30 v soustavě sexagesimální ($30 = 60 : 2$). Podobně i součin 14; 30 krát 14; 30 = 3,30; 15 pochopil čtenář jako

$$14{,}5 \,.\, 14{,}5 = 210{,}25 = 3 \,.\, 60 + 30 + \tfrac{1}{4}.$$

V dnešní symbolice — označíme-li délku x a šířku y — představuje tato téměř čtyři tisíce let stará úloha požadavek řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} xy + x - y &= 183 \\ x + y &= 27 \end{aligned} \qquad (1)$$

(čísla na pravé straně jsou ovšem v soustavě desítkové).

Z návodu řešení, které v dalších řádcích uvádí starověký počtář, je zřejmé, že radí nahradit šířku y pomocnou šířkou $y' = y + 2$, což vede k jednodušším rovnicím:

$$xy' - (x + y' - 2) = 183, \quad x + y' - 2 = 27$$

čili k soustavě:

$$xy' = 210, \quad x + y' = 29. \qquad (2)$$

Redukce systému (1) na systém (2) je v babylónském textu provedena lakonicky řádky:

$$27 + 3{,}3 = 3{,}30,$$
$$2 + 27 = 29.$$

Řešení systému $xy' = P$, $x + y' = a$ provádí babylónský počtář postupem, který v naší symbolice vyjádříme vztahy: $x = \frac{1}{2}a + t$; $y' = \frac{1}{2}a - t$, $t = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - P}$. Tato formule ovšem uvedena není. Byl to však ustálený postup, který byl prováděn na řadě úloh nejen v tomto příkladě, ale i v mnoha jiných babylónských algebraických textech.

Druhá ukázka algebraické úlohy z období verbalistického pochází z Ahmesova papyru.

Papyrus, jak víme, obsahuje kromě jiného skupinu 40 úloh, které dnes obvykle řešíme rovnicemi. Úloha č. 25 této skupiny zní:

„Množství (hau), ku kterému přičtena polovina, je 16." (Množství znamená neznámou; bylo označováno hieroglyfem, který bývá čten „hau".

Tuto a podobné úlohy řeší Ahmes metodou, kterou dnes nazýváme metodou falešného předpokladu.

Dejme tomu, že hledané „hau" je 2.

Polovina tohoto množství je 1.

Součet množství a jeho poloviny je 3.

Nyní je potřebí zjistit, kolikrát je součet 3 (který podle textu úlohy byl utvořen z falešného předpokladu, že neznámá je 2) menší než součet, který je dán v úloze, tj. 16. Dělíme tedy 16 : 3. Protože egyptské dělení a násobení spočívalo na zdvojení a půlení, utvořil počtář posloupnost

$$\begin{aligned} 1 \,.\, 3 \ldots\ & 3 \\ 2 \,.\, 3 \ldots\ & 6 \\ 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ & 12 \end{aligned}$$

Další zdvojení by už vedlo k součinu, který je větší než dělenec 16.

Proto se počtář uchyluje ke zlomkům.

$$\tfrac{2}{3} \text{ ze } 3 \ldots 2$$
$$\tfrac{1}{3} \text{ ze } 3 \ldots 1$$

Nyní vybere z této posloupnosti počtář ty členy, které tvoří na pravé straně součet 16. Protože $16 = 1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 2 \,.\, 3 + \frac{1}{3} \,.\, 3$ (čili dnešním stručným způsobem zápisu $16 = 5\frac{1}{3} \,.\, 3$), bude se také skutečné „hau" rovnat falešnému předpokladu 2, s kterým uděláme stejnou operaci jako s třemi, tj.

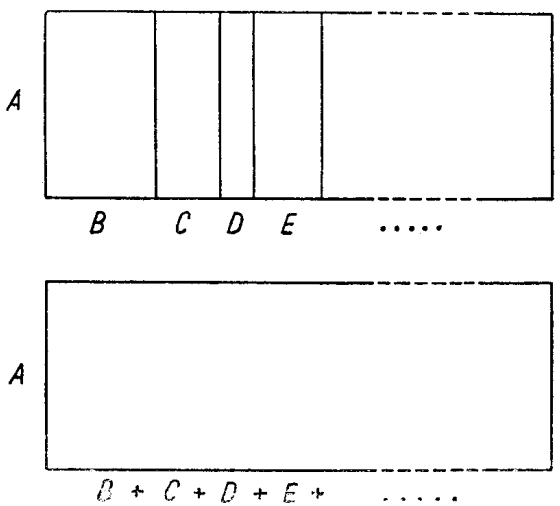
$$\text{„hau"} = 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 2 + 2 \,.\, 2 + \tfrac{1}{3} \,.\, 2 = 10\tfrac{2}{3}.$$

V naší dnešní symbolice bychom vyjádřili uvedenou rovnici takto:

$$x + \frac{x}{2} = 16.$$

Za falešného předpokladu, že $x' = 2$, by byl součet $x' + \frac{x'}{2} = 3$; protože $x : x' = 16 : 3$, je $x = \frac{16}{3}x' = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$.

Ukázky geometrické algebry Řeků nacházíme zejména v Euklidových „Základech". V prvních deseti větách druhé knihy Základů jsou pomocí geometrických prostředků vyloženy věty, které můžeme algebraicky zapsat těmito identitami:



Obr. 11. Geometrická algebra u Euklida

Věta 1. je geometrickým vyjádřením vztahu (obr. 11)

$$ab + ac + ad + \ldots = a(b + c + d + \ldots)$$

Věta 2: $ab + ac = a^2$ (když $b + c = a$) a věta 3: $ac = bc + c^2$ (když $a = b + c$) jsou zvláštními případy věty 1. Příslušný obrázek si jistě nakreslí čtenář sám.

Věta 4., která je v Základech doprovázena obrázkem, je geometrickou interpretací vzorce $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, který je znám ze všech dnešních učebnic, v nichž se učí o dvojmoci součtu.

Geometrická algebra byla Řeky vybudována do značné dokonalosti. Řečtí matematikové řešili kvadratické rovnice i rovnice třetího stupně, používajíce k tomu geometrických prostředků.

Jestliže tedy projevili staří Řekové v tolika směrech matematického myšlení takovou tvořivou pohotovost, jsou na místě otázky: Proč nerozvinuli učení o algebře do větší šíře, proč nezavedli počítání s písmeny, kterému byli tak blízko svými geometrickými úvahami a konečně proč se v úvahách geometrické algebry neobjevuje nikde větší mocnitel než 3 (s výjimkou Diofanta).

Vyložili jsme už, že řecká číselná symbolika byla alfabetická. Písmenům abecedy byl kromě jejich symbolického významu hláskového přisouzen ještě význam určitých přirozených čísel. Nelze tedy očekávat, že by se týmž písmenům dostalo ještě dalšího významu jakýchkoli čísel ve smyslu nynějšího způsobu počítání s písmeny. Lze snad namítnout, že např. Euklides v Základech označuje celkem obecně koncové body různých úseček písmeny a že tedy stejně dobře mohl počítat s těmito symboly jako s čísly. Tu však je nutno si uvědomit, že pro řeckou matematiku byly operace s úsečkami operacemi širšími než operace s pouhými čísly. Číslem totiž řecký matematik rozuměl jen čísla přirozená, někdy snad též zlomky, ačkoli pod pojmem zlomku spatřoval už zpravidla poměr dvou čísel. Každé přirozené číslo a konec konců i každý zlomek dovedl znázornit úsečkou při libovolné volbě délkové jednotky. Naprosto však neplatilo obráceně, že každou úsečku uměl řecký matematik vyjádřit číslem pro jakoukoli zvolenou jednotkovou úsečku. Úhlopříčka čtverce nebo úhlopříčka krychle se sice daly přesně sestrojit, když byla dána strana příslušného čtverce nebo hrana krychle —

nedaly se však vyjádřit jako jejich násobky v číslech přirozených ani ve zlomcích. A přece veškerá pravidla geometrické algebry řecké platila i pro tyto úsečky, protože byla odvozena prostředky geometrickými. Nezdálo se proto žádoucí na tomto stavu věcí něco měnit.

Geometrická algebra řecká měla svůj základ v úvahách, které prováděli matematikové babylónští. Starobabylónský příklad uvedený na str. 84 mluví o délce, šířce, jejich součinu a o vztazích mezi těmito veličinami. Je zřejmé, že to je geometrická interpretace algebraických výrazů x, y a $x \,.\, y$, které spojuje text určitými operacemi. Rovněž v řecké geometrické algebře byla čísla pokládána za úsečky, součin představoval obsah obdélníka, druhá mocnina obsah čtverce, součin $x \,.\, y \,.\, z$ měl význam objemu kvádru, trojmoc byla spojena s představou objemu krychle apod.

Pro čtvrtou mocninu ovšem taková představa možná nebyla. Proto se také řecká geometrická algebra nemohla zabývat úvahami o výrazech vyššího stupně než třetího.

Pokrok v „algebraisování algebry" učinil Diofantos. V knize Aritmetika označuje neznámou jedním písmenem (je to prvé užití písmena ve významu čísla — byť neznámého), užívá zvláštních symbolů a názvů pro mocniny neznámé a nebojí se ani mocnin vyšších než třetích (viz článek „Mocniny" na str. 101).

Al Chovarizmi je první arabský matematik, který psal o algebře. Úroveň spisů Al Chovarizmiho je na tehdejší dobu neobyčejně vysoká, a proto vzniká otázka o pramenech, které ovlivnily vyspělost této arabské algebry. Vedle rozhodujícího vlivu indických vědeckých pramenů — zejména v oblasti číselné symboliky a úprav algoritmů početních výkonů — projevují se zřejmě silné vlivy geometrické algebry řecké, ale také už i vlivy Diofantovy Aritmetiky. Tyto souvislosti se stanou tím zřetelnějšími, když uvážíme, že v době kalifa Al Mansura (754—775) a za vlády Harun ar Rašida (786—809) a Al Mamuna (813—833) byli povoláni mnozí vědci indičtí, perští, řečtí, aby překládali vědecká díla do arabštiny. Tato řeč se stávala stále zřetelněji společnou řečí vzdělanců mnohých zemí středního východu a později i zemí afrických, ležících kolem Středozemního moře a Španělska.

2. POČÁTKY POČÍTÁNÍ S PÍSMENY

V druhé polovině třetího století n. l. označuje *Diofantos z Alexandrie* neznámou zvláštním symbolem. Říká v úvodu ke své Aritmetice: „Číslo, které ... obsahuje pouze neznámý počet jednotek, se nazývá prostě neznámou (*αλογος αριδμος*, *alogos aritmos*) a označuje se ς." Je to první pokus označit číslo — ovšem číslo neznámé — písmenem.

Také *Leonardo Pisánský* v první polovině XIII. století používal někdy písmen jako symbolů pro čísla. Písmeny vyjadřuje např. ve třetí části své knihy „Liber abaci" čísla při výkladu devítkové zkoušky správnosti při sčítání. Podobně též Leonardo vykládá pomocí písmen v deváté části obecný příklad na užití „regule sex quantitatum" (pravidla šesti veličin). Nejprve počítá příklad s čísly: 5 koní spotřebuje v devíti dnech 6 váhových jednotek ovsa. V kolika dnech spotřebuje 10 koní 16 téchže váhových jednotek ovsa? Tento příklad pak Leonardo rozebírá v následující podobě: a koní spotřebuje b ovsa v c dnech, d koní spotřebuje e ovsa v f dnech. Leonardo tvrdí, že součin čísel $.\, a \,.\, e \,.\, c$ se rovná součinu čísel $.\, d \,.\, b \,.\, f$. Usoudíme snadno, že tomu tak je, když např. vyjádříme, že denní spotřeba jednoho koně je vždy stejná, totiž

$$\frac{b}{a \,.\, c} = \frac{e}{d \,.\, f}.$$

Jinak lze také říci, že platí $e : f = db : ac$. Leonardo ovšem úměru v této formě nepíše (tento způsob zápisu nezná), ale vyjadřuje ji slovy: „Složení (compositio) poměru prvního čísla e k druhému číslu f je vytvořeno ze čtyř zbývajících čísel, přičemž db tvoří první člen (anterendens), ac druhý člen (consequentes).

Symbol $.\, a \,.\, e \,.\, c$ v Leonardově výkladu sám o sobě neznamená součin. Ten je tu vyjádřen slovem. Účelem teček je jen rozlišení algebraického výrazu od slovního. Leonardo užívá často písmen také v obecných výkladech o řešení kvadratických rovnic.

Velmi zhusta používá písmen ve svých úvahách také Leonardův současník *Jordanus Nemorarius* (†1237?). Příležitostně nacházíme písmena ve významu čísel ve spisech, které napsal ve XIV. století biskup *Nicolo Oresme z Lisieux*.

Všechny tyto pokusy však nelze považovat za počátek počítání s písmeny v našem slova smylu. Nebyl splněn důležitý předpoklad pro tento počet — nebyly totiž zavedeny anebo aspoň dostatečně užívány znaky pro početní operace.

Jordanus Nemorarius např. vyjadřoval součet dvou čísel tak, že je psal prostě vedle sebe. Výsledek tohoto počtu označoval dalším písmenem a stejně i pro výsledky všech následujících operací musel volit stále nová a nová písmena. Tím ovšem zanikla hlavní výhoda počtu s písmeny, totiž jeho přehlednost.

3. ZNAKY POČETNÍCH VÝKONŮ

Jak jsme si řekli už dříve, byly početní výkony ve starých spisech vyjadřovány jen slovně. Až do XVI. století n. l. nedospěl myšlenkový vývoj v matematice tak daleko, aby se početní výkon mohl vyjádřit symbolem. (Výjimkou je $\overline{\ }$ jako symbol odčítání v Diofantově „Aritmetice" (III. stol. n. l.). Podobně se u něho vyskytuje už i symbol ν pro označení mocniny.

Tak píše *Leonardo Pisánský*: „Si vis multiplicare radicem de 5 et radicem radicis de 10 per radicem de 6 et radicem radicis 12." (Přeloženo do češtiny a dnešní symboliky: Když chceš $\sqrt{5} + \sqrt[4]{10}$ násobit $\sqrt{6} + \sqrt[4]{12}$.) Tento latinský citát ukazuje názorně, jak zdlouhavé a nepřehledné bylo tenkrát vyjadřování matematických operací. Časté opakování stejných pojmů vedlo matematiky k různým způsobům zkracování. Leonardo užívá ve svých spisech pravidelně slůvek „et" a „minus". Ve spisech, které vyšly v pozdější době, se užívá zhusta výrazů „plus" a „minus". U mnohých matematiků jsou operace sčítání a odčítání vyjadřovány zkratkami p a m.

V tištěných knihách se objevují znaménka + a — ve druhé polovině XVI. století, poprvé v knížce „Behende und Hübsche Rechnung auf alle Kauffmanschaft" (česky: Zručné a hezké počty pro všechno kupectvo), kterou napsal a vydal v Lipsku roku 1489 *Johann Widmann* z Chebu. Vedle znaku „—" vyskytuje se ve Widmannově spise slovo „minus" jen dvakrát. Pro sčítání užívá vždy jen slova „und", slovo „plus" nemá nikde.

V první české tištěné početnici *Ondřeje Klatovského* „Nowe knížky wo počztech na Cifrý a na lyny" z roku 1530 se ještě znaménka + a — nevyskytují, slova „plus" a „minus" však ano. Zato už nacházíme symboly pro sčítání a odčítání v knížce *Jiřího Goerla z Goerlštejna* „Arithmetica to gest knijžka početnij neb uměnij počtův na lynách a cyfrách skrze exempla a mince rozličné wšem w handlech w auřadech a w hospodařstvij se obiragijcich welmi užitečná a prospěšná".

Původ znamének pro sčítání a odčítání posud zjištěn nebyl. Mnozí se domnívají, že znaménko + vzniklo z běžného zápisu slůvka „et". Znaménko odčítání — bývá odvozováno ze zkratky slova „minus", vzniklé asi v XV. století v Itálii. V kupeckých zvyklostech XV. století bylo v Itálii zavedeno vyjadřování vah a cen tak, že byly stanovené sumy zaokrouhleny nahoru, váha např. na počet centů, načež byly přebývající libry odečteny. Tak váha 3 centy 91 liber byla vyjádřena jako 4 centy minus 9 liber apod. Takový zápis byl vyznačován křídou na odesílaných bednách, které pak šly do celého světa. Protože italské obchodní a početní zvyklosti byly směrodatné pro obchodníky ostatních zemí, je celkem pravděpodobné, že nedbalé značení beden podobnými zápisy bylo přejato do obchodních počtů a odtud přešlo i do vědecké symboliky raného novověku.

V některých spisech z počátku XVII. století je odčítání vyjádřeno znaménkem ÷, aby se tak odlišilo od znaménka značícího pomlčku ve větě. V anglických spisech se někdy tohoto znaménka užívá pro dělení.

Pro označení násobení a dělení byly záhy užívány obdobné zkratky jako pro „et" a „minus". Násobení bylo označeno písmenem **M** (z latinského multiplicare), dělení se psalo písmenem **D** (dividere). Ležatý křížek zavedl anglický farář *Wiliam Oughtred* (XVI. až XVII. století).

Tečka jako symbol násobení se vyskytla několikrát ve vývoji matematické symboliky, zpravidla však zase brzy zanikla bez ohlasu. Přišla příliš brzy. Teprve *Leibniz* zavedl toto označení uvědoměle. V jednom svém spise říká: „2 . 3 significat bis tria"

(2 . 3 značí dvakrát tři); podobně dále „Notae divisionis $\frac{a}{b}$ vel $a : b$" (Znamení dělení $\frac{a}{b}$ nebo $a : b$). Rovněž vyjádření součinu prostým napsáním dvou faktorů vedle sebe se vyskytlo několikrát ve vývoji znamének matematických a zase zaniklo. Zejména němečtí cossisté, kteří se na sklonku XV. století zasloužili o vytváření symbolické algebry a kterou nazývali „regula della cossa", používali tohoto jednoduchého označení součinu. Podobně psal součin také nizozemský matematik *Stevin*, Francouz *Girard* a Angličan *Oughtred*.

Také dělení bylo vyjadřováno zprvu slovy, později zlomkovou čárou. Do Evropy ji zavedl podle arabských vzorů *Leonardo Pisánský*. Cossisté jí hojně užívali ve svých algebraických úvahách již v obecné formě. V jednom mnichovském rukopisu z poloviny XV. století nacházíme tyto výrazy:

$$\frac{100}{1\ ding}, \text{ což značí nynější } \frac{100}{x},$$

$$\frac{12\ res\ et\ 45}{1\ census\ et\ 3\ res} \text{ čili dnešní } \frac{12x + 45}{x^2 + 3x} \text{ apod.}$$

Náš čtenář si z uvedených zápisů už vyloží význam jednotlivých slov.

Pokusy o zavedení dvojtečky jako znaménka pro dělení nacházíme rovněž několikrát ve spisech různých matematiků. Angličan *John Pell* užívá symbolu ÷, který, jak již bylo řečeno, nacházíme i dnes v anglických knihách. Leibnizovu zásluhu o zavedení tohoto symbolu jsme už připomněli.

Znak rovnosti byl v nynější podobě přijat teprve po několika méně zdařilých pokusech. Poprvé jej nacházíme ve spise „The Whetstone of witte" (Brousek vtipu) z r. 1557, v kterém osobní lékař anglického krále *Robert Recorde* říká, že nic není shodnějšího než dvě rovnoběžky. Ve Francii bývala často rovnost vyjadřována dvěma svislými rovnoběžkami, zejména též proto, že u *François Viety* (XVI. století) symbol $a = b$ znamenal buď $a - b$ nebo $b - a$, podle toho, bylo-li $a > b$ nebo $b > a$. Vieta sám vyjadřoval rovnost slovem „aequare".

Descartes ve svých spisech, zejména ve slavném díle „Géometrie" (1637), užívá pro rovnost znaku ∞, který se pak v tomto významu

objevuje i u některých Descartesových stoupenců. Později ho anglický matematik *John Wallis* začal užívat pro označení nekonečna.

Rovněž znaky nerovnosti se vyskytly v různých podobách. Francouzský matematik *Pierre Hérigone* vydal roku 1634 spis „Cours mathématique", kde vztah „a je větší než b" vyjadřuje symbolem $a3|2b$. Význam symbolu $a2|3b$ jistě pochopí už čtenář sám. Pro rovnost $a = b$ se pak snadno odvodí např. symbol $a2|2a$, kterého také opravdu Hérigone užíval. Oughtred měl pro slovo „větší" symbol $\sqsubset$ a pro „menší" symbol $\sqsupset$.

Žádný z těchto symbolů nenašel však u ostatních matematiků použití. Nynější označení nerovnosti pochází od Angličana *Harriota* z r. 1631.

Dnes již každý žák sedmé třídy zachází docela samozřejmě s různými druhy závorek při operacích s algebraickými výrazy. Závorky totiž hrají velmi podstatnou úlohu už při základních úpravách mnohočlenů. Proto není bez zajímavosti, že v historii matematiky zaznamenáváme zrod první závorky při počítání s odmocninami. Kulaté závorky se objevují v *Tartaglijově* spise „General trattato" (1656).

Užívání závorek se ovšem neprosadilo najednou. Během vývoje se objevila řada jiných opatření, která měla stejný účel. Rovnici

$$\{[(y - 4) . y + 5] . y - 12\} . y + 17 = 0$$

zapisuje Newton takto:

$$\overline{\overline{\overline{y - 4}y + 5}y - 12}y + 17 = 0.$$

Tyto horizontální linky byly zpravidla užívány v XVII. století tam, kde dnes užíváme závorek.

4. POČÍTÁNÍ S PÍSMENY VE VÝZNAMU ČÍSEL

Největší zásluhu o důsledné zavedení písmen ve významu čísel do algebraických úvah má už několikrát jmenovaný francouzský matematik *Francois Viète*, zvaný též *Vieta*. Ve spise „Logistica

speciosa" zavádí důsledně označení písmen ve významu čísel. Aby rozeznal veličiny hledané (neznámé) od daných, navrhuje, aby dané veličiny byly označeny souhláskami (B, C, G, ...), veličiny hledané pak samohláskami (A, E, I, O, ...). Užívání písmen velké abecedy je zřejmě převzato z řecké geometrické algebry, kde se počítalo s úsečkami, obdélníky a jinými geometrickými útvary (obr. 11). Tyto obrazce byly označovány písmeny velké řecké abecedy. Písmen malé abecedy nemohl řecký matematik dobře použít, protože kromě svého vlastního významu znamenala ještě přirozená čísla. V řecké geometrické algebře byla také důsledně dodržována zásada homogenity, to znamená, že se sčítaly úsečky s úsečkami, obsahy s obsahy a objemy s objemy. Z algebraického stanoviska se tedy operovalo s výrazy, v kterých všechny členy byly buď lineární, nebo kvadratické, nebo kubické. Výrazy vyšších stupňů se vyskytnout nemohly, protože — jak už víme — pro ně nebylo opory v geometrické představě. Řeckému požadavku zásadní homogenity zůstával věren i Vieta. Velkými písmeny označené veličiny nejsou sice veličiny geometrické, ale přece jen veličiny s určitým rozměrem, který v celém výrazu musí být stejný. Přitom učinil Vieta veliký pokrok tím, že se neomezoval na tři rozměry čili na výrazy třetího stupně, nýbrž počítal až i s výrazy devátého stupně. Jestliže se ve Vietových úvahách objevují zápisy, které dnes značíme prostě $a + zb$, značí je Vieta A *planum* + Z *in* B; spatřuje tedy zřejmě v čísle A obsah, v číslech Z a B úsečky. Podobně počítá s těmito veličinami:

$$\text{Oporteat } \frac{\text{A } \textit{plano}}{\text{B}} \text{ adderere Z, Summa erit } \frac{\text{A } \textit{planum} + \text{Z } \textit{in} \text{ B}}{\text{B}}$$

což znamená

$$\text{má být } \frac{a}{b} \text{ přičteno k } z\text{, součet činí } \frac{a + zb}{b}$$

Vieta považuje A za obsah, Z a B za délky; výraz v čitateli je pak kvadratický.

Téměř moderního tvaru nabývá algebraická symbolika v XVII. století ve spisech *Descartových*, který upouští od zásady stejnorodosti (homogenity) čili pracuje s veličinami různých stupňů v tomtéž výrazu, aniž by uvažoval nad jejich stejným nebo nestejným rozměrem. Kromě toho označuje Descartes známé veličiny písmeny

z počátku abecedy, neznámé pak vyjadřuje písmeny z abecedního konce. Během doby byla velká písmena nahrazena písmeny malými, psanými už kurzívou. Descartes užíval často jednostranných závorek, chtěl-li členy téhož stupně shrnout v jednu skupinu. Někdy také užíval svislé čáry. Uveďme některé příklady, jak zapisoval Descartes rovnice ve své Geometrii. Čtenář si přitom jistě všimne, že členy, které tvoří koeficient při určitém stupni proměnné, píše Descartes pod sebe:

$$y^6 - 26y^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddr \end{matrix}\right\} y^3 \qquad \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddrr \end{matrix}\right| \begin{matrix} yy - 2bccddy + \\ + bbccdd + bbccdd \end{matrix}$$

$$x^{5****} - b \infty 0; \qquad z^3 \infty * \qquad . \; apz - zaq$$

Poslední dvě rovnice nejsou dnešnímu čtenáři patrně zcela srozumitelné. První, přepsaná nynější symbolikou, značí $x^5 - b = 0$, druhá pak vyjadřuje vztah $z^3 = 0z^2 \pm apz - a^2q$. Hvězdičkami vyznačoval Descartes chybějící členy — tedy jakási náhrada nuly; tečka značila znaménko $\pm$.

5. ZÁPORNÁ ČÍSLA

Staří národové už znali zlomky a dovedli s nimi také obstojně počítat. Domnívali bychom se, že záporná čísla byla známa aspoň tak brzo, ne-li ještě dříve než zlomky, protože počítání s nimi se zdá proti zlomkům jednodušší. Historie však nás přesvědčuje, že počítání se zápornými čísly, ba sám pojem záporných čísel se vyvíjel mnohem obtížněji a déle než pojem zlomků.

Egypťané užívali v písmu hieroglyfickém symbolů, které měly do jisté míry význam našich znaků „plus" a „minus". Oba znaky se skládaly z obrazu sovy a kráčejících nohou. Jestliže nohy kráčely ve směru sovího pohledu, znamenal symbol sčítání, hleděla-li sova směrem opačným, pak se odčítalo. Záporná čísla Egypťané neznali. Rovněž Řekové neměli představu čísel záporných. Ani *Diofantos* z Alexandrie ve spise „Aritmetika" nezná záporná čísla. Nicméně se jeho početní výrazy skládají z čísel „přičítaných" a „odčítaných".

V úvodu k „Aritmetice" říká Diofantos v odstavci IX: „Odčítané" číslo násobené „odčítaným" číslem dává číslo „přičítané", „odčítané" číslo násobené číslem „přičítaným" dává číslo „odčítané". Diofantos počítá totiž s rozdíly, ve kterých je menšenec vždy větší než menšitel. V další části téhož odstavce píše Diofantos: „Znamení odčítání jest ⊤ (zkomolené a obrácené řecké písmeno ψ)." Toto znamení je jediným operačním znaménkem, které u Diofanta nacházíme. Jestliže měla být čísla sečtena, řadil je Diofantos prostě vedle sebe. Připomeňme, že tento autor užíval alfabetické řecké číselné symboliky a že zde tedy nebylo nebezpečí omylu, který by mohl nastat při podobném druhu zápisu čísel v systému pozičním. Násobení i dělení čísel vyjadřoval Diofantos slovními popisy. Při složených výrazech psal Diofantos kladné členy dopředu, všecky záporné pak následovaly za znakem ⊤. Samostatný „odčítaný" (tj. záporný) člen se u Diofanta nikde nevyskytuje. Diofantos je si ovšem vědom významu těchto pravidel pro další počítání, neboť v dalším (desátém) odstavci úvodu říká: „Když jsem ti už vyložil pravidla o násobení výrazů, vysvětlím ti jejich dělení. Dříve než budeme pokračovat, bude dobře cvičit sčítání, odčítání a násobení těchto výrazů. Zejména je nutno porozumět sčítání výrazů s „přičítanými" a „odčítanými" členy, které mají nestejné koeficienty, s výrazy, které mají členy „přičítané" i „odčítané". Rovněž se musíme naučit od nějakého výrazu s „přičítanými" a „odčítanými" členy odečíst výrazy, které obsahují členy buď pouze „přičítané", nebo členy „přičítané a odčítané". (Uvozovky u slov „přičítaný" a „odčítaný" u Diofanta ovšem nejsou!)

Je zřejmé, že lze ve všech těchto větách slovo „přičítaný" a „odčítaný" nahradit slovem kladný a záporný. Ovšem tak široký význam u Diofanta tato slova neměla, proto jsme také slov kladný a záporný neužili.

Zřetelnou představu o záporných číslech měli čínští a indičtí matematikové. *Bráhmagupta* v VI. století n. l. označuje záporná čísla tečkou nad nimi umístěnou, Indové spojovali představu záporných čísel s představou dluhu nebo s představou úsečky, nanášené v opačném směru, než byla nanášena úsečka, znázorňující číslo kladné. Bráhmagupta např. říká: „Součet dvou majetků je majetek,

součet dvou dluhů je dluh, součet majetku a dluhu jejich rozdíl, nebo — jsou-li si rovny — nula. Součet nuly a dluhu je dluh, majetku a nuly majetek, dvou nul — nula." „Menší odčítá se od většího, majetek od majetku, dluh od dluhu; avšak, jestliže odečítáme větší od menšího, hodnota rozdílu se mění. Je-li dluh odečten od nuly, stává se majetkem, majetek se při takovém počítání stává dluhem."

Bhaskara doplňuje: „Součin dvou majetků nebo dvou dluhů je majetek, výsledek násobení majetku a dluhu bude dluh. Totéž pravidlo platí i při dělení. Čtverec majetku nebo dluhu je majetek. Odmocnina z majetku má dva kořeny: jeden je majetek, druhý je dluh." Indové znali také záporné kořeny rovnic. Někdy taková řešení ovšem zanedbávali, protože — jak říká Bráhmagupta — „absolutně záporná čísla nejsou lidmi schvalována". Dřívější matematikové jiných zemí, např. Diofantos, pečlivě zkoumali, kdy je rovnice řešitelná (tj. řešitelná kladnými hodnotami). Evropským vědcům trvalo přes tisíc let, než dosáhli takové úrovně v porozumění záporným číslům, jaké projevili Indové koncem šestého století.

S pozvolným chápáním záporných čísel se také pomalu tvořila pravidla pro jejich násobení. Záporná čísla znal již *Leonardo Pisánský*. Italský matematik *Luca Pacioli* na přelomu XV. a XVI. století stanovil pravidla o násobení záporných čísel, vyslovuje je však bez důkazu. Neschopnost dokázat tato pravidla algebraicky byla tehdy sváděna na nedostatečný lidský rozum.

Jaký zmatek o záporných číslech vládl i v myslích některých významných matematiků, je patrno z úvahy, kterou italský matematik *Geronimo Cardano* r. 1570 prokazuje „nesprávnost" poučky, že součin dvou záporných čísel je kladný. Vychází z identické rovnice

$$(a - b)^2 = a^2 - 2(a - b) \,.\, b - b^2$$

a soudí, že poslední člen $-b^2$ pravé strany vznikl násobením $(-b) \,.\, (-b)$; proto prý je součin dvou záporných čísel záporný. Obdobně chybně usuzuje o součinu $(-b) \,.\, (-d)$ z identické rovnice

$$(a - b)(c - d) = ac - (a - b)d - b(c - d) - bd$$

na záporné znaménko. Cardanovi přitom přísluší zásluha, že při-

pouští také záporná čísla jako kořeny rovnic; říká jim „numeri fikti", proti „numeri veri". Anglický matematik *John Wallis* (XVII. století) užívá často záporných čísel jakožto souřadnic při studiu křivek. Jinde však mylně dokazuje, že z nerovností

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$$

plyne okolnost, že záporná čísla jsou větší než nekonečno, protože podle tehdejšího pojetí $\frac{1}{0} = \infty$.

Záporná čísla, zvláště úměra

$$1 : (-1) = (-1) : 1,$$

byla předmětem pochybností některých matematiků-filosofů. Pozastavovali se nad uvedenou úměrou vyslovujíce překvapení, že matematikové mohou připustit, aby menší číslo děleno větším se rovnalo většímu číslu, dělenému menším (tzv. paradox Arnauldův). *Leibniz* tento paradox vysvětloval tím, že „základ správného vztahu identity je podobnost věcí" a zde je podobnost porušena. Avšak — podle Leibnize — je vhodné této identity využít jako užitečné a „trpně správné". Vlastní příčinu tohoto paradoxu vysvětlil *Euler*, který napsal v jednom ze svých dopisů, že jde o paradox pouze zdánlivý, a ukazuje, že ne všechny vlastnosti kladných čísel jsou obdobnými vlastnostmi čísel záporných.

Po celé sedmnácté i osmnácté století se stále vyskytovali někteří matematikové — a nebyli to matematikové nevýznamní — kteří popírali objektivnost pojmu záporné veličiny. Byly proti sobě stavěny představy veličin opravdových — „absolutních" — a veličin „lživých", kterým (podle soudu některých matematiků) neodpovídalo nic konkrétního. Závady byly spatřovány hlavně v tom, že „něco" má být menší než nic (záporná veličina byla menší než nula), dále v uvedeném paradoxu Arnauldově a posléze v okolnosti, že pokusy o důkazy pravidel počítání (sčítání, odčítání, násobení a dělení) s veličinami zápornými nebyly pochopitelně uspokojivé. Odpůrci objektivního pojetí záporných čísel byli zejména *d'Alembert* a *Carnot*. Naproti tomu *Descartes*, *Newton*, *Euler*, *Laplace* a mnozí jiní houževnatě zastávali a posléze také vybojovali objektivnost pojmu záporné veličiny a její vědecké využití v algebře.

Descartes užívá záporných souřadnic ve své analytické geometrii, Newton v „Universální aritmetice" definoval záporné veličiny jako menší než nula, Euler v korespondenci říká: „Záporná množství jsou reálná a vždy je možno ukázat na to, co představují," jinde pak píše: „Záporné číslo není nic jiného než to, co zůstává, jestliže větší číslo odečteme od menšího". Euler také ukazuje, že vztah $-A < 0$ má smysl, protože „je lépe nemít nic, než míti dluh". Pokusy důkazu pravidel početních výkonů se zápornými čísly většinou mlčky předpokládají platnost komutativního nebo distributivního zákona. Jinak více či méně skrytě obcházely okolnost, že při zavedení nového druhu čísel je třeba rozšířit definici početních výkonů. Teprve axiómatické vybudování aritmetiky v XIX. století přispělo k uspokojivému řešení problému objektivní existence záporných veličin a správnému podložení početních výkonů s nimi.

6. MOCNINY

Mocniny jako důležitá součást algebraického počítání se vyvinuly z „geometrické algebry" řecké. Umocňování dvěma a třemi vzniklo z geometrického významu těchto výkonů. Obsah čtverce, objem krychle a podobné měřické problémy vedly k vytvoření pojmů druhé a třetí mocniny. Krok k vytvoření vyšších mocnin nebyl již tak snadný. Bylo nutno odpoutat se od geometrické představy, která byla spojována s každou aritmetickou úvahou. Čtvrtou mocninu nacházíme u *Heróna z Alexandrie* (asi I. stol. př. n. l.).

Též *Diofantos* používal ve svých úvahách o rovnicích také vyšší mocniny (jako neznámé) a dospívá tak až k šesté mocnině. Rozvoj této nauky je u Diofanta — přes značný pokrok, který tento matematik uskutečnil — ztížen těžkopádným označením mocnin. Neznámou x označuje jako ς a nazývá ji arithmos, x^2 jako $\delta^{\bar{\nu}}$, čili dynamos (čtverec); symbol $\bar{\nu}$ (umístěný tam, kde my píšeme exponent) značí vždycky mocninu. Různý stupeň mocniny byl tehdy vyjadřován různým základem. Proto x^3 se píše jako $\varkappa^{\bar{\nu}}$ (kubos — krychle). Další pojmenování a symboly vznikají spojováním těchto

základních symbolů; tak např. x^5 se nazývá dynamokubos a píše se $\delta^{\bar{\nu}}_{\kappa}$. Druhou mocninu užívá Diofantos příležitostně i pro veličiny známé. Zná též převrácené hodnoty těchto mocnin. Převrácený čtverec $\frac{1}{x^2} = \delta^{\bar{\nu}\chi}$ (řecké písmeno chí χ značí převrácenou hodnotu) se čte jako dynamoston, podobně $\frac{1}{x^3} = k^{\nu\chi}$ je kyboston. V úvodu ke své Aritmetice zaznamenává Diofantos pravidla pro počítání s mocninami. Říká např. — „Dynamos neznámé dává, sám sebou násoben, jako výsledek dynamodynamos, násoben veličinou kubos, dává dynamokubos, násoben veličinou dynamodynamos dává součin, jménem kubokubos." Jinde Diofantos konstatuje: „Dynamodynamoston, násoben arithmostonem, dává dynamokuboston."

$$\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}\right)$$

Velký vliv na rozvoj pojmu a počítání s mocninami mělo zřejmě poznání indických algebraických znalostí prostřednictvím Arabů. Ve starších indických i arabských spisech je nazývána první mocnina neznámé „kořenem" (radix). Tak *Muhamed ben Musa al Chorezme* předkládá k řešení tuto úlohu: „1 čtverec a 21 na číslech jest rovno 10 kořenům téhož čtverce." V naší symbolice tedy $x^2 + 21 = 10x$. Téhož druhu je podobná úloha: „Čtverec a 10 jeho kořenů jest rovno 39, čili jestl že k čtverci přičteš 10 kořenů, obdržíš 39."

Arabové a Italové značně přispěli k rozšíření a zdokonalení nauky o mocninách. Rovněž němečtí „cossisté" se zasloužili výrazně o další pokroky v této nauce. Byl to zejména *Adam Ries* (XVI. stol.), počtář (Rechenmeister) z Annbergu ve Slezsku, *Christof Rudolf*, rovněž počtář, žijící počátkem XVI. století v Jauer rovněž ve Slezsku.

R. 1637 *René Descartes* už označuje exponenty stejně jako my. Před ním německý matematik *Michael Stifel* (XVI. stol.) užívá slova exponent a ví, že nulová mocnina je rovna 1. Lomené exponenty zná už v XIV. století francouzský matematik *Oresme*. Kolem roku 1700 je zapomenutá nauka o lomených exponentech znovu objevena v Anglii. Zde *I. Newton* již užívá obecných i lomených exponentů. *Leonard Euler* (XVIII. stol.) staví teorii mocnin na vědecký základ, přičemž také definuje nově logaritmus jako mocninu

základu. Práce o mocninách vrcholí studiemi norského matematika *Nielse Henrika Abela* (počátek XIX. stol.). Abel vychází z funkcionální rovnice $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$, tvoří novou definici exponenciální funkce a důkladně studuje její vlastnosti.

7. ODMOCNINY

Objev Pythagorovy věty prý přivedl pythagorejskou školu ke stanovení velikosti úhlopříčky čtverce, čili ke konstrukci $\sqrt{2}$ a dalších iracionalit. Zjištění, že $\sqrt{2}$ je výraz, který nelze jako racionální číslo vyjádřit, bylo rozhodně dílem pythagorejské školy. Tento významný objev, který geometricky znamenal nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce, vyvolal velkou disharmonii v tehdejších filosofických a matematických poznatcích řeckých. Otřesný smysl objevu „iracionálna" pro řecký duchovní svět dokládá poznámka (scholion) k desáté knize Euklidových „Elementů". Její autorství se připisuje komentátorovi „Základů" *Proklovi Diadochovi* (filosof a matematik řecký z V. stol. n. l.). Tato poznámka k Elementům zní: „Říká se, že člověk, který poprvé prozradil zkoumání iracionálního, zahynul při ztroskotání lodi. A to proto, že to, co nelze vysloviti a co si nelze představiti, mělo zůstat skryto. Proto také byl ohavník, který se náhodou tohoto obrazu živoucího dotkl a jej odhalil, na místě svého činu sražen a věčnými vlnami smeten."

Objev iracionalit přiměl řecké matematiky k tomu, aby přepracovali všechny ony části geometrie (což vlastně byla jediná tehdy známá matematika — nebo aspoň základ celého myšlení matematického), kde se dosud předpokládalo, že každé dvě úsečky mají společnou míru. Tuto práci provedl z velké části slavný astronom *Eudoxos z Knidu*, který žil v Athénách ve IV. století př. n. l. Velké zásluhy o toto přepracování má také jiný athénský filosof *Theaitetos*, žijící kolem roku 400 př. n. l.

Řečtí filosofové se domnívali, že objevem nesouměřitelnosti je ohrožena stará atomistická teorie Demokritova (filosof žijící v Abdeře v době kolem roku 400 př. n. l.). Kdyby se totiž strana a úhlopříčka čtverce skládaly z týchž atomů, musely by mít nutně spo-

lečnou míru. Praví se, že objev nesouměřitelnosti byl zpočátku obecnému lidu zatajen z obavy, že by lid v existenci nesouměřitelných úseček mohl spatřovat nedostatek a nepřesnost ve stvoření světa a ztratil tak víru v bohy.

Nauku o odmocninách budovaly všechny kulturní národy, které se zúčastnily výstavby matematiky. Řekové znali třetí odmocninu, neboť je jí potřebí při řešení Delského problému zdvojení krychle.

Nemáme bezpečnějších zpráv o tom, jak *Archimédes* určoval ve svých výpočtech hodnoty druhé odmocniny. Patrně užíval, stejně jako *Herón* z Alexandrie (I. století n. l.), přibližné hodnoty podle vzorce $\sqrt{a^2 + r} \doteq a + \frac{r}{2a}$. Je patrno, že nejlepší výsledky poskytuje vzorec pro malé r. Způsob tohoto odmocňování znali asi už staří Babylóňané.

V Indii označovali odmocninu názvem, který byl současně názvem kořenu rostlinného. Do latiny bylo toto slovo přeloženo výrazem radix a odtud přešlo k nám jako kořen. Symbol odmocniny se objevuje až v XV. století — a sice jako tečka před číslem, které má být odmocněno. Čtvrtý kořen byl označován dvěma tečkami. U německých cossistů nacházíme u tečky před odmocňovaným číslem šikmou čárku vpravo nahoru. Italský matematik *Tartaglia* (XVII. stol.) píše za odmocňovacím znaménkem závorky. Teprve u Descarta nacházíme naši dnešní čárku nahoře místo závorek. Nynější způsob psaní odmocnin zevšeobecněl teprve v XVIII. století. Naše znaménko se vyvinulo z rychle psané cossistické tečky s čárkou.

Trvalo však velmi dlouho, než byla iracionální čísla uznána za skutečná čísla a ještě déle trvalo, než byl jejich skutečný charakter vědecky vypracován. Velkou zásluhu o rozšíření tohoto pojmu má protestantský kazatel a matematik *Michael Stifel*, narozený asi r. 1487 v Jeně. Mluví o iracionalitách vyšších než druhých odmocnin a říká jim „numeri irrationales". Tvrdí o nich, že „irrationalis numerus non est numerus" (iracionální čísla nejsou čísla). Myslí tím, jak vyplývá z jeho dalších vět, že to nejsou čísla racionální. Naprostého uznání se dostává iracionálním číslům teprve pracemi *Descarta*, *Newtona*, *Leibnize* v XVII. a XVIII. století.

Vědecký podklad teorii iracionálních čísel dal ve druhé polovině XIX. století *Georg Cantor*, *Karl Weierstrass*, *Richard Dedekind* a *Charles Méray*.

8. Z HISTORIE ROVNIC

Úvod

Úlohy, které dnes shrnujeme pod názvem rovnice, a zejména ty, které patří do kapitoly slovních rovnic, se vyskytují v matematických textech již na hliněných babylónských destičkách, ve starých čínských sbírkách příkladů i v Ahmesově papyru. Algebra se vlastně vyvíjela jako pomocná nauka, která měla především vytvořit prostředky pro řešení rovnic.

Rozdělení rovnic na rovnice různých stupňů podle mocniny neznámé pochází z doby pokročilého vývoje algebry.

Formulace slovních úloh ve starobabylónských textech jsou pro dnešního čtenáře velmi nejasné. V úlohách se totiž používá prostředků tzv. babylónské geometrické algebry. Tehdejší terminologie geometrická — a ještě více algebraická — se podstatně lišila od našeho názvosloví a nebyla ovšem zdaleka tak propracovaná jako terminologie dnešní.

Uveďme v překladu text jedné ze starobabylónských úloh:

„Čtyřúhelník, v něm dvě řeky 13,3 (číslo je psáno, podobně jako další čísla této úlohy, v šedesátkové soustavě; v desítkové je to číslo $13 \cdot 60 + 3 = 783$) je obsah horní řeky, 22,57 (v desítkové soustavě 1377) druhý obsah, třetina dolní délky pro horní délku, horní šířka větší než dělicí čára a dělicí čára větší než dolní šířka, dohromady 36. Délky, šířky a dělicí čáry vypočítati."

Z připojeného textu řešení úlohy je zřejmé, že se jedná o lichoběžník. Podle nynějšího způsobu vyjadřování zní tato úloha takto: Lichoběžník je rozdělen příčkou na dva lichoběžníky. Rozdíl mezi delší rovnoběžnou stranou a dělicí příčkou je roven třetině rozdílu příčky a kratší rovnoběžné strany. Rozdíl obou rovnoběžných stran je 36. Obsah části lichoběžníka přilehlé k delší rovnoběžné straně

lichoběžníka je 783, obsah části přilehlé ke kratší rovnoběžné straně je 1377.

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že se babylónští matematikové neomezovali na rovnice o jedné neznámé.

Číňané kladou vznik aritmetiky „Kiu čang" do doby 2600 let před naším letopočtem. Z této aritmetiky pochází i známá úloha:

„V kleci jsou zavřeni králíci a bažanti. Napočítali jsme 35 hlav a 94 nohy. Kolik je v kleci bažantů a králíků?"

Téhož původu jsou rovněž prastaré úlohy:

„Ve středu čtvercového rybníku (tj. rybníku tvaru kvádru) o straně (stěně) 10 stop dlouhé roste rákos, jehož konec se zvedá stopu nad hladinu rybníka. Přitáhneme-li rákos až ke středu některé strany (horního okraje stěny) břehu rybníka, dosáhne právě jeho okraje. Jak hluboký je rybník?"

„Deset stop dlouhý bambus je přelomen tak, že jeho vrcholek se dotýká země 3 stopy od paty bambusu. Jak vysoko se zlomil?"

V Ahmesově papyru je odstavec obsahující řadu problémů, které se dnes řeší rovnicemi. Tyto úlohy jsou zde též řešeny, což znamená, že autor uvádí několik aritmetických obratů, kterým čtenář má prostě věřit. Nic se neodůvodňuje a nedokazuje.

Podobně jsou řešeny též úlohy na babylónských hliněných destičkách. Nicméně však v egyptském papyru (a podobně i v úlohách moskevského papyru) se jeví nauka o rovnicích v pokročilejším stadiu a úlohy mají už ten určitý společný znak, který je dnes charakteristickým pro rovnice. Bylo dosaženo jakési společné abstrakce, která je pro všechny rovnice v dnešní algebře jednotná. Byl zaveden společný název — a tedy také společný hieroglyf — pro neznámou. To je velmi významný krok ve vývoji nauky o rovnicích. Neznámé číslo, na něž klademe jisté podmínky, pojmenujeme a pod tímto názvem s ním pak provádíme potřebné operace.

Úloha 27 zní: „Množství a jeho pětina činí dohromady 21."

Úloha 33: „Dvě třetiny množství, jeho jedna polovina, jedna sedmina a jeho celek dávají dohromady 37." V dnešní symbolice povede úloha k rovnici

$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{7} + x = 37.$$

Úloha 28 říká: „$\frac{2}{3}$ jest v přidávání, z toho $\frac{1}{3}$ v odebrání, zbývá 10." Podle nynějšího způsobu psaní

$$\left(x + \tfrac{2}{3}x\right) - \tfrac{1}{3}\left(x + \tfrac{2}{3}x\right) = 10.$$

Některá řešení prostě udávají návod k výpočtu výsledku, aniž by se pokoušely zdůvodnit, proč se ty či ony operace provádějí. Tak v úloze 27. se žádá, aby bylo 21 děleno šesti a výsledek násoben pěti. V úloze 28. se radí odečíst od 10 jednu desetinu téhož (tj. deseti) čili jednu, 9 jest výsledek. Správnost se zjišťuje prostě provedením naznačených počtů — zkouškou.

Důležitý mezník rozvoje nauky o rovnicích znamená *Diofantova* kniha Aritmetika. Základem jeho řešení lineárních rovnic, jichž ukázky uvedeme v dalším článku, jsou dvě pravidla, vyslovená v úvodu k jeho Aritmetice (viz str. 109):

1. Přičíst záporné členy, aby na obou stranách rovnice byly pouze členy kladné.
2. Stejné odečíst od stejného, aby na každé straně rovnice zůstal pouze jeden člen.

Řekové po Diofantovi v dalším rozvíjení matematických věd — ani v algebře — nepokračovali. Jejich znalosti přešly do Indie a Číny, kde záhy našli učenlivé žáky a znamenité pokračovatele. Mnoho vědeckých a tedy i matematických řeckých spisů se nedochovalo, neznáme dnes ani některé velmi důležité spisy Diofantovy. Nelze proto dobře odhadnout, které vědomosti východ jen převzal a které jsou skutečným důsledkem vlastního samostatného bádání tamních vědců.

Řecká matematika měla charakter ponejvíce geometrický. I zdůvodňování poznatků rázu typicky aritmetického se dálo metodami převážně geometrickými. Naproti tomu indická matematika vstupuje do dějin v první polovině tohoto tisíciletí významnými příspěvky v psaní čísel i početních výkonů a též i v algebraické symbolice. Někteří historikové pokládají Indy za zakladatele algebry vůbec. Výhodná symbolika obsažená zejména ve spisech, které napsali indičtí matematikové *Aryabhata* (VI. století n. l.) a *Bráhmagupta* (VII. století n. l.), přispěla k rozvoji nauky o rovnicích. Významným příspěvkem k zobecnění nauky o rovnicích bylo ne

zcela zamítavé stanovisko Indů k záporným veličinám. Tak nacházíme u Bráhmagupty rovnice, které mají na jedné straně jen samotné záporné číslo.

Jak řecká, tak i indická nauka o rovnicích ovlivnila díla arabských matematiků, zejména spis Aldžeber v'almukabala, který napsal nám už známý *Al Chovarizmi*. Již v názvu tohoto spisu je zřejmý vliv Diofantův. Obě slova totiž v podstatě znamenají operace, kterých Diofantos užíval při řešení rovnic. *Leonardo Pisánský*, který seznámil Evropu s arabskými poznatky v matematice, přeložil slovo „aldžeber" do latiny výrazem „restauratio", slovo „almukabala" pak názvem „oppositio". (Viz str. 83—84.)

Téměř současně s problémy, které řešíme rovnicemi o jedné neznámé, zabývali se — jak již bylo uvedeno — staří matematikové v Babylónii, Řecku, Číně, Indii i v zemích arabských problémy, které dnes snadno řešíme pomocí rovnic o více neznámých. Ukážeme si, s jak podivuhodnou zručností dovedl například Diofantos zvolit neznámou tak, že se dal problém řešit, aniž by dalších neznámých bylo vůbec potřeba.

Systémy rovnic se zabývá ve druhém století př. n. l. kniha „Matematika v devíti kapitolách", kterou napsal čínský matematik *Čan San*. Jeho postup připomíná dnešní způsob řešení rovnic pomocí determinantů, které připravil vhodným označením teprve *Leibniz*. Přehledné řešení systému dvou rovnic o dvou neznámých v Evropě provedl první německý matematik *Michael Stifel* (XVI. stol.).

Lineární rovnice

Problémy, které nacházíme v různých babylónských, egyptských a čínských matematických textech, řešili bychom dnes z valné části pomocí rovnic prvního stupně. To ovšem nebyl důsledek vědomého třídění rovnic podle jejich stupně. Stupeň rovnice nebyl ještě tehdy matematickým pojmem a hrál v úvahách starých matematiků podřadnou roli, zejména ovšem proto, že neexistovalo ani jednotné označení, ani jednotná metoda řešení rovnic.

Teprve Diofantos ve své Aritmetice podává jakési obecné pravidlo pro úpravu rovnic na tvar $ax^m = b$. V posledním odstavci úvodu k této knize říká: „Jestliže při nějaké úloze dospějeme k rovnici, která má na obou stranách obecné výrazy téhož stupně s různými koeficienty, tu musíme stejné od stejného odečíst, až jeden člen jest roven jednomu členu. Jsou-li na jedné nebo na obou stranách „odčítané" členy (my říkáme záporné), pak je musíme na obou stranách přičíst, abychom obdrželi na obou stranách „přičítaná" (kladná) čísla. Pak musíme opět stejné od stejného odčítat, až na každé straně zůstane po jednom členu. Později ukáži, jak se úloha řeší, jestliže dvoučlenný výraz se rovná jednomu členu." (V poslední větě Diofantos patrně slibuje návod na řešení obecných kvadratických rovnic. Tento jeho návod se však nedochoval.)

Všimněme si nyní některých lineárních rovnic, kterým je věnována první kniha Diofantovy Aritmetiky. Problémy zde předkládané vedou k řešení rovnic tvaru $ax = b$. Na tento tvar je uvedena převážná většina úloh prvé knihy. Pak následuje rovnice tvaru $ax^2 = bx$ a dalších 15 úloh, které Diofantos převádí na tvar $ax^2 = b$. Poslední úloha prvé knihy vede opět k lineární rovnici.

První úloha prvé knihy Aritmetiky zní:

„Dané číslo rozdělit na dvě čísla, která mají daný rozdíl." (Diofantos formuluje každou úlohu obecně, ve výkladu si však daná čísla vhodně volí tak, aby kořen byl kladný.)

Diofantos uvádí toto řešení: „Dané číslo budiž 100, rozdíl hledaných čísel 40. Budiž menší číslo neznámá x, pak je větší číslo $x + 40$; obě dohromady jsou $2x + 40$. Protože jejich součet má být 100, platí

$$2x + 40 = 100.$$

Odečteme-li nyní stejné od stejného, totiž 40 od $2x + 40$, i od 100, obdržíme

$$x = 30.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do výrazů pro hledaná čísla, vychází pro menší číslo 30, pro větší 70 a obě čísla zřejmě úloze vyhovují."

Některé z Diofantových úloh by ovšem mohly při záměrné

volbě daných konstant vést i k záporným výsledkům. To však Diofantos nepřipouští a naopak v textu každé úlohy předpisuje pro konstanty takové podmínky, aby výsledek řešení byl kladný.

Všimněme si této okolnosti v 5. úloze první knihy. Zní takto: „Dané číslo jest rozděliti ve dvě části tak, aby předem stanovený díl první části, sečtený s rovněž předepsaným, ale jiným dílem druhé části, tvořily daný součet.“ Tím by text úlohy mohl dnes být ukončen.

Přepišme pro zřetelnost znění úlohy dnešním způsobem: Rozdělte číslo a na dvě části tak, aby součet m-tého dílu první části a n-tého dílu druhé části dal číslo b. (Čísla m a n jsou přirozená a různá.) Tento požadavek vede k rovnici

$$\frac{x}{m} + \frac{a-x}{n} = b$$

a tedy

$$x = \frac{m}{n-m}(bn - a), \quad a - x = \frac{n}{n-m}(a - bm)$$

Aby obě čísla x, $a - x$ byla kladná, musí platit současně

$$bn > a, \; bm < a \text{ při } n > m.$$

nebo

$$bn < a, \; bm > a \text{ při } n < m.$$

Je tedy třeba číslo b volit mezi čísly $\frac{a}{m}$, $\frac{a}{n}$.

Protože však Diofantos záporná čísla neznal, neměla pro něho daná úloha v případě, že uvedené podmínky nebyly splněny, žádné řešení. Tuto podmínku pro něho nutnou vyslovuje Diofantos již v textu úlohy následujícím způsobem:

„Daný součet musí ležeti mezi čísly, která obdržíme, když z daného čísla utvoříme předepsané (nestejné) díly.“

Diofantos nevolí však vždy za neznámou prostě hledanou veličinu.

V uvedené úloze 5 rozděluje číslo 100 ve dvě části tak, aby součet třetiny první části a pětiny druhé části činil 30. Říká pak dále: „Zvolíme pětinu druhého čísla za neznámou x, toto číslo bude tedy $5x$. Třetina prvního čísla je tedy $30 - x$, číslo samo pak $90 - 3x$. Víme, že součet obou čísel je 100. Obě čísla však dávají dohromady $2x + 90$. Je tedy

$$2x + 90 = 100.$$

Odečteme stejné od stejného a dostaneme

$$2x = 10,$$

čili

$$x = 5.$$

Za x jsem však zvolil pětinu druhého hledaného čísla; protože $x = 5$, je druhé číslo 25.

Třetina prvního čísla byla $30 - x$, tj. 25, je tedy první číslo 75. Součet třetiny prvního čísla a pětiny druhého čísla je dané číslo 30.“

Snadno najdeme důvod, proč Diofantos volil za neznámou zlomek hledaného čísla a ne přímo číslo hledané. Za předpokladu, že neznámá je některým z hledaných čísel, vzniknou v rovnici zlomky. Diofantos byl příliš dobrým metodikem, než aby nevyužil příležitosti, jak se vyhnout počtu se zlomky, který byl na tehdejší dobu obtížný.

Některé úlohy by řešil dnešní počtář zpravidla zavedením více neznámých. Tak např.:

18. úloha z první knihy: „Najíti taková tři čísla, aby součet každých dvou z nich byl o jisté dané (rozumí se vždy jiné) číslo větší, než číslo třetí.

Řešení: Požaduje se, aby součet prvých dvou čísel byl o 20 větší než číslo třetí, součet druhého a třetího čísla o 30 větší než číslo první a konečně aby součet třetího a prvního byl o 40 větší než číslo druhé.

Budiž $2x$ součet všech tří čísel. Součet prvního a druhého čísla je dohromady o 20 větší než číslo třetí; jestliže na obou stranách třetí číslo přičteme, vidíme, že součet všech tří čísel je o 20 větší než dvojnásobek třetího čísla. Jestliže tedy od součtu těchto tří čísel, tj. od $2x$ odečteme 20, obdržíme dvojnásobek třetího čísla; je tedy dvojnásobek třetího čísla $2x - 20$, proto je třetí číslo $x - 10$.

Stejným způsobem usoudíme, že první číslo je $x - 15$, druhé $x - 20$. Součet všech tří čísel má být $2x$. Sečtu-li uvedená tři čísla, obdržím $3x - 45$. Je tedy

$$3x - 45 = 2x,$$

neboli

$$x = 45.$$

První číslo je tedy 30, druhé 25 a třetí 35. Tato čísla splňují naši úlohu.“

Tušíme, s jakou samozřejmostí by dnes průměrný žák 8. třídy prohlásil první číslo za x, druhé za y, třetí za z a pak by s větší či menší dovedností použil algoritmu řešení tří rovnic o třech neznámých, který by ovšem vedl — nebo alespoň měl vést — k témuž výsledku.

V tomto příkladě je velmi hezky ilustrována Diofantova počtářská zručnost i jeho metodická zdatnost. Mladému čtenáři ovšem doporučujeme, aby provedl řešení pomocí tří neznámých, promyslel operace, kterých používá při řešení Diofantos, vyjádřil je pomocí tří neznámých a srovnal tak způsob svého řešení s řešením Diofantovým. Vtipnost Diofantova řešení je pak velmi zřejmá. Nenašel by čtenář jiné obdobné jednoduché řešení, třeba sečtením vždy dvou a dvou rovnic, které si sestavil?

Porozumí pak jistě lépe druhému Diofantovu způsobu řešení téže úlohy: „První a druhé číslo má dohromady být o 20 větší než číslo třetí. Považujeme-li třetí číslo za neznámou x, je součet prvního a druhého čísla $x + 20$.

Protože součet druhého a třetího čísla je o 30 větší než číslo první, bude se druhé číslo rovnat polovině součtu $20 + 30$, tj. bude 25.

Protože však první a druhé číslo dávají dohromady $x + 20$ a protože druhé číslo je 25, zbývá pro první číslo $x - 5$.

Součet třetího a prvního čísla je $2x - 5$, proto je

$$2x - 5 = 65;$$

když odčítané číslo na obou stranách přičteme, obdržíme

$$2x = 70,$$
$$x = 35.$$

První číslo je $x - 5$, to je 30; druhé je 25 a třetí, které jsme zvolili za neznámou, je 35."

Některé historické slovní rovnice

Problematika úloh, které dnes řešíme pomocí rovnic, byla od prvních dochovaných početních textů velmi různorodá. Byly řešeny úkoly ryze aritmetické, studovány problémy geometrické a různé otázky praktického života. Nicméně mnohé úlohy vznikly jako

zábavné otázky pro ukrácení dlouhé chvíle nebo za účelem zkoumání důvtipu počtářova, úlohy jiného typu pak měly svůj původ v náboženských meditacích.

Tak již v Ahmesově papyru se řeší úloha:

„Čtyřem lidem rozděl 700 chlebů. Pro prvního nechť se dostane $\frac{2}{3}$ množství, pro druhého $\frac{1}{2}$ množství, pro třetího $\frac{1}{3}$ množství a pro čtvrtého $\frac{1}{4}$ množství."

Znění úlohy se snad zdá na prvý pohled nesmyslné, přesto čtenář úlohu snadno rozřeší, jestliže si uvědomí, že slovo „množství" tu znamená neznámou. Dnes řešíme tuto úlohu rovnicí

$$\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 700$$

(množství — „hau" — neznamená, že výsledek musí být celé číslo!).

Velmi staré jsou tzv. „úlohy o studních". První takovou úlohu zaznamenává *Herón z Alexandrie* (I. stol. n. l.):

„Do studny objemu 12 (rozumí se objemových jednotek) přitéká voda dvěma rourami. Jednou rourou nateče za hodinu jedna jednotka, druhou čtyři jednotky. Jak brzy se studna naplní, bude-li voda přitékat oběma rourami najednou?"

Kolem roku 1350 n. l. shromáždil Řek *Maximus Planudes* řadu epigramů, které jsou vlastně slovními úlohami. Mezi nimi jsou též některé úlohy o studních. Uveďme jednu z nich:

„Čtvero pramenů jest; studnu naplní prvý za den,
druhému dvé k tomu třeba dnů, třetímu tří,
čtvrtému čtyř pak jest potřebí dnů.
Kdy studnu naplní prameny tyto čtyři?"

Z ruského rukopisu ze XVII. století pochází úloha, která patří do téže skupiny úloh „o studních":

„Lev sežere ovci za hodinu, vlk za dvě hodiny a pes za tři hodiny. Za kolik hodin sežerou ovci všichni tři společně?"

Ruský matematik *Magnickij* v prvé tištěné ruské matematické učebnici nazvané „Aritmetika", předkládá čtenářům rovněž úlohu z této skupiny:

„Jeden člověk vypije káď nápoje za 14 dní. Jeho žena a on vypijí stejnou káď za 10 dní. Jest vypočítat, za kolik dní vypije tuto káď žena sama."

Všechny zprávy, které o *Diofantovi* máme, jsou zaznamenány v epigramu, který je současně i slovní rovnicí:

„Pod tímto náhrobkem odpočívá Diofantos. Viz ten zázrak:
Diofantovým umčním mluví kámen o jeho stáří.
Šestinu života dopřál mu bůh být chlapcem.
Za dvanáctinu života pak vyrostly mu vousy.
K tomu sedmina, když uzavřel svazek manželský.
Po pěti letech vzešel z tohoto spojení syn.
Běda, dítě tak milované dožilo se poloviny let otcových,
když Hades strašlivý jej povolal k sobě.
Ještě čtyři léta snášel Diofantos bolest, věnuje se vědě.
Pověz věk, kdy dosáhl svého pozemského cíle."

Epigram má teoreticky dvojí výklad. Jestliže Diofantův syn umřel v době, kdy byl stár polovinu let, kterých právě jeho otec dosáhl, pak úlohu řeší rovnice

$$2\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5\right)+4=x,$$

kde x značí Diofantův věk v době jeho úmrtí.

Vypočteme tak, že Diofantos zemřel ve věku $65\frac{1}{3}$ roku. Do věku $10\frac{8}{9}$ roku byl chlapcem, v $16\frac{1}{3}$ roku mu narostly vousy, ve $25\frac{2}{3}$ roku se oženil, za pět roků se mu narodil syn, který se tedy dožil $30\frac{2}{3}$ rok a zemřel, když byl Diofantos dvakrát tak stár, tedy $61\frac{1}{3}$ roku. Za čtyři roky nato zemřel Diofantos.

Jestliže však připustíme, že Diofantův syn dosáhl poloviny věku, kterého se dožil Diofantos, pak epigram vede k rovnici

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Diofantos by pak zemřel ve věku 84 let. Je ovšem dost málo pravděpodobné, že by Diofantovi narostly vousy teprve ve věku 21 let.

Indické slovní rovnice vynikají poetickým slohem. Z *Bhaskarovy* knihy „Siddhantaciromani" (Koruna systému) z kapitoly „Lilavati" (Líbezná) jsou vybrány tyto dvě úlohy:

„Z hromady lotosových květů se obětuje třetí, pátý a šestý díl bohům Sivovi, Višnovi a Slunci, čtvrtina pak bohyni Bhavani. Ostatních 6 lotosů dáno ctihodnému učiteli. Pověz, příteli, kolik tam bylo lotosů?"

„Z roje včel usedne $\frac{1}{5}$ na květech kadambových, $\frac{1}{3}$ na květech silindhy. Trojnásobný rozdíl obou těchto čísel letěl za květy kutaje; jedna včela poletovala ve vzduchu, přitahována líbeznou vůní pandamu a jasmínu. Pověz mi počet včel."

V různých sbírkách starých i novějších autorů nacházíme úlohy, v nichž se určuje počet žáků ve škole apod. Anglický mnich *Alkuin*, rádce Karla Velikého, sepsal sbírku úloh, která velmi připomíná indické prameny. Jedna z úloh zní:

„Poutník se sešel se žáky a ptal se jich: Kolik je vás ve škole? Jeden ze žáků odpověděl: Zdvojnásob náš počet, násob třemi a součin děl čtyřmi. Připočítáš-li mne k tomu, obdržíš 100."

Podobnou úlohu předložil v XVII. století svým čtenářům také německý matematik *Daniel Schwenter* v knize „Deliciae Physico-Mathematicae, oder Mathemat. und Philosophische Erquicstunden" na str. 76. Odkazuje přitom na francouzský pramen, který blíže neuvádí. Ve „Sbírce úloh z algebry" (napsali na konci minulého století Fr. Hromádko a Al. Strnad) je tato úloha přebásněna elegickým distichem:

„Pythagore vznešený, Helikonských Mus ty potomku,
tážícímu pověz mi, kolik máš v ústavě učňův,
jichž snaha je cílův vědění všech šťastně dosíci?"
„Toť milerád ti povím, ó Polykrate! Slyš, polovice jich
zasvětilo krásné se matematice, čtvrtina však
přírodu nesmrtelnou zpytuje, všech sedmina žákův
v mysli své vděčné všelikou moudrost si ukládá.
Tré přičti k tomu žen, Theano z nich zvlášť připomínám,
tak se dovíš, co chovám kněží Musám Pieridským."

V mnohých starých početnicích se vyskytovaly v různých podobách úlohy na setkání dvou jezdců, dvou pěšáků, pěšáků a jezdců apod. *Adam Ries* ve své „Rechenbüchlein" z r. 1525 má tuto úlohu:

„Item jeden vozka jede z Lipska do Norimberka 6 dní. Jiný vozka vyjede z Norimberka v stejný den a přijede do Lipska za 8 dní. Který den se potkají?“

Z téže knihy si připomeňme ještě jednu úlohu:

„Item, jistý člověk praví: Pozdrav vás Bůh, třicet tovaryšů. Tu odpoví jeden (z tovaryšů): Kdyby nás bylo ještě tolik, kolik nás je a ještě polovina tolik, pak by nás bylo teprve třicet. Jest otázka, kolik jich bylo.“

Následující úloha je z knihy „Summa de Arithmetica“, kterou napsal v r. 1494 častěji zmíněný italský matematik *Luca Pacioli*:

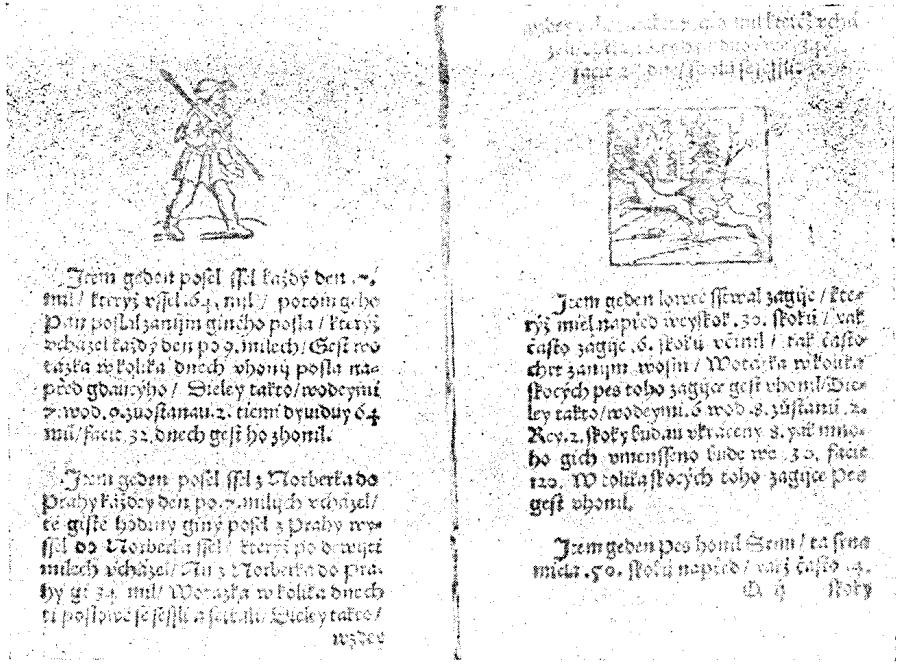
„Na vrcholu stromu 60 loket vysokého sedí myš, dole na zemi je kočka. Myš sleze každý den $\frac{1}{2}$ lokte dolů, v noci opět $\frac{1}{6}$ lokte nahoru. Kočka šplhá každý den 1 loket nahoru a v noci sleze $\frac{1}{4}$ lokte dolů. Strom vyroste ve dne o $\frac{1}{4}$ lokte, v noci se o $\frac{1}{3}$ lokte zmenší. Kdy dosáhne kočka myši a jak je přitom strom vysoký?“

Rovněž v prvé české tištěné početnici „Nowe knížky wo počztech na Cifrý a lyny“ (*Ondřej Klatovský*, 1530) jsou některé úlohy, které řadíme do souhrnu slovních rovnic. Jsou to první úlohy tohoto druhu, které se u nás dostávají i mezi laiky. Klatovský ovšem rovnic k řešení nepoužívá, nýbrž podává prostě vždy návod, „co dělat, aby to vyšlo“. Některé úlohy jsou provázeny půvabnými dobovými obrázky. Ukažme si (na obr. 12) dvě z těch, které patří do skupiny příkladů o setkání.

Uveďme ještě několik úloh, které lze řešit soustavou rovnic o více neznámých:

V knize „Deset knih o architektuře“ vypráví římský architekt *Vitruvius* (kolem počátku našeho letopočtu) o tom, kterak Archimédes rozřešil otázku váhových poměrů zlata a stříbra v koruně, kterou si dal zhotovit král Hieron Syrakuský. Nepoctivý zlatník byl pak potrestán smrtí.

Obvyklá varianta této úlohy je tato: „Koruna krále Hierona vážila 20 liber a ve vodě byla o $1\frac{1}{4}$ libry lehčí. Kolik zlata a stříbra obsahovala, jestliže byla vyrobena pouze z těchto dvou kovů, když $19\frac{1}{4}$ libry zlata ztratí ve vodě 1 libru, $10\frac{1}{2}$ libry stříbra ztratí rovněž ve vodě 1 libru na váze?“



Obr. 12. Slovní úlohy z Klatovského „Nowe knížky wo počztech“

Ze známé sbírky řeckých epigramů, kterou sebral v polovině XIV. století *Maximus Planudes*, pochází také tato úloha:

Společně kráčeli osel a mezek, každý s nákladem pytlů. Osel sténal a naříkal pod tíhou břemene. Mezek to zpozoroval a promluvil k naříkajícímu druhovi: „Staroušku, mluv, co pláčeš a běduješ jako holčička? Dvakrát tolik bych unesl co ty, kdybys mi dal jeden pytel. Kdybys mi jeden vzal, nesli bychom oba stejně.“

Tato úloha se pak objevuje v nesčetných obdobách téměř u všech spisovatelů různých početnic až do novověku. Téměř ve stejném znění ji uvádějí ve svých knihách také *Johann Widmann*, *Adam Ries* i *Daniel Schwenter*.

Kvadratické rovnice

Ukázali jsme už dříve (str. 105), že již staří Babylóňané znali kvadratické rovnice. Kvadratickou rovnici $x^2 + px + q = 0$ řešili úpra-

vou na tvar $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Odmocněním obou stran se pak získaly hodnoty x. To je tzv. metoda kvadratického doplnění.

Řečtí matematikové znali geometrické problémy, které vedly k řešení kvadratických rovnic. Tak stanovení úhlopříčky čtverce o straně 1 vedlo k ryze kvadratické rovnici $x^2 = 2$. Podobně proměna obdélníka ve čtverec o témž obsahu vedla ke kvadratické rovnici $a \,.\, b = x^2$. Euklides se ve svých dílech, zvláště v Základech, několikrát zabýval kvadratickými rovnicemi. Jejich řešení provádí geometricky.

Velmi známou úlohou ve starověku byl tzv. „zlatý řez". Euklides v druhé knize svých Elementů uvádí tuto úlohu takto: „Rozděliti úsečku a tak, aby obdélník, sestrojený z celé úsečky a jedné z obou částí, měl týž obsah, jako čtverec sestrojený ze zbývající části úsečky." V naší symbolice znamená tedy tato úloha řešení rovnice

$$a(a - x) = x^2.$$

Příčinou toho, že se staří Řekové tak intenzívně zabývali zlatým řezem, byla předpoklad, že úsečky dělené v poměru tohoto řezu jsou základní podstatou veškeré světské krásy a že se vyskytují v rozměrech lidského těla, rostlin, ba i v astronomii. Popudem k tomu byla zejména ta okolnost, že dělení úsečky zlatým řezem má důležitou úlohu v teorii pravidelného pěti a desetiúhelníka, jakož i v teorii pravidelného dvanáctistěnu. Všechny tyto teorie byly Řekům známé. Zlatý řez byl proto důležitým kritériem krásy a údajné dokonalosti ve všech druzích výtvarného umění: v malířství, v sochařství i v architektuře.

Diofantos rozeznává tři druhy kvadratických rovnic, které v dnešní symbolice píšeme ve tvaru

$$ax^2 + bx = c, \; ax^2 + c = bx, \; ax^2 = bx + c$$

(čísla a, b, c jsou kladná, $a \neq 0$). Uvádí pro každý tento druh také návod k řešení. O rovnici tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ vůbec neuvažuje, protože z tehdejšího stanoviska vývoje čísel neměla řešení; záporná a komplexní čísla tehdy ještě známa nebyla.

Další pokrok v problematice kvadratických rovnic učinili Indové. *Aryabhata* a *Bráhmagupta* řeší kvadratickou rovnici $ax^2 + bx = c$.

Řešení (podané slovní formulací) bychom dnes zapsali vzorcem:

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

Indický způsob řešení rovnic svědčí zřejmě o příbuznosti s výkladem Diofantovým.

Podobně jako Řekové ani Arabové — zejména *Al Chovarizmi* — neřeší kvadratické rovnice v obecné formě. Algebra nebyla ještě na takovém stupni vývoje, aby tato otázka mohla být řešena v celé šíři. Symbolika písmen ve významu čísel nebyla ještě zavedena, nepočítalo se s nulou a se zápornými čísly, komplexní čísla nebyla dosud známa.

Metoda výkladu Al Chovarizmiho připomíná způsob, jakým podával algebraické posudky o rovnicích Diofantos. Postup řešení je vždy vyložen na příkladech, kde koeficienty jsou čísla zvolená.

Nejprve probírá Al Chovarizmi „jednoduché formy rovnic":

$$ax^2 = c, \quad bx = c, \quad ax^2 = bx.$$

Dále rozeznává tři typy „složených" kvadratických rovnic:

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad ax^2 = bx + c.$$

Ani Al Chovarizmi neuvažuje ovšem o rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, neboť tato rovnice nemá kladné řešení a tedy pro arabské (stejně jako řecké) matematiky neměla řešení vůbec.

Ukažme na výtahu ze IV. kapitoly Al Chovarizmiho Algebry, jak provádí řešení kvadratické rovnice. Nejdříve je uvedena obecná formulace problému:

„Součet z násobku čtverce a jeho kořene je roven danému počtu jednotek." Jedná se tedy o řešení rovnice $ax^2 + bx = c$. Al Chovarizmi pak říká: „Výklad provedeme na příkladu: Součet čtverce a desetinásobku jeho kořene se rovná 39 jednotkám. Při tomto druhu rovnic zní otázka asi takto: Který čtverec, přičtený k desetinásobku svého kořene dá součet 39? Abychom vyřešili takovouto otázku, vezmeme nejprve polovinu kořenového činitele. Protože se v tomto případě jedná o desetinásobek kořene, vezmeme 5 a násobíme je týmž číslem; obdržíme 25. Toto číslo přičteme k 39; součet je 64. Od kořene (odmocniny), který je 8, odečteme polovinu

kořenového činitele 5; obdržíme 3. Jsou tedy 3 kořenem hledaného čtverce; čtverec sám je 9.

Obsahuje-li rovnice násobek čtverce, převedeme ji na tvar, v kterém je při čtverci součinitel jedna. Ostatní čísla v rovnici musí ovšem být změněna v stejném poměru. Převedení rovnice na uvedenou formu objasníme na následujícím příkladu:

Dvojnásobek čtverce a desetinásobek jeho kořene tvoří dohromady 48. Tuto rovnici lze vyslovit také takto: Který čtverec musíme násobit dvěma a přičíst k desetinásobku jeho kořen, abychom obdrželi 48? Nejprve upravíme rovnici tak, aby obsahovala pouze jeden čtverec. Protože ale jeden čtverec je polovinou ze dvou čtverců, je zřejmé, že je třeba dělit všechna čísla rovnice dvěma. Pak obdržíme: čtverec a pětinásobek jeho kořene je 24. To znamená: který čtverec má tuto vlastnost, že obdržíme 24, když k němu přičteme pětinásobek jeho kořene? Úlohu řešíme podle pravidla, které bylo výše vyloženo. Polovina činitele při kořenu čtverce je $2\frac{1}{2}$, jeho součin se sebou samým je $6\frac{1}{4}$. Přičteme je k 24 a dostaneme $30\frac{1}{4}$. Odtud vypočítáme odmocninu. Ta je $5\frac{1}{2}$. Odečteme polovičního činitele při kořeni (neznámé), tedy $2\frac{1}{2}$ a obdržíme jako kořen čtverce tři. Čtverec je tedy 9."

Podobně řeší Al Chovarizmi i další dva uvedené typy kvadratických rovnic.

S poznatky Al Chovarizmiho se na počátku XIII. století seznámil *Leonardo Pisánský*. Kvadratickým rovnicím věnuje hojně místa v XV. kapitole své knihy Liber abaci. V této kapitole zkoumá Leonardo v pestré směsi kromě jiného též řešení neurčité rovnice $x^2 + y^2 = b^2$ racionálními čísly. První mocninu neznámé nazývá radix, její druhou mocninu označuje quadratus, qui census dicitur (krátce census) a konstanty se jmenují numerus nebo denarius. Rozeznává „tres simplicis modi" (tři jednoduché případy): $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$ a „tres compositi modi" (tři složené případy): $ax^2 + bx = c$; $bx + c = ax^2$; $ax^2 + c = bx$. K řešení ovšem požaduje takovou úpravu rovnice, aby při x^2 byl koeficient 1. Řešení — vyjádřená slovně — odpovídají návodům, které jsme poznali v knize Al Chovarizmiho. Leonardo též ví, podobně jako

Al Chovarizmi, že rovnice $x^2 + q = px$ má dvě řešení, která dnes zapisujeme ve tvaru

$$x = \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \text{ když } \left(\frac{p}{2}\right)^2 > q.$$

Při svých výkladech řešení kvadratických rovnic užívá Leonardo Pisánský s oblibou geometrickou interpretaci.

V XV. století proniká italská algebra do Německa, kde se objevuje řada spisů, v nichž je probírána nauka o kvadratických rovnicích. Toto učení tu bývá vykládáno často velmi těžkopádně. Tak známý „Rechenmeister" *Adam Ries* (v prvé polovině XVI. století) ještě rozeznává 24 druhů rovnic, od tvaru $ax = b$ až po tvar $ax^4 = bx^2 + c$. Mezitím jsou ovšem také různé formy kvadratických rovnic. Všechny tyto druhy rovnic a jejich řešení se učí mechanicky a jsou předávány dále bez pokusu o obecné systematické soustředění a sjednocení.

Záporná řešení kvadratických rovnic připustili teprve v XVI. století *Stevin* a *Cardano*. Cardano a s ním celá tehdejší italská matematická škola se také zasloužila o uvedení komplexních čísel do matematiky a tím umožnila řešení rovnice $x^2 + px + q = 0$ i v případě, že $p^2 - 4q < 0$.

Matematik *Albert Girard*, žijící v Holandsku, vyslovuje roku 1629 větu, že rovnice n-tého stupně má n kořenů. Definitivní důkaz této věty podal *Gauss*. Také náš slavný matematik *Karel Petr* uveřejnil originální důkaz o počtu kořenů algebraické rovnice n-tého stupně. Souvislost kořenů kvadratické rovnice s jejími koeficienty poznal už *Francois Viète* v druhé polovině XVI. století.

Staré úlohy o kvadratických rovnicích

1. Dvě babylónské úlohy z doby 2000 před n. l.:

a) „Sedmina délky a obsah je dohromady 27. Šířka je $\frac{1}{2}$. Délku a obsah vypočítej." (Úloha se týká zřejmě obdélníka. V této a podobných babylónských úlohách jsou sčítány veličiny nestejných dimensí, jako je délka a obsah. Naproti tomu mladší matematika, zejména středověká, se už pečlivě vyhýbala sčítání veličin nestej-

ných rozměrů.) V naší symbolice znamená uvedená úloha řešení rovnic

$$\frac{x}{7} + xy = 27, \; y = \frac{1}{2}.$$

b) „Sedmina délky, sedmina šířky a sedmina obsahu dohromady dávají dvě. Délka a šířka dohromady jest $5\frac{5}{6}$. Délku a šířku vypočítej."

2. V *Diofantově* Aritmetice (III. století n. l.) nacházíme následující úlohy:

a) Ke dvěma číslům 200 a 5 jest určiti číslo, které násobeno prvým číslem (200) dá čtverec, násobeno druhým číslem, dá kořen tohoto čtverce.

b) Nalézti dvě čísla té vlastnosti, aby jejich součet byl 20 a součet jejich čtverců 208.

3. Úloha ze spisů *Bhaskarových*: „Osmina stáda opic, povýšena na druhou, dovádí rozpustile v háji a těší se ze hry, 12 ostatních štěbetá na kopci. Kolik opic čítá toto stádo?"

4. Z knihy Liber abaci (kolem roku 1220 n. l.) od *Leonarda Pisanského*:

a) „$\frac{19}{20}$ nějakého čísla je kořenem téhož čísla. Které jest to číslo?"

b) Dvě věže jsou od sebe vzdáleny 60 loktů. Jedna je 50 loktů vysoká, druhá 40 loktů vysoká. Mezi oběma věžemi je studna, která je stejně vzdálena od vrcholu obou věží. Otázka: Jak daleko je studna od paty jedné věže? (Vede tato úloha vskutku ke kvadratické rovnici?)

c) Rovnici

$$3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = 30$$

řeší Leonardo týmž způsobem jako dnes my.

d) Vtipně si počíná při řešení rovnice

$$3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$$

Považuje $x^2 - 3x$ za čtverec, jehož strana je novou neznámou $y = \sqrt{x^2 - 3x}$. Obdrží tak rovnici

$$y^2 + 4 = 4y$$

jejíž řešení vyslovuje ve formě, kterou dnes algebraicky zapisujeme takto: $y = 2 \pm \sqrt{4 - 4} = 2 \pm 0$. (Pozoruhodný počet s nulou!) Leonardo dostává ovšem pouze kladný kořen 4.

5. Z knihy *Leonarda Eulera* „Úvod do algebry":

„Někdo si koupí za 180 tolarů šátků. Kdyby bylo za stejné peníze šátků o tři více, byl by každý šátek o 3 tolary lacinější. Kolik bylo šátků?"

9. LOGARITMY

Vývoj čísel a historie počítání s nimi směřovala hned od počátku k zjednodušení a pohodlnějšímu zvládnutí větších a obtížnějších výpočtů. Prvým podstatným krokem v tomto směru bylo zavedení indických číslic v počtářské praxi a záhy také v obchodním životě. Přesto se tyto novoty často setkávaly s neporozuměním, někdy docela s odporem. Městská rada severoitalského města Florencie nařídila počátkem XIII. století, aby zápisy čísel v účetních knihách byly prováděny číslicemi římskými a písař při psaní čísel nesměl zvednout pero od papíru. V Praze ještě v 1. polovině XVI. století byl velký odpor vůči kupeckým knihám, které byly považovány za něco nepořádného. Dávala se přednost „cedulím řezaným" (tj. rabuším) a „českému počtu", tj. počtu, prováděnému římskými číslicemi tak, jak bylo tenkrát zvykem.

XVI. a XVII. století bylo dobou rychlého rozvoje vědy (zvláště astronomie), řemesel i obchodu. Dlouhé a obtížné plavby, které následovaly po objevení Ameriky, obeplutí Afriky a pak celé zeměkoule, vyžadovaly dobrou orientaci na moři — ve dne podle slunce, v noci podle hvězd. Astronomická pozorování měla vliv na rozvoj trigonometrie, která se neobešla bez rozsáhlých výpočtů.

Početní výkony sčítání a odčítání nečinily na počtáře velkých nároků, ať už počítal na lynách nebo písemně. Výkony násobení a dělení, zvláště když se jednalo o vícemístná čísla (jak tomu bylo zejména v astronomických výpočtech), byly obtížné a velmi zdlouhavé. Matematikové proto hledali cesty, jak počítání usnadnit. Záhy se uplatnila snaha, nahradit výkony násobení a dělení výkony

nižšího stupně, sčítáním a odčítáním. V druhé polovině XVI. století vznikla metoda, zvaná „prosthaphaeritis" (její název vznikl spojením řeckých výrazů pro sčítání a odčítání). Při této metodě se používalo některých goniometrických formulí. Součin dvou čísel se převáděl na součet jistých dvou čísel pomocí formule

$$\sin \alpha \,.\, \sin \beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Leč i tato metoda byla zdlouhavá a nepohodlná.

Skutečný pokrok dalekosáhlého významu pro rozvoj a urychlení velkých početních operací, jakož i pro rozvoj funkčního myšlení, znamenalo až vynalezení logaritmů.

V tomto období již znala matematika některé pojmy, které byly nutné k tomu, aby mohlo být zavedeno počítání pomocí logaritmů. Nicméně většina těchto pojmů nebyla zavedena v celé šíři, jak je tomu dnes, a tím byl také rozvoj logaritmů poněkud brzděn. Byly sice známy algoritmy početních výkonů s přirozenými čísly, často však i při zápisu indickými číslicemi se užívalo algoritmů velmi těžkopádných. Desetinné zlomky zdaleka nebyly obecně známy a používány. Rovněž pojem mocniny n byl vybudován v celé obecnosti. Přes tyto nedostatky však bylo počátkem XVII. století zahájeno počítání s logaritmy zcela úspěšně.

R. 1614 vyšla v Edinburgu kniha „Mirifici logaritmorum canonis descriptio" (česky: Popsání podivuhodného zákona logaritmů), kterou napsal skotský matematik *John Napier*. Kniha obsahovala tabulky logaritmů se základem o málo menším než je převrácená hodnota čísla, dnes nazývaného Eulerovou konstantou $e = 2{,}718\,281\,828..$

Roku 1620 vycházejí v Praze „Progress-Tabulen", jejichž autorem je hodinář a hvězdář císaře Rudolfa, *Joost Bürgi*, narozený roku 1562 v Lichtensteigu ve Švýcarsku. Základem těchto logaritmů je (podle nynějšího pojetí logaritmů) přibližně hodnota čísla e. Svou váhavostí a podivínstvím se připravil Bürgi o čest prvního uveřejnění. Jeho přítel, velký pražský hvězdář *Johannes Kepler* dosvědčuje, že Bürgi měl tabulky mnohem dříve hotovy, dávno před vydáním díla Napierova.

Základní myšlenka počítání s logaritmy spočívala na srovnávání členů geometrické posloupnosti s příslušnými členy aritmetické posloupnosti. Vynálezci logaritmů navazovali na úvahy, s nimiž se již setkáváme v knize „Arithmetica integra" (vyšla r. 1544 v Norimberku). Jejím autorem je Lutherův přítel *Michael Stifel*, který žil v XVI. století v Eslingách a v Jeně. Předmluvu ke knize napsal *Filip Melanchton*. Po výkladu o srovnání členů jmenovaných posloupností Stifel praví: „Tyto úvahy ukáži na příkladě:

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Mohla by se napsat celá kniha o zázraku čísel, musím se však omezit a odejít se zavřenýma očima. Jednu věc však chci z dřívějšího opakovat, aby mi někdo nevytkl, že jsem v tomto oboru nic neudělal. Všemu, co se v geometrické posloupnosti provádí násobením a dělením, odpovídá v aritmetické posloupnosti sčítání a odčítání.

Příklad: Když násobím $\frac{1}{8}$ číslem 64, obdržím výsledek 8. Tomu odpovídá (v aritmetické posloupnosti) −3 přičteno k 6, výsledek 3. Číslo −3 je exponent $\frac{1}{8}$, 6 exponent 64 a 3 exponent čísla 8.

Podobně, když dělím 64 číslem $\frac{1}{8}$, je výsledek 512. Odečtu-li −3 od 6, obdržím 9. Číslo 9 je ale exponentem čísla 512.

Podobně, dělím-li $\frac{1}{8}$ číslem 64, obdržím $\frac{1}{512}$. Odečtu-li 6 od −3, obdržím −9. Ale −9 je exponentem zlomku $\frac{1}{512}$."

Obdobnými úvahami se však zabýval již *Archimédes*. V dopise, adresovaném syrakuskému králi Hieronovi, hledá Archimédes čísla, která vyjadřují počet takového množství pískových zrn, která by vyplnila celý vesmír. Řešení tohoto problému tvoří v podstatě důkaz, že řada přirozených čísel nikdy nekončí. V této úvaze se setkáváme s větou, ve které Archimédes říká asi toto: Jestliže vynásobím dvě čísla, například 100 a 1000, pak jejich součin 100 000 je takového „stupně", jaký dosáhneme, když sečteme čísla „stupňů" 3 + 4 daných čísel a odečteme jednu. Tedy „stupně" šestého. Toto číslo — „stupeň" — není ovšem řádem čísla v desítkové soustavě v našem slova smyslu. Ale „logaritmický" způsob myšlení je tu zřejmý.

Logaritmické tabulky se základem 10 byly poprvé uveřejněny v roce 1617 Angličanem *Henry Briggsem.*

Označení „logaritmus naturalis" (přirozený logaritmus) užívá *Nicolaus Mercator* (XVII. století v Londýně) pro označení logaritmu, který je takto definován:

$$\ln(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots$$

Mercator též záhy poznal, že logaritmy přirozené jsou s logaritmy dekadickými v poměru 1 : 0,434 294 48 ... Znal tedy v podstatě metodu převádění hodnot logaritmů o různých základech z jedné soustavy do druhé.

V XVIII. století zavádí *Leonard Euler* pojem logaritmu jako inversní funkce k funkci $y = a^x$, tedy jako exponent. Tento způsob definování logaritmu je užíván v našich školních učebnicích. Euler též zavedl symbol e pro limitu součinu součtu nekonečného počtu členů posloupnosti

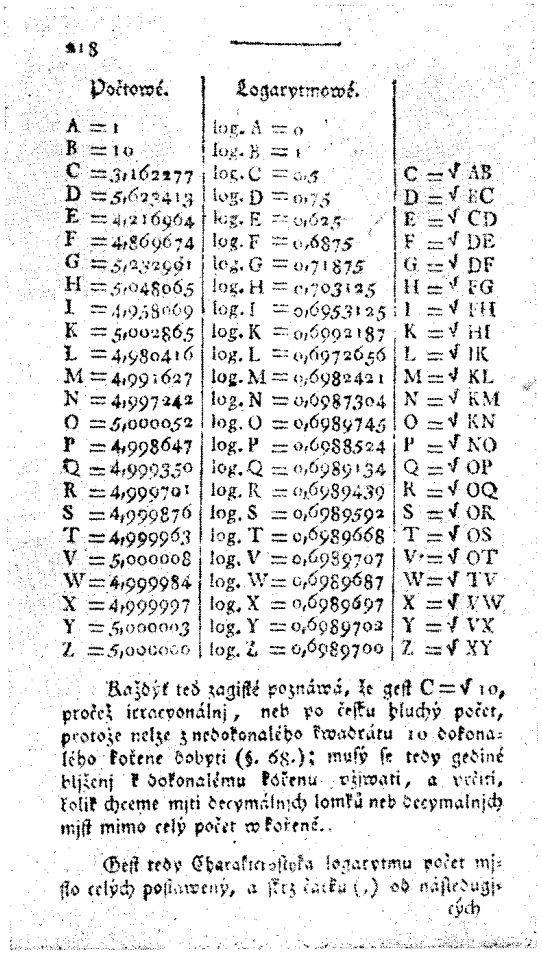
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \dots$$
$$e = 2{,}718\,281\,828\dots$$

Již od dob zakladatele dekadických logaritmů, anglického matematika Briggse, se počítaly logaritmy kromě jiných metod také způsobem, kterým je počítá i náš *Vydra* ve své „Arytmetyce" (viz obr. 13). Tento způsob vychází z následující úvahy:

Jestliže $x = \log a$ a $y = \log b$, pak $\log\sqrt{ab} = \frac{x+y}{2}$. Logaritmus čísla N, které je mezi $a = 10^a$ a $b = 10^{a+1}$ bude mezi čísly a a $a + 1$; $\log\sqrt{ab} = \log 10^{a+\frac{1}{2}}$ je tedy $a + \frac{1}{2}$ ($\sqrt{ab}$ snadno vypočítáme). Číslo N je buď mezi 10^a a $10^{a+\frac{1}{2}}$ nebo mezi $10^{a+\frac{1}{2}}$ a 10^{a+1}. Opakujeme výpočet pro tento užší interval a pokračujeme tak dlouho, až obdržíme interval dostatečně malý — čili až stanovíme přibližnou hodnotu logaritmu čísla s přesností, jakou pro určitý úkol potřebujeme. Na obrázku 13 je výpočet proveden pro přibližnou hodnotu logaritmu čísla 5. Za čísla a a b byla zvolena čísla 10^0 a 10^1.

Napier ani Bürgi nevyslovili hned jasně všechna pravidla pro počítání s logaritmy. Shledáváme se s nimi např. až u *Oughtreda* (1648).

Název logaritmus (*λογος αριδμος- logos arithmos*, tj. číslo poměru) a název numerus pocházejí od Napiera. Funkční pojetí logaritmu přimělo Eulera k tomu, aby zavedl název basis. Označení logaritmické funkce se během vývoje dosti měnilo. *Cauchy* (1821) doporučoval rozeznávat logaritmy přirozené a dekadické již v označení funkce. V dnešní době se Briggsův logaritmus čísla x značí log x, přirozený logaritmus (tj. logaritmus o základu e) pak $\ln x$.



Počtowé.	Logarytmowé.	
A = 1	log. A = 0	
B = 10	log. B = 1	
C = 3,162277	log. C = 0,5	C = √ AB
D = 5,623413	log. D = 0,75	D = √ BC
E = 4,216964	log. E = 0,625	E = √ CD
F = 4,869674	log. F = 0,6875	F = √ DE
G = 5,232991	log. G = 0,71875	G = √ DF
H = 5,048065	log. H = 0,703125	H = √ FG
I = 4,958069	log. I = 0,69531 25	I = √ FH
K = 5,002865	log. K = 0,69921 87	K = √ HI
L = 4,980416	log. L = 0,69726 56	L = √ IK
M = 4,991627	log. M = 0,69824 21	M = √ KL
N = 4,997242	log. N = 0,69873 04	N = √ KM
O = 5,000052	log. O = 0,69897 45	O = √ KN
P = 4,998647	log. P = 0,69885 24	P = √ NO
Q = 4,999350	log. Q = 0,69891 34	Q = √ OP
R = 4,999701	log. R = 0,69894 39	R = √ OQ
S = 4,999876	log. S = 0,69895 92	S = √ OR
T = 4,999963	log. T = 0,69896 68	T = √ OS
V = 5,000008	log. V = 0,69897 07	V = √ OT
W = 4,999984	log. W = 0,69896 87	W = √ TV
X = 4,999997	log. X = 0,69896 97	X = √ VW
Y = 5,000003	log. Y = 0,69897 02	Y = √ VX
Z = 5,000000	log. Z = 0,69897 00	Z = √ XY

Každýť teď zagisté poznáwá, že gest C = √ 10, proteż ireacyonálnj, neb po cesku hluchý počet, protože nelze z nedokonalého kwadrátu 10 dokonalého kořene dobyti (§. 68.); musý se tedy gediné bljženj k dokonalému kořenu vžjwati, a vrčiti, kolik chceme mjti decymálnjch lomků neb decymalnjch mjst mimo celý počet w kořeně.

Gest tedy Charakteristyka logarytmu počet mjsto celých postawený, a skrz čarku (,) od následugjcých

Obr. 13. Stránka z Vydrovy „Arytmetyky". Výpočet logaritmu čísla 5

IV.

GEOMETRIE

1. VZNIK GEOMETRIE

První popudy k vytváření geometrických představ nacházel primitivní člověk ve svém životním prostředí. Souměrnost lidského těla i těla nejrůznější lovné zvěře usměrňovala jeho vkus, geometrie květů, plodů a patrně také některých krystalů nutila udiveného pračlověka, aby uvažoval o těchto věcech a používal jich především jako ozdob. Později se pokusil i o jejich zobrazení. Volně padající kámen, kmen stromu, stejně jako nejkratší cesta k usmrcené kořisti nebo sluneční paprsky, pronikající skulinami mezi listovím pralesa, byly jakési modely, které názorně vytvářely první představy úsečky a snad i přímky. Brzy se ukázalo, že mnohé takové znalosti mohou být spojeny se značnými výhodami pro člověka. Poznatek, že úsečka je nejkratší spojnicí dvou bodů, je patrně vrozen každému živočichu, protože i zvěř přichází k místu svého krmení zpravidla po nejkratší cestě. Bezpochyby rovněž pudově chápe člověk — a podobně i zvíře — praktickou aplikaci poučky, že součet dvou stran trojúhelníka je vždy větší než strana třetí. Pračlověku se naskytla při pronásledování kořisti nebo nepřítele nesčetněkrát příležitost ověřit si prakticky užitečnost tohoto geometrického teorému. Bylo by velmi snadné vyhledat množství podobných příkladů, kdy strach, pud sebezáchovy, kořistnictví a různé jiné pohnutky vedly člověka k aplikování geometrických pouček podstatně dříve, než byly známy první soustavy axiómů.

Tato jakási „pudová geometrie" byla brzy doplňována dalšími zkušenostmi s ději přírodními (neboť příroda „geometrisuje" neustále) a postupným rozumovým vývojem člověka, který se geometrisování pomalu učil. Získané znalosti mu usnadňovaly existenční boj a činily život krásnější i zajímavější. Stavba obydlí a ochrana před slunečním žárem nebo naopak potřeba slunečního svitu vedly ke zkušenosti, miliónkrát opakované a tím potvrzené, že stín stromů nebo skal se pohybuje stále v určitém ohraničeném prostoru. Tato vědomost umožnila předvídání situací, které za některých okolností byly pro člověka výhodné, jindy nevýhodné. Podobné úvahy vedly člověka při jeho rozhodování o tom, kde a jak si postavit obydlí, kde si zvolit pastviny a kde pole. Pozorování zvyků zvěře i vlastní zkušenosti ho poučily o nejvhodnějším tvaru obydlí se zřetelem k prostředí a materiálu, ze kterého se stavělo. Prvá uzavřená lidská obydlí, postavená nad zemí, měla tvar polokulový nebo kuželový. Záhy ovšem byly také zřizovány stavby tvaru jehlanu, kvádru nebo obydlí, jejichž dolní část měla tvar válce, střecha byla kuželová apod. Člověk přetvářel různé prostorové představy, kterých zužitkovával k zlepšení svého života. Plavba po řekách a mořích ho poučovala, že lodi určitých tvarů jsou více či méně vhodné k tomu či onomu účelu. Prostorové představy použité při stavbě lodí se osvědčily jako velmi vhodný prostředek k zlepšení bezpečnosti nebo rychlosti plavby a byly proto uchovány a předávány dále. Tyto představy byly ovšem naprosto materiálního rázu, dnes označované termíny kmen, trám, prkno, tyčka, popřípadě i termíny ještě méně geometrickými, než jsou tyto. Přesto už člověk myslel prostorově a také řešil s těmito pojmy značné množství prostorových úloh. Třebaže tak činil zprvu primitivně empiricky, nahromadil řadu zkušeností, které ho přesvědčily, že přemýšlením před započetím práce si může uspořit mnoho námahy a materiálu a že tak dosáhne lepšího výsledku.

Jiným pramenem pro tvoření a shromažďování představ geometrického rázu byla snaha orientovat se v prostoru a touha naučit se určité jevy a události předvídat. Dnes a denně se reprodukoval proces pohybu slunce po obloze. Nejkratší stín tvořilo slunce vždy v téže vertikální rovině, stejně položené vzhledem k okolním stromům, skalám atd. Tato odpozorovaná skutečnost vedla k představě severojižního směru. Dvakrát za rok, vždy v době rovnoden-

nosti, zapadlo slunce ve směru kolmém na směr sever-jih. To byly základní prvky poněkud obecnější orientace v přírodě.

Delší cesty byly snadnější a méně nebezpečné, jestliže se poutník mohl opřít o představu okolí, ve kterém se pohyboval. Není pochyby o tom, že první takové představy byly předávány ústně. Záhy se však ukázalo, že situace, zachycená trvale na kůře stromů nebo jiným vhodným způsobem je mnohem cennější než pouhý popis cesty.

Obr. 14. Geometrické prvky na popelnici

Od pradávna člověk zdobil rád sebe, své milé i předměty své denní potřeby. K tomuto účelu užíval vzory, odpozorované z přírody. Brzy se však shledáváme na jantarových ozdobách, na nádobách nebo jiných předmětech s prvky, které dnes považujeme za geometrické (viz obr. 14). Značné dovednosti měřického — skoro bychom mohli říci topologického — druhu jsou základem tkaní látek. Různou strukturu tkanin dnes dovedeme vyjádřit dost obtížnými rovnicemi diferenciálními.

K vzniku a rozvoji geometrických představ přispěly především národy, zabývající se polním hospodářstvím. Velikost pole byla odhadována prací, která musila být vynaložena při jeho obdělávání. Jindy se posuzovala velikost pole z množství obilí, kterého bylo potřebí na jeho osetí. Tyto představy o rozloze polí byly však velmi nepřesné, a proto zanedlouho nevyhovovaly.

Určování vhodné doby setí se mezi jiným zakládalo také na pozorování jevů na obloze. To předpokládalo některé geometrické vědomosti, hlavně jakousi představu úhlu. Sklizená úroda byla ukládána, měřena a rozdělována. K tomu sloužily nádoby, které měly podobu základních geometrických tvarů (hranolů, kuželů, válců).

Je zřejmé, že všechny tyto poznatky, zkušenosti a dovednosti tvořily zatím velmi neurčité náznaky toho, čemu dnes říkáme geometrie.

Nejjednodušší abstraktní představy, které tvoří základ geometrie, jen velmi zvolna uzrávaly v myslích lidí. Nijak nepřekvapuje, že první zprávy o vzniku geometrie máme z krajů, které měly nejpříznivější podmínky pro úspěšné polní hospodaření a tedy také vhodné podmínky pro růst blahobytu a větší zalidnění krajiny.

Nejstarší řecký dějepisec *Hérodot* (V. století př. n. l.) vypráví ve svém spise „Historiai" o původu geometrie. Faraón Ramses II. rozdělil půdu mezi Egypťany tak, že každý obdržel pole čtyřúhelníkového tvaru a stejného obsahu. Z jeho výnosu odváděl každoročně faraónovi daně. Byla-li někomu při nilských záplavách část pole odplavena, bylo jeho povinností oznámit to faraónovi, který poslal zeměměřiče, aby škodu zjistili a podle zbylé výměry i správně určili novou daň. Hérodot k tomu poznamenává: „A to byl, podle mého mínění, počátek geometrie, která pak přišla do Řecka."

I když byla egyptská geometrie záležitostí výhradně vzdělané kasty kněží, obsahují matematické papyry, které se nám dochovaly, předpisy praktických návodů, souvisících vesměs s úkoly vyměřování polí, sýpek, nádob na obilí a podobnými problémy praktického rázu. Řecký filosof *Isokrates* (IV. století př. n. l.) ve svých spisech dosvědčuje, že se starší egyptští kněží věnovali důležitějším záleži-

tostem, kdežto mladším bylo doporučeno zříci se světských radostí a věnovat se hvězdopravectví, počtářství a geometrii.

Před více než čtyřmi tisíci lety byly v Egyptě postaveny náhrobky faraónů, zvané pyramidy, jež se zachovaly až do našich dnů. Jsou to významné památky stavitelského a také geometrického umění starých Egypťanů. Ukazují však též nesmírnou nadutost, domýšlivost a zvůli vládnoucích faraónů. Pro jejich posmrtnou schránku pracovaly statisíce otroků a hynuly přitom nesmírnou námahou v úmorném vedru. Dodnes musíme obdivovat houževnatou vytrvalost těchto otroků a dovednost, s níž byly pyramidy stavěny z ohromných kamenných kvádrů velmi primitivními prostředky. Jejich stavitelé je zbudovali velmi přesně. Tak např. pyramida Cheopsova měla téměř dokonalou čtvercovou základnu s rozměry 230,253 m, 230,391 m, 230,454 m, 230,357 m. Je patrno, že samo vytyčení tohoto čtverce o straně takřka čtvrt kilometru dlouhé bylo tehdy obtížným úkolem praktické geometrie. Největší odchylka jednotlivých vrcholů čtvercové základny pyramidy od horizontální roviny činila jenom 0,021 m.

Též Ahmesův papyrus obsahuje některé geometrické poznatky o rozdělování polí, o výpočtu objemu obilních sýpek, úlohy o obsahu rovinných obrazců atd. Podle *Ahmese* to byl „předpis, jak dospěti ku známosti všech temných věcí, všech tajností, jež ve věcech viditelných jsou obsaženy." V papyru jsou též zaznamenány různé pokyny pro úspěšné hospodářství. Tak se hospodáři např. radí: „Hub hmyz, myši, svěží plevel, hojné pavouky. Pros boha Ra o teplo, vítr a vysokou vodu."

Dějiny vzniku geometrických představ a prvních poznatků nás učí, že to byla především lidská práce, nesčetné množství drobných úkonů pradávného člověka, jeho vynalézavost, snaha po lepším, snadnějším a současně bohatším životě, jež vedla ke vzniku a rozvíjení geometrických představ a poznatků i jednoduchých konstrukcí.

2. VĚDECKÉ POJETÍ GEOMETRIE

A. Praktické geometrické poučky, které vznikly v Egyptě, v Mezopotamii i jinde, byly téměř úplně odvozeny ze zkušeností a pozorování při praktických úlohách zeměměřických, stavebních, zemědělských apod. Egypťané a Babylóňané řešili četné příklady aritmetického a geometrického obsahu podle zvláštních pravidel anebo pomocí zvláštních tabulek, aniž by znali nějakou obecnou teorii, z níž by se dala tato pravidla odvodit. Mnohá z těchto pravidel byla proto pouze přibližná, a třebaže v některých případech dávala dobré výsledky, vedla jindy k výsledkům chybným.

Naproti tomu byl vývoj matematiky ve starém Řecku podstatně jiného směru. Tam totiž počínajíc VII. stoletím př. n. l. se počala vyvíjet matematická teorie. Starořečtí filosofové sebrali všechny do té doby známé geometrické poznatky a vytvořili z nich vědecký systém, který nazýváme geometrie. Slovo geometrie je původu řeckého a znamená měření země (geos = země, metrein = = měřiti).

Při svém bádání postřehli řečtí filosofové rozmanité souvislosti mezi jednotlivými geometrickými větami a oddělili jejich teoretický obsah od praktického použití. Na tomto procesu se podílela řada starořeckých matematiků a filosofů, jako byli např. *Thales z Miletu* (VI. století př. n. l.), *Pythagoras* (VI. století př. n. l.), *Hippokrates* (asi V. století př. n. l.), *Demokritos* (asi V.—IV. století př. n. l.), *Eudoxos* (IV. století př. n. l.), *Platón* (IV. století př. n. l.) a mnozí jiní.

Jedním z nejvýznačnějších starořeckých matematiků byl *Euklides* (IV. století př. n. l.), který shromáždil veškeré tehdejší důležité geometrické poznatky ve spise zvaném „Základy" (řecky „Stoicheia", latinsky „Elementa"). V tomto spise vychází Euklides z několika základních vět — tzv. postulátů — a z nich pak odvozuje logickým uvažováním všechny ostatní geometrické věty. Správnost oněch několika základních vět Euklides nedokazuje, ale jejich pravdivost si ověřuje podle zkušeností a praxí.

Euklidovy základy měly více vydání než kterákoli jiná kniha na světě kromě bible a byly přeloženy do všech kulturních jazyků

světa. Např. již v IX. století n. l. byly přeloženy do arménského a gruzínského jazyka. Po dobu téměř dvou tisíciletí sloužily Základy jako učebnice geometrie všem vynikajícím myslitelům lidstva. Z nich se například učil slavný polský hvězdář *Mikuláš Kopernik* (XVI. století), skvělý italský fyzik a matematik *Galileo Galilei* (XVII. století), vynikající francouzský filosof a matematik *René Descartes* (XVII. století), pokrokový ruský vědec *Lomonosov* (XVIII. století) a mnozí další.

Velmi mnoho skvělých výsledků řecké matematiky, kterých dosáhl Euklides, neztratilo svůj význam ani v dnešní době. Nicméně měla i starořecká matematika značné nedostatky, podmíněné především zvláštnostmi otrokářské společnosti. Tyto nedostatky brzdily podstatně každý její další pokrok. Bylo to hlavně odtržení teorie od praxe plynoucí z přesvědčení, že pravá věda se nemá zabývat materiálními potřebami lidí, neboť „praktické užití vědy prý vědu snižuje". Přesto však i v starořecké matematice se vyskytli někteří vědci, jako například Demokritos, *Archimédes* (III. století př. n. l.), *Herón z Alexandrie* (kolem r. 100 př. n. l.) a někteří další, kteří správně zkoumali vzájemné vztahy mezi teorií a praxí, mezi zkušenostmi a logickým uvažováním.

Euklides propracoval velmi důkladně teorii těch geometrických konstrukcí, při nichž bylo dovoleno užívat pouze pravítka a kružítka. Vycházel přitom ze dvou jednoduchých úloh, totiž

1. dané dva body spojit přímkou,
2. ze zvoleného bodu opsat kružnici daným poloměrem.

Pomocí těchto dvou řeší pak i další úlohy, jako například vztyčování a spouštění kolmice k dané přímce, půlení úsečky a úhlu, sestrojování některých pravidelných mnohoúhelníků apod. Podle Euklida nazýváme dnes geometrické konstrukce, které lze provést jen pravítkem a kružítkem, konstrukcemi euklidovskými. Jejich důležitost je nesporná, neboť tvoří jakýsi základ, na němž se rozvíjí celá geometrie.

Přes rozmanité nedostatky Euklidových Základů přísluší jejich autorovi nesmírná zásluha o to, že matematika je první vědou,

která si již ve starověku vybudovala správnou vědeckou soustavu a přesný vědecký způsob myšlení.

Látku, kterou se Euklides v Základech zabývá, rozdělil do třinácti oddílů čili knih. V každé knize zachovává týž postup výkladu. Nejprve definuje pojmy, o nichž se v knize mluví. Tak v čele první knihy jsou 23 základní „definice". V prvé z nich se praví „Bod je to, co nemá částí", v druhé „Čára jest délka bez šířky", v třetí „Hranicemi čáry jsou body" atd.

Po definicích následují věty, které nazývá postuláty (požadavky). V prvé knize je jich uvedeno pět. Požaduje se v nich

I. aby každý bod bylo možno spojit s každým bodem přímkou,
II. aby každou přímku bylo možno neomezeně prodloužit,
III. aby z libovolného středu bylo možno opsat kružnici libovolným poloměrem,
IV. aby si všechny pravé úhly byly rovny,
V. aby přímka, protatá dvěma dalšími přímkami a tvořící s nimi po jedné své straně vnitřní přilehlé úhly o součtu menším než 2R, měla vždy průsečík oněch dalších přímek na této straně.

Tento V. postulát tvoří základ nauky o rovnoběžkách. Pomocí něho dokazuje Euklides poučku, že lze libovolným bodem vést k libovolné přímce vždy jedinou rovnoběžku.

Po postulátech pak následují věty, kterým říká axiómy. V prvé knize Základů je devět axiómů. Například: „Veličiny rovné třetí jsou si navzájem rovny"; nebo „Jestliže k stejným veličinám přičteme stejné veličiny, obdržíme opět stejné veličiny" atd. (Výrazy „postulát" a „axióm" bývají často mezi sebou zaměňovány.)

Na základě těchto „definic", postulátů a axiómů odvozuje Euklides další poučky. Na rozdíl od postulátů a axiómů, které pokládá za známé, prokázané zkušeností, a proto je nedokazuje, všechny další poučky pečlivě dokazuje. Každý pojem a každý termín, který nově zavádí, definuje pomocí definic základních. Přitom si však musíme uvědomit, že Euklidovy základní „definice" nejsou vždy definicemi v dnešním slova smyslu. Nelze například definovat

bod jako „to, co nemá částí", když jsme předtím nemluvili o tom, co znamená být částí něčeho. O části něčeho ovšem mluvit nemůžeme, když ani nevíme, co je to bod. Nemůžeme tedy definovat přímku a rovinu, nýbrž musíme je prostě považovat za známé ze zkušenosti.

Euklidovy základy jsou převážně geometrického rázu. Geometrie totiž požívala v Řecku neobyčejné vážnosti. Dokázat přesně nějakou matematickou poučku znamenalo tehdy dokázat ji geometricky. Všechna matematika byla v podstatě geometrisována. Kromě toho byly geometrické znalosti pokládány za nezbytnou průpravu k filosofickému studiu.

Všimněme si nyní stručně obsahu jednotlivých knih Euklidových Elementů:

Prvá kniha obsahuje poučky o vlastnostech trojúhelníka, podmínky shodnosti trojúhelníků, nauku o rovnoběžkách a rovnoběžnících a podmínky pro rovnost trojúhelníků a mnohoúhelníků. Končí větou Pythagorovou.

Druhá kniha jedná o proměně mnohoúhelníka na čtverec stejného obsahu. Zde se též geometrickým způsobem dokazují identity, které dnes zapisujeme rovnicemi

$$ab + (a - b)a = a^2,$$
$$ab = b(a - b) + b^2.$$

Třetí kniha se zabývá kružnicí. Kromě základních vlastností kružnice je tu probírána vzájemná poloha dvou kružnic, poloha kružnice a přímky a vztah úhlů středových k obvodovým.

Čtvrtá kniha pojednává o mnohoúhelnících kružnici opsaných i vepsaných, zvláště o mnohoúhelnících pravidelných.

Pátá kniha obsahuje nauku o poměrech a úměrnosti úseček. Zde se Euklides opíral o výsledky prací *Eudoxových*.

Šestá kniha jedná o podobnosti mnohoúhelníků. Euklides v ní také vyšetřuje, kdy jsou dva obrazce rovnoploché, ale nepodává přitom poučky, které vyjadřují obsahy obrazců. Kniha se opírá o výsledky práce pythagorovců.

Sedmá až devátá kniha obsahuje nauku o číslech přirozených, o prvočíslech atd., desátá kniha pak nauku o souměřitelných a nesouměřitelných veličinách. Je to v podstatě základ teorie iracionálních čísel.

Jedenáctá kniha shrnuje věty o poloze přímek a rovin v prostoru, tj. základy stereometrie. Dvanáctá kniha obsahuje teorii objemů, mnohostěnů a rotačních těles. Euklides zde používá Eudoxovy metody (tzv. exhausční), která je předchůdcem dnešní teorie limit.

Poslední třináctá kniha jedná o pravidelných mnohostěnech. Euklides zde dokazuje, že takových těles je pouze pět.

Euklidovy Základy byly po více než dva tisíce let vzorem dokonalé učebnice geometrie. V nich dostoupilo starořecké abstraktní matematické myšlení svého vrcholu a tím nabyla matematika zvláštního postavení mezi ostatními přírodními vědami. Stalo se jejím charakteristickým rysem, že počala abstrahovat od řady vlastností specifických pro hmotné předměty a počala studovat pouze prostorové formy a kvantitativní vztahy, tj. takovou stránku hmotné skutečnosti, která může mít platnost v nejrůznějších oblastech.

Metodě budování geometrie, ve které pomocí daných základních (nedokazovaných) vět dokazujeme všechny ostatní geometrické poučky, říkáme metoda axiómatická. V Euklidových základech je poprvé zpracována geometrie skoro v celém tehdy známém rozsahu metodou axiómatickou. Význam axiómatické metody v geometrii spočívá v tom, že všechny geometrické poučky jsou pevně skloubeny v jednotný systém a že se jejich správnost dá vždy rozhodnout jenom pomocí axiómů a pouček již dříve dokázaných.

Původní Euklidovy základní pojmy a poučky byly podrobně prozkoumány pozdějšími matematiky, přičemž se ukázalo, že je často výhodnější volit za axiómy jiné poučky, než si vybral Euklides. Největší pokrok tu znamenaly práce německého matematika *Davida Hilberta* (1862—1943), který roztřídil geometrické axiómy do pěti skupin podle toho, kterých vlastností a vztahů mezi body, přímkami a rovinami se tyto axiómy týkají (tzv. Hilbertův systém axiómů).

Do první skupiny zařadil Hilbert tzv. axiómy incidence (spojování), týkající se jednak útvarů rovinných, tedy potřebných pro budování planimetrie, jednak axiómy, týkající se útvarů prostoro-

vých, které musí být užity při budování stereometrie. Jsou to vesměs poučky zřejmé z názoru, jako např.: „Třemi body, které neleží v přímce, je určena jediná rovina“, nebo: „Leží-li dva body v dané rovině, pak v ní leží i celá přímka těmito dvěma body určená“, nebo: „Mají-li dvě roviny jeden bod společný, pak mají ještě jeden další společný bod“ apod.

Do druhé skupiny axiómů patří ty axiómy, které popisují uspořádání bodů na přímce. Lze je opět rozdělit do dvou podskupin:

a) Axiómy uspořádání bodů na přímce:

1. Jsou-li body A, B, C různé body přímky a leží-li bod B mezi body A, C, leží bod B také mezi body C, A.

2. Jsou-li A a C dva různé body přímky, pak existuje vždy aspoň jeden bod B, který leží mezi body A a C, a aspoň jeden bod D takový, že bod C leží mezi body A a D.

3. Ze tří různých bodů A, B, C ležících na téže přímce leží jeden a právě jeden mezi ostatními dvěma.

b) Rovinný axióm (tzv. Paschův axióm):

Jsou-li A, B, C tři body neležící v přímce a je-li p přímka roviny ABC, která neprochází žádným z bodů A, B, C a která obsahuje bod D ležící mezi body A, B, pak obsahuje přímka p buď jistý bod E, ležící mezi body B, C nebo jistý bod F ležící mezi C, A.

Pravidla o uspořádání bodů na přímce jsou pro geometrii nepostradatelná, ačkoli se zdají tak samozřejmá, že ani Euklides, ani geometři dvou tisíciletí po něm následujících přes vytrvalé zkoumání základů geometrie, zejména ke konci XVIII. a během XIX. století, nepostřehli nutnost tyto axiómy výslovně formulovat. Nápravu tohoto nedostatku provedl teprve znamenitý německý geometr *Moritz Pasch* (XIX. stol.) v knize „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Axiómy uspořádání podávají návod, kterak zacházet s pojmem „mezi“ a vytvářejí předpoklady pro geometrické úvahy s tímto pojmem.

Geometrie, která se omezuje na použití těchto prvních dvou skupin axiómů, nazývá se geometrií polohy.

Třetí skupinu tvoří axiómy shodnosti. Požadavky vyslovené v této skupině bývají někdy vykládány na základě pojmu pohybu

nebo shodného zobrazení. Jindy je shodnost mezi dvěma geometrickými útvary vytvářena na základě vlastností, které ji geometricky charakterisují. Tuto cestu při budování geometrie zvolil ke konci minulého století M. Pasch, Ital *Giuseppe Veronese* a německý matematik *David Hilbert*. Vyslovme axiómy shodnosti podle knihy docenta *Jana Vyšína*: „Elementární geometrie“, III. díl.

1. Budiž dána úsečka AB a polopřímka CD. Na polopřímce CD leží jediný bod E různý od C takový, že úsečky AB a CE jsou shodné. Úsečky AB a BA jsou shodné.

2. Nechť platí $AB = CD$, $CD = EF$, pak je také $AB = EF$.

3. Budiž B bod ležící mezi A, C a B' bod ležící mezi A', C' a nechť platí $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Pak je také $AC = A'C'$.

4. Buďte dány body A, B, C, které neleží v přímce a body A', B', M, které neleží v přímce. Nechť je $AB = A'B'$. Pak v polorovině $A'B'M$ leží jediný bod C' takový, že $A'C' = AC$, $B'C' = BC$.

5. Buďte A, B, C a A', B', C' dvě trojice různých bodů neležících v přímce a nechť platí $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$. Budiž P bod ležící mezi A, B a P' bod ležící mezi A', B' tak, že $A'P' = AP$. Pak je také $C'P' = CP$.

Ve čtvrté skupině je jediný axióm o rovnoběžkách, o němž promluvíme později (str. 140).

Pro měření délek, ploch a objemů je zvlášť důležitý tzv. axióm Archimédův, který Hilbert zařadil do páté skupiny tzv. axiómů spojitosti. Tento axióm zní: Je-li dána polopřímka AB a úsečka CD pak na polopřímce AB existují body vesměs různé $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, že úsečky AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, jsou shodné a polopřímky BA, BA_n jsou opačné. Názorně řečeno to znamená: Zvolíme-li určitou délku za jednotku měření, pak jí můžeme každou délku změřit, neboť přikládáme měřítko tak dlouho, až požadovanou délku dosáhneme nebo poprvé přesáhneme. Že se tak stane, je zaručeno právě Archimédovým axiómem.

Do páté skupiny zařadil Hilbert dále tzv. axióm úplnosti. Je-li tento axióm splněn (a platí-li všechny axiómy uvedené v prvních čtyřech skupinách i axióm Archimédův), pak lze teprve říci, že každé kladné číslo je velikostí nějaké úsečky. Čtenáře, který by si

přál bližšího poučení o tomto zajímavém problému, odkazujeme na vhodnou učebnici geometrie, např. na jmenovanou už knihu Jana Vyšína, Elementární geometrie, III. díl, str. 80 a další.

Když matematici zjistili, že lze axiómy výhodně volit různými způsoby, snažili se, aby těchto axiómů bylo co nejméně a aby současně byly co nejjednodušší. Souhrn všech zvolených axiómů tvoří tzv. soustavu axiómů. Při volbě jednotlivých pouček za axiómy není ovšem úplná libovůle. Především můžeme za axiómy volit jen takové věty, pomocí nichž nelze nikdy dokázat poučky vzájemně si odporující. Ta soustava axiómů, která vyhovuje této podmínce, se nazývá bezesporná. Kromě toho po soustavě axiómů žádáme, aby byla úplná, to znamená, že každá geometrická poučka se má dát pomocí zvolených axiómů buď dokázat nebo vyvrátit. Úplný systém axiómů pro geometrii rovinnou není ovšem úplný pro geometrii prostorovou. Proto jsme museli pro stereometrii některé axiómy k soustavě axiómů rovinných přidat. Konečně od soustavy axiómů vyžadujeme, aby se žádný ze zvolených axiómů nedal dokázat pomocí axiómů ostatních. Splňuje-li soustava axiómů i tento požadavek, říkáme o ní, že je to soustava nezávislá.

B. Euklides se ve svých Základech zabývá také rovnoběžkami. Vychází z jedné základní věty (pátého postulátu), ověřené pouze zkušeností. Tato věta v podstatě říká, že daným bodem, ležícím mimo danou přímku, lze k této přímce vést vždy jen jedinou rovnoběžku. Euklides ovšem nevyslovuje tuto základní větu tímto jednoduchým způsobem, nýbrž mnohem složitěji (viz str. 135). Také ve svých Základech z ní z počátku nevyvozuje žádných důsledků, ale napřed se snaží bez této věty obejít. Teprve později, když již učinil potřebné závěry z předchozích čtyř základních vět, přibírá k nim i tento pátý postulát. Tímto záměrným uspořádáním geometrických pouček patrně hleděl Euklides dosáhnout toho, aby si čtenář jeho díla jasně uvědomil, že tento „poznatek", tak vysoce důležitý pro vybudování geometrického systému, se nedá žádnou logickou úvahou odvodit z ostatních předpokladů (základních vět) a pouček, které byly již předtím dokázány.

Složitost slovního vyjádření Euklidova pátého postulátu, stejně jako i jeho poměrně pozdní upotřebení ve výstavbě geometrie

bylo v minulosti chápáno zcela nesprávně. Od nejstarších dob pokládali mnozí matematikové tento pátý postulát za „hanebnou skvrnu na jinak čistém štítě Euklidovy výstavby geometrie", neboť podle jejich mínění Euklides prý nedokázal všechno, co mohlo a mělo být dokázáno. Proto se také snažili tento pátý Euklidův postulát odvodit z ostatních Euklidových vět. Již řecký matematik *Proklos* (V. stol. n. l.) a po něm řada jiných matematiků se pokusila o odstranění tohoto domnělého nedostatku Euklidových Základů, avšak všechny takové pokusy se setkaly s úplným nezdarem. Přezkoumání každého takového „důkazu" ukázalo, že věta, jejíž důkaz měl být podán, se nějakým způsobem — často jen nesnadno postřehnutelným — vloudila do předpokladů. Naprostý nezdar všech pokusů o domnělou nápravu však nijak neodstrašil pozdější matematiky, ba naopak je spíš podněcoval a dráždil k dalšímu vypětí.

Obtížnou otázku rovnoběžnosti rozřešil až geniální ruský matematik *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij* (XIX. století). Dne 6. února 1826 předložil matematicko-fyzikální fakultě university v Kazani, kde působil jako profesor, obsáhlé pojednání, v němž jasně ukázal, že se pátý Euklidův postulát z ostatních Euklidových základních vět odvodit nedá. Tento důkaz provedl tím, že pátý Euklidův postulát nahradil tvrzením: Je-li v rovině dána přímka a bod mimo ni ležící, pak všechny přímky, které tímto bodem procházejí a danou přímku neprotínají, vyplňují jakýsi úhel. Ramena tohoto úhlu nazval Lobačevskij rovnoběžkami k dané přímce.

Na tomto základě pak vybudoval Lobačevskij novou soustavu geometrie, o níž ukázal, že neobsahuje logického sporu. Přitom rozdělil geometrické poučky do dvou skupin. V první skupině byly ty věty, které nezávisí na pátém Euklidově postulátu a platí tedy jak v geometrii euklidovské, tak i v geometrii Lobačevského. Tato skupina pouček tvoří podle Lobačevského tzv. absolutní geometrii. Sem patří např. poučka, že v rovnoramenném trojúhelníku jsou úhly při základně stejně velké nebo že výšky trojúhelníka se protínají v jednom bodě apod. Do druhé skupiny pak Lobačevskij zařadil ty poučky, které jsou na Euklidově pátém postulátu závislé a které proto jsou v obou geometriích různé. Tak např.

v euklidovské geometrii platí, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka se rovná dvěma pravým úhlům, zatím co v geometrii Lobačevského je tento součet vždy menší než dva pravé úhly a jeho velikost se zmenšuje současně s obsahem trojúhelníka.

Prací Lobačevského byla definitivně rozhodnuta otázka závislosti či nezávislosti pátého Euklidova postulátu na ostatních Euklidových axiómech.

Rukopis původního Lobačevského pojednání se ztratil a známe až teprve tištěné pojednání, které Lobačevskij o této věci uveřejnil roku 1829 v „Kazaňském věstníku". Je však pozoruhodné, že roku 1898 byl v archivu kazaňské university nalezen rukopis datovaný Lobačevským rokem 1823, v němž jsou shrnuty geometrické věty, nezávisící na pátém Euklidově postulátu. Do jisté míry lze tedy tento rukopis pokládat za přípravnou studii, která vedla Lobačevského k jeho pozdějším skvělým objevům. Těsně před svou smrtí vydává Lobačevskij svou poslední práci „Pangeometrie", která se široce zabývá problematikou jeho nové geometrie.

Geometrické názory Lobačevského nebyly současníky pochopeny a staly se předmětem posměšných a urážlivých kritik. Byla mu vytýkána nevědomost, drzost i nedostatek zdravého rozumu. Toto nepochopení geniálních myšlenek současníky spolu s vyčerpávající vědeckou a učitelskou prací podlomily úplně zdraví Lobačevského. Téměř slepý Lobačevskij umírá zklamán životem dne 24. února 1856. (Všechna data jsou tu podle Juliánského kalendáře.)

Kromě své práce týkající se základů geometrie a teorie rovnoběžek uveřejnil Lobačevskij i řadu prací z matematické analysy a vyšší algebry. Pozoruhodné svou pokrokovostí jsou jeho názory o výchově mládeže. Od svých žáků vyžadoval přesné a bohaté matematické znalosti, aby se mohli stát dobrými občany a aby svými vynikajícími vědomostmi dělali čest a slávu své vlasti. Přitom pokládal za nezbytně nutné posilovat organismus tělesným cvičením. Teprve pozdější geometrická bádání, jež byla podniknuta až po Lobačevského smrti, ukázala nesmírnou hloubku a geniálnost jeho myšlenek a jejich obrovský význam nejen pro geometrii, ale i pro fyziku a filosofii.

Téměř současně s Lobačevským a nezávisle na něm objevil novou geometrii též maďarský matematik *Jan Bolyai* (XIX. stol.). Řešením otázky nezávislosti pátého Euklidova postulátu na ostatních Euklidových větách se zabýval též slavný německý matematik a fyzik *K. Fr. Gauss* (XIX. stol.), který však své výsledky vůbec neuveřejnil.

Lobačevského objev nové geometrie znamenal úplný převrat v tehdejším tradičním geometrickém nazírání a dal podnět k hlubokému studiu logických základů geometrie, které se plně rozvinulo v druhé polovině XIX. století a pokračuje až do dnešní doby.

3. O MĚŘENÍ DÉLEK

Prvá měření, která lidé prováděli, byla vlastně pouhými odhady a jen přibližným srovnáváním odhadované délky s nějakou délkou, kterou měřící člověk již znal. Lovec srovnával vzdálenost lovené zvěře s dostřelem svého šípu, šířku potoka s délkou svého skoku, vzdálenost dvou říčních břehů s tím, jak daleko doplave.

Zakládání lidských obydlí, rozměřování pozemků, přesnější výroba pracovního nářadí se záhy neobešly bez jednotky pro délkovou míru. Tyto jednotky byly velmi rozmanité. Byly voleny podle rozměrů částí lidského těla nebo podle vhodných předmětů, vyskytujících se častěji v přírodě apod.

Tak např. loket značil délku paže a měl tři pídě. Píď pak byla vzdálenost konce malíčku a palce napjatých prstů dospělého člověka. Sáh byla vzdálenost konců prstů rozpažených paží a měl tři lokte.

K odhadování malých délek bývalo užíváno srovnání s rozměry ovoce nebo zrna.

Ještě dnes v některých krajích střední Asie slouží za jednotku délky denní jízda koně nebo velblouda. V jižní Africe se mluví o „kohoutím křiku" nebo o „bučení krávy" a rozumí se tím vzdálenost, na kterou jsou tyto zvuky ještě slyšitelné.

Rovněž u nás v Čechách byla záhy věnována péče tomu, aby

pozemky, cesty, lesy i dědiny byly řádně proměřeny. Je dochována listina královny Jitky z roku 1291, v níž královna postupuje svému služebníku Rudlinovi panství Lysou nad Labem a nařizuje mu, „aby pozemky provazcem na lány vyměřil". (Lán byla míra pro určování velikosti polí. Všeobecně se jí začalo užívat ve XII. století. Měřilo se však u nás i dříve. Dosvědčují to latinské zápisy, v nichž jsou užívána jména polních měr slovanských jako brázda, záhon, lícha, niva atd.).

Český kronikář Václav Hájek z Libočan vypravuje, kterak Přemysl Otakar II. staraje se o to, aby v království pokoj a spravedlnost vládly, rozkázal, aby „. . . ve všem království všecky míry a váhy změřeny byly a zváženy a jeho (tj. královým) znamením cejchovány a způsob tohoto měření aby byl takový: Nejprve, aby 4 zrna ječmenná vedle sebe položena byla a ta jich širokost aby slula prst; 4 prstové vedle sebe položení — ta širokost aby jmenována byla dlaň; 10 prstuov vedle sebe položených aby slula píď a 3 pídi aby jmenován byl loket pražský aneb český. Provazec zemský i lesní každý aby zdélí byl na 42 loket a k tomu provazci, když se měří, aby se přidalo „naděl Buoh" a to jest vzdýlí na 2 pěsti aneb aby byl na dvě pěsti delší provazec. A k tomu aby byli zvláštní auředníci, kteří by měřili a aby měli přísahu na to obzvlášť vydanou. Také měřič lesní i zemský, každý z nich aby měl provazec řetízkový, aby jeho rosů ani vlhkostí nemohlo ubýti ani suchem přibýti a ten řetízek aby byl z mědi nebo z mosazi, aby nerezavěl deštěm ani rosou".

Vidíme tedy, i když máme výhrady k této Hájkově zprávě, že již v roce vydání uvedeného nařízení (1268) se podle tehdejších poměrů co nejlépe pečovalo o to, aby byly všeobecně zavedeny správné délkové míry.

Od té doby se opakovalo ještě několikrát určování českých délkových měr (a ovšem i měr ostatních). Aby si mohl každý svou vlastní míru srovnat s úředním loktem pražským, bylo zazděno po jednom vzorném lokti na několika veřejně přístupných místech v Praze. Píše o tom např. zemský měřič *Simeon Podolský z Podolí* ve spise, zvaném „Knížky o měrách zemských", vytištěném v Praze r. 1683.

Takové vezděné základní míry byly ovšem i v jiných městech.

Podobná nařízení o měrách byla vydávána i v ostatních zemích. Obecné jednoty však nebylo, neboť každá země si stanovila jiné délkové míry, a často i jednotlivá města v zemích užívala svých vlastních měr. To vedlo k nedorozuměním a často k podvodům. Když se později začal rozrůstat obchod a vědecké poznání přírodních jevů pronikalo působením knihtisku stále šířeji mezi pracující lid, kladla stále objemnější průmyslová výroba spotřebních statků větší a větší požadavky na přesnost měření. Došlo se konečně k názoru, že měření délek musí být založeno na takové určité pevné délkové jednotce, která bude uznána pokud možno všemi státy za úřední jednotku délky a že i její dělení na menší jednotky, stejně jako jednotky větší, budou v těchto státech společné. Tento revoluční názor se stal skutkem za Velké francouzské revoluce dne 10. prosince 1799, kde byl ve Francii zaveden mezinárodní délkový metr jako nová zákonná délková míra.

Zavedení jednotného metru předcházelo mnoho vědeckých diskusí a geodetických proměřování, až posléze byl za jednotku délky prohlášen desetimiliónty díl čtvrtiny zemského poledníku. Bylo zhotoveno metrové měřítko, které se nazývá „archivní metr" a podle něho vyrobena i další metrová měřítka.

Pozdějšími výzkumy se však ukázalo, že tento archivní metr je o něco málo kratší než desetimiliónta část zemského kvadrantu. Dnes je za jednotku míry, zvanou metr, zvolena podle mezinárodní úmluvy vzdálenost určitých dvou rysek, vrytých do prototypu metru (základního metru). Tento prototyp je uschován za stálé teploty, vlhkosti a tlaku vzduchu v „Mezinárodním ústavu měr a vah" v Sèvres u Paříže (Bureau International des Poids et Mesures).

Rakousko-Uhersko zavedlo metrickou míru v Čechách a na Moravě v roce 1871. V r. 1918 po vzniku Československé republiky bylo potřebí upravit vztah nového státu k tzv. metrické úmluvě (Convention du Mètre), tj. dohodě, kterou byl r. 1875 zřízen zmíněný Mezinárodní ústav měr a vah. K této úmluvě přistoupilo Československo r. 1922. V r. 1928 zakoupila Československá republika platino-iridiové metrové měřítko vyrobené v Paříži

r. 1874 a označené číslem 7. Stálo 250 000 Kčs. Později bylo předáno Ústřednímu cejchovnímu a puncovnímu inspektorátu v Praze do úschovy a opatrování. Odtud se odvozují všechna délková měřítka, kterých se u nás užívá. Přesná délka tohoto našeho základního měřítka je 1 metr a jedna desetitisícina milimetru při teplotě 0 °C.

4. O MĚŘENÍ ÚHLŮ

Prvým počitadlem, které člověk užíval, byly (jak už z II. kapitoly víme) prsty na rukou a nohou, prvé jednotky pro délkové míry byly odvozeny z rozměrů částí lidského těla (píď, stopa, loket, sáh atd.). Člověk záhy postřehl při různých pohybech určité obdoby, jak ve vzájemném postavení holeně a stehenní části nohy a v postavení předloktí a ramenní části ruky, tak i ve vzájemné poloze kráčejících nohou apod. Vznikal tak pojem úhlu. Starověcí národové pojmenovali polopřímky, omezující úhly, jmény, podporujícími domněnku, že i pojem úhlu byl odvozen z různých poloh lidských údů. Římané např. říkali polopřímkám ohraničujícím úhel „crus" (holeň). My je nazýváme rameny, Němci Schenkel (stehna) atd. (V jednom návrhu českého geometrického názvosloví z počátku minulého století byl pro ramena úhlu zvolen název „hnáty"; ten se ale neujal. V prvé větší české učebnici geometrie — zejména praktické — z roku 1734 „Gruntovní počátek Mathematického umění, Geometria praktika . . .", kterou napsal přísežný zemský mlynář a geometr *Václav Veselý*, se jedna strana trojúhelníka nazývá „basis", druhé dvě pak mají název „hnáty" = „Rowně gako člověk, když nápodobně stogí s swýma nohama a s linyj, která od gedné nohy k druhé gde, geden triangl dělá; odtud taky to podobenstwj pocházy." Také tento název ovšem zmizel, podobně jako pojmenování „kaut" pro úhel a odtud odvozené „tříkautník" pro trojúhelník.)

Astronomické práce starých Babylóňanů daly podnět k vynálezu úhlové míry, odvozené z rozdělení plného úhlu na 360 stupňů, tj. jednotek úhlové míry. Byly vysloveny různé domněnky, proč

bylo pro dělení plného úhlu zvoleno právě číslo 360, avšak k jistotě se dosud nedospělo.

Z Babylónie se kolem r. 200 n. l. dostalo dělení úhlu na 360° do Alexandrie v Egyptě. S touto úhlovou jednotkou se poprvé setkáváme ve spise „Almagest", který napsal řecký učenec *Ch. Ptolemaios*, žijící v Alexandrii v II. století n. l.

Euklides „definuje" úhel v 8. definici na počátku prvé knihy svých Elementů. Říká: „Rovinný úhel je vzájemná odchylka dvou čar, které jsou v jedné rovině, protínají se a neleží v jedné přímce."

V deváté až dvanácté Euklidově definici jsou pak definovány úhly přímý, pravý, tupý a ostrý. Je ovšem zřejmé, že osmá definice — tj. definice úhlu — není definicí v pravém slova smyslu. Euklides definuje úhel na základě odchylek dvou čar, aniž by však dříve řekl, co se pod pojmem odchylky rozumí. Zdá se, že již *Apollóniovi* (III. stol. př. n. l.) nebyla tato definice po chuti, protože mluví o úhlu jako o „zúžení roviny v průsečíku dvou přímek." Toto dvojí pojetí úhlu se pak objevuje v různých obdobách v učebnicích geometrie až do dnešních dnů. Apollóniovu způsobu výkladu odpovídá dnešní definice dutého úhlu jako průniku polorovin. Naproti tomu definice úhlu jakožto orientované míry vzniklé otáčením polopřímky vzhledem k nulovému rameni navazuje na definici Euklidovu.

Označení „stupeň" povstalo z latinského „gradus", jež opět vzniklo při překládání arabských spisů do latiny a souvisí s pojmem „schody" nebo „žebřík". Slovo „minuta" pro šedesátý díl stupně bylo vytvořeno podle latinského názvu „pars minutae primae", což v překladu znamená „části prvého oddělení". Podobně slovo „secunda" (vteřina) pochází z „pars minutae secundae" („části druhého dělení").

Slavný římský stavitel *Vitruvius*, který žil za císaře Augusta kolem počátku našeho letopočtu, určoval směr severo-jižní půlením úhlu pomocí zvláštního přístroje, zvaného gnómon. Na vodorovnou desku připevnil svislou tyč. Na desce pak opsal kružnici se středem v patě svislé tyče a s poloměrem menším než délka nejdelšího stínu tyče (která ovšem byla podle měnící se výšky slunce proměnlivá). Jednou dopoledne a jednou odpoledne byl stín právě tak dlouhý,

že tvořil poloměr narýsované kružnice. Tyto dva poloměry tvořily úhel, jehož osa měla směr severojižní.

Měření úhlů má dnes velký význam nejen v astronomii, ale i v zeměměřictví, protože moderními měřickými stroji dovedeme měřit úhly daleko přesněji než délky. Do volby jednotky pro úhlové měření rovněž zasáhla Velká francouzská revoluce, která vyhlásila zákon, že se bude pravý úhel dělit na sto dílků, zvaných grady, každý „grad" má 10 „decigradů", 100 „centigradů" a 1000 „miligradů". Desetinného dělení úhlů se používá ve Francii i v jiných zemích v zeměměřictví a ve vojenství. Práce s přístroji, které jsou opatřeny touto stupnicí pro měření úhlů, je rychlejší než práce se stupnicí, která rozděluje plný úhel na 360°. Rovněž u nás se v mnohých případech užívá „setinného dělení kvadrantu" (např. při katastrálním vyměřování města Prahy).

5. Z HISTORIE MNOHOÚHELNÍKŮ

Mezi 23 definicemi v čele první knihy Euklidových Základů se na patnáctém místě mluví o kruhu, kružnici a až v definici 19. se definují útvary „přímkové", omezené úsečkami. Uvádí se zvlášť trojúhelník, čtyřúhelník a mnohoúhelník. V definici 20. se dělí trojúhelníky na rovnostranné, rovnoramenné a různostranné. V definici 21. jsou už trojúhelníky rozděleny podle úhlů tak, jak je dělíme i dnes. V další definici je provedena klasifikace čtyřúhelníků, která je poněkud odlišná proti dnešní.

Mnohoúhelníky byly ovšem známy již dávno před Euklidem. V textech různých slovních úloh (jak jsme viděli na str. 105), se mluví o obrazcích, které dnes nazýváme lichoběžníky. Našli bychom tu úvahy i o jiných obrazcích.

V Ahmesově papyru se počítá obsah trojúhelníka, čtyřúhelníka i lichoběžníka.

T r o j ú h e l n í k se stal důležitým geometrickým pojmem zásluhou Euklidovou, jenž v prvé knize svých Elementů shromáždil věty známé již Pythagorovi a jeho škole i jiným Euklidovým předchůdcům. Též *Aristoteles* užívá příležitostně některých vět o trojúhelníku, jako třeba o větším úhlu proti větší straně nebo věty, že součet dvou stran trojúhelníka je větší než strana třetí; velmi často se pak tento filosof zmiňuje o součtu úhlů v trojúhelníku.

Věta o součtu úhlů v trojúhelníku zaměstnávala geometry již od pradávna. Někteří historikové matematiky tvrdí, že tato věta bývala dokazována postupně nejprve pro trojúhelník rovnostranný, pak rovnoramenný a konečně trojúhelník obecný. Tak prý uváděl důkaz *Thales Miletský* (kolem r. 624 př. n. l.) a snad i staří Egypťané. Na začátku svých Elementů odvozuje Euklides věty, které jsou nezávislé na axiómu o rovnoběžkách. Dokazuje, že vnější úhel trojúhelníka je větší než vnitřní úhel, ležící při jiném vrcholu a z toho vyvozuje, že součet dvou úhlů v trojúhelníku je vždy menší než dva pravé. Později — po zavedení axiómu o rovnoběžkách — dokazuje větu, že vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu dvou protilehlých úhlů vnitřních, z čehož mu pak snadno vyplyne známá věta o součtu úhlů trojúhelníka.

Už ve škole *Pythagorově* byla tato věta dokazována pomocí rovnoběžky vedené vrcholem trojúhelníka s protilehlou stranou, aniž by se použilo vlastnosti vnějšího úhlu.

Věta o součtu dvou stran v trojúhelníku bývá dokazována různými způsoby; v některých učebnicích je uváděna jako důsledek poučky, že úsečka je nejkratší spojnicí dvou bodů. Euklides dokazuje tuto větu jako 20. větu prvé knihy Základů. Dvacátá prvá věta obsahuje známé tvrzení, které bývá často předmětem zkoumání žáků v 7. třídě: Bod M je vnitřním bodem trojúhelníka ABC. Pak platí: $MA + MB < CA + CB$ a úhel AMB je větší než úhel ACB.

Euklides znal tři věty o shodnosti trojúhelníků (*usu*, *sus*, *sss*). Při pojmu shodnosti se opíral o zásadu: „A co se navzájem kryje, rovno jest." Čtvrtá věta o shodnosti trojúhelníků, shodujících se ve dvou stranách a úhlu ležícím proti větší z nich, pochází z XVIII. století n. l.

Znalost určenosti trojúhelníka podle věty *usu* přisuzují někteří řečtí matematikové již *Thaletovi z Miletu*, který ji patrně poznal v Egyptě. Thales určoval vzdálenost lodi od břehu pomocí hloubkového úhlu, pod nímž bylo vidět loď z věže známé výšky. Na

obrázku 15 z jedné italské učebnice z roku 1569 je stanovena šířka řeky pomocí věty *usu*.

Vět o shodnosti trojúhelníků užívali někteří starověcí geometři při řešení praktických geometrických úloh v terénu. Zvlášť slavným geometrem-praktikem byl *Herón z Alexandrie*. Na rozdíl od Euklida, který se zabýval pouze teoretickou geometrií, shromáždil

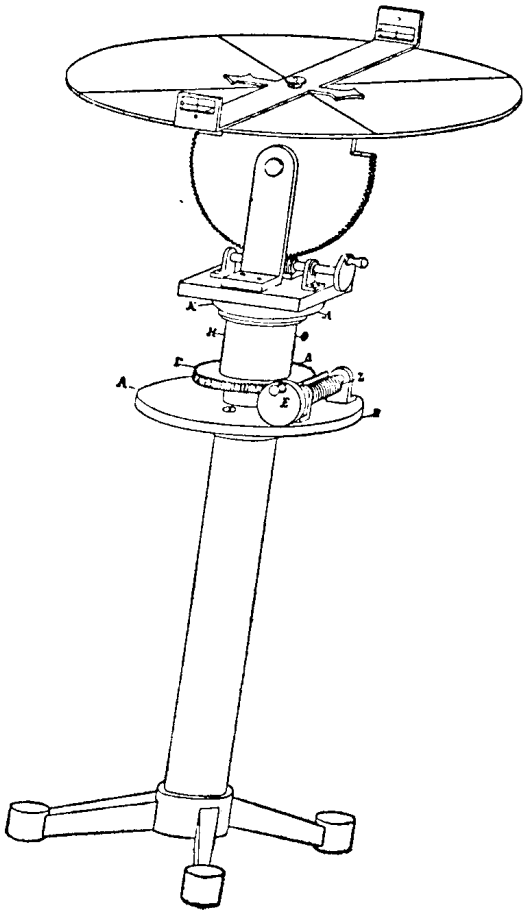
Obr. 15. Měření šířky řeky (ze staré italské učebnice)

Herón ve svých spisech tehdejší praktické znalosti z aplikace geometrie, mechaniky a fyziky. Jeho nejznámější spisy jsou „Geometrika", „Metrika", a „Dioptra". Formou úloh řeší Herón různé problémy z praktického zeměměřictví apod. Popisuje také řadu zeměměřických, fyzikálních, válečných a jiných přístrojů. Z obr. 16 si čtenář lehko vyloží funkci přístroje Herónem vynalezeného, zvaného dioptr.

Praktické zaměření geometrie nacházíme také u Římanů, kteří převzali z řecké matematické vzdělanosti většinou jen ty poznatky, kterých mohli používat v architektuře, při vyměřování

pozemků, zakládání chrámů, hřbitovů a ve válečnictví. Již název jejich geometrů o tom svědčí; říkalo se jim agrimensoři, což v doslovném překladu znamená měřiči polí.

Římský měřič *Nipsus* určoval šířku řeky (viz obr. 17) tím, že z bodu *A* na břehu řeky spustil (vizírováním) kolmici na protější břeh do bodu *B*. Podél břehu sestrojil úsečku *AC*, půlenou bodem *E*. V bodě *C* vztyčil kolmici *CF* na směr *CA*. Pak bodem *E* vedl přímku *BE*, jež proťala kolmici *CF* v bodě *F*.

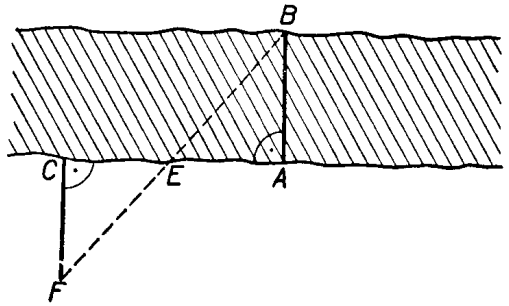


Obr. 16. Heronův měřicí přístroj „dioptr"

Znalost trojúhelníka rovnoramenného byla ovšem rozšířena již dávno před Euklidem. Větu o rovnosti úhlů při základně prý objevil Thales, ačkoli je tato věta jistě původu mnohem staršího. Thales snad jen jako první podal její přesný důkaz.

Starověké vědomosti o trojúhelníku shrnul ve svých spisech *Pappos* z *Alexandrie* (III. století n. l.). Mnohé z těchto spisů se ztratily, některé se dochovaly pouze v arménském překladě. Pappos však starořecké vědomosti doplňuje též svými poznatky.

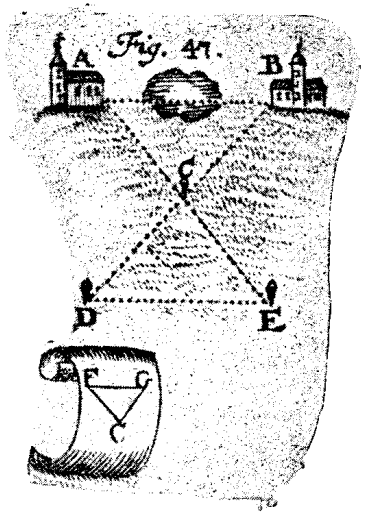
Různé učebnice praktické geometrie ve středověku a ještě více po vynalezení knihtisku v raném novověku uvádějí návody k řešení úloh o stanovení vzdáleností mezi dvěma body. Předpokládalo se, že mezi body jsou překážky, že z jednoho bodu nelze vizírovat bod druhý apod. Při řešení těchto úloh bylo zhusta užíváno vět o shodnosti trojúhelníků.



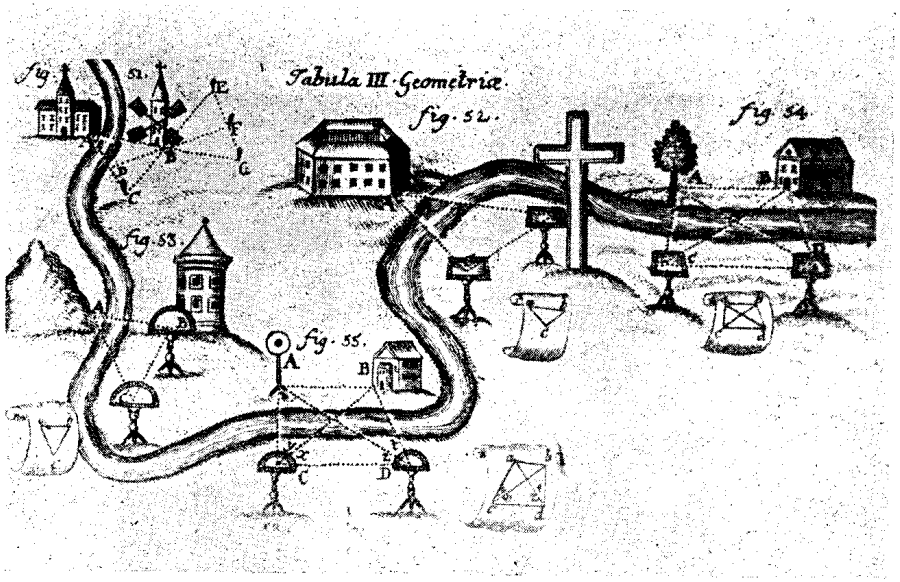
Obr. 17. Měření šířky řeky podle římského agrimensora Nipsa

Úloha, která je znázorněna na obr. 18, je z jedné takové staré učebnice geometrie. Zjišťuje se vzdálenost dvou budov, mezi nimiž je překážka. Úloha je řešena pomocí věty *sus*. Postup si vyloží čtenář z obrázku. Stejně snadno lze podat i výklad úloh z obr. 19 z téže učebnice.

Nejznámější praktickou geometrií v XVII. století byl spis „Geometria practica nuova", jehož první vydání vyšlo r. 1617. Napsal jej německý geometr *M. Daniel Schwenter*. O jeho oblibě svědčí několikrát opakované vydání. Rovněž tato kniha obsahuje množství praktických návodů k řešení jednoduchých geometric-

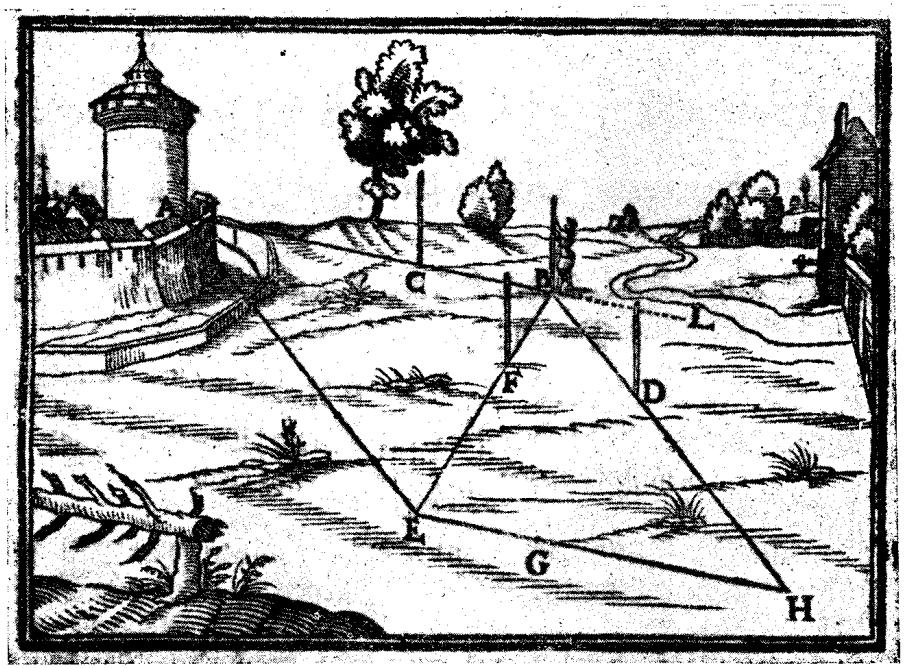


Obr. 18. Vzdálenost dvou bodů v terénu (ze staré učebnice)



Obr. 19. Úlohy na měření s překážkami (ze staré učebnice)

kých úloh, zejména také úloh topografických. IX. úloha první knihy druhého traktátu (vydání z r. 1617) je provázena obrázkem č. 20. Měřič má za úkol změřit vzdálenost *AB*, přičemž bod *A* je nepřístupný. Schwenter doporučuje zvolit pomocný bod *E* tak, aby body *A*, *E*, *B* tvořily trojúhelník. Další vhodně zvolené body *C* a *F* na úsečkách *AB* a *EB* se označí tyčkami (dnes řekneme výtyčkami).

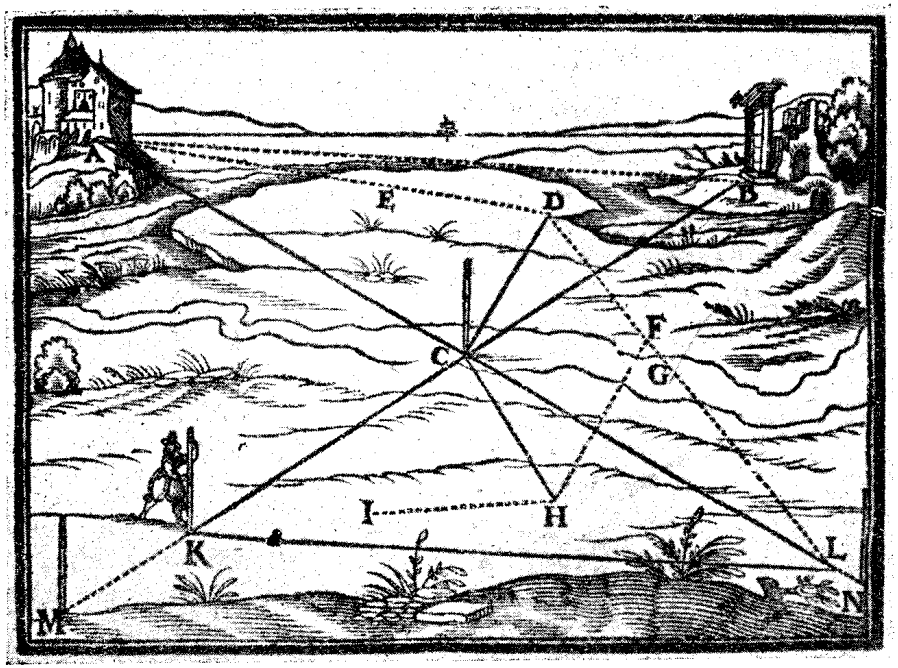


Obr. 20. Úloha ze Schwenterovy učebnice

Pak se sestrojí body *D* a *G* tak, aby úhly *CBF* a *FBD* byly shodné; totéž platí pro úhly *AEF* a *BEG*. Měřič postupuje nyní s další výtyčkou až najde bod *H*, který leží v průsečíku přímek *EG* a *BD*. S odvoláním na 26. větu první knihy Euklidových Základů zjišťuje Schwenter, že $AB = BH$. Zmíněná věta je věta *usu*. V připomínkách k této konstrukci Schwenter říká, že úlohu je možno řešit i pomocí rovnoběžníků. Konstrukci lze snadno vyložit na základě

téhož obrázku, uvážíme-li, že měřič po zvolení trojúhelníka *ABE* sestrojil úhel *FEG* shodný s úhlem *CBF*.

XII. úloha Schwenterovy knihy řeší obtížnější problém (viz obr. 21). Měřič má za úkol zjistit vzdálenost bodů *A* a *B*. Oba body jsou však nepřístupné, oddělené od geometra vodním příkopem. Měřič si zvolí vhodný bod *C* a výtyčky umístí v bodech *M* a *N*,



Obr. 21. Úloha ze Schwenterovy učebnice

které leží na polopřímkách, opačných k polopřímkám *CA*, resp. *CB*. Dále zvolí vhodný bod *D* tak, že úhel *DCA* je pravý a tedy shodný s úhlem *DCN*. Pak sestrojí úhel *CDF* shodný s úhlem *CDE* (bod *E* je libovolný bod na úsečce *DA*). V průsečíku přímek *DF* a *AC* stanoví vizírováním bod *L*. Podobným postupem pomocí úsečky *CH* kolmé na přímku *CB* se sestrojí i bod *K*. Úsečka *KL* je shodná s úsečkou *AB* a je v prostoru, kde ji lze změřit pásmem či jiným vhodným způsobem. Správnost svého soudu o shodnosti úseček *AB*

a *KL* podpírá Schwenter odkazem na 4. větu prvé knihy Euklidovy, která vyslovuje poučku *sus* o shodnosti trojúhelníků.

Středověk a raný novověk nepřispěl zřejmě takřka ničím podstatným k nauce o trojúhelníku. Nové poznatky o geometrii trojúhelníka byly výsledkem práce teprve novodobých matematiků.

Tak v nové době byla jednoduchým způsobem dokázána věta o průsečíku výšek v trojúhelníku. Větu znal již ve III. století př. n. l. *Archimédes*; rovněž *Pappos* ji pokládá za známou, avšak ještě v XVIII. století byl její důkaz prováděn velmi těžkopádně. Teprve *Karl Friedrich Gauss* (XVIII. až XIX. století) ji dokázal způsobem, kterého se dnes všeobecně užívá (tj. pomocí trojúhelníka, který je tvořen rovnoběžkami, vedenými vrcholy daného trojúhelníka s jeho protilehlými stranami).

Roku 1723 byla matematické veřejnosti předložena úloha, žádající sestrojení trojúhelníka, je-li známo těžiště *T*, střed kružnice vepsané *S* a průsečík výšek *V*. Složité úvahy a rozsáhlé výpočty tehdejších matematiků nevedly k cíli, až r. 1765 rozřešil tuto úlohu *Leonard Euler*. Zjistil, že střed *S* kružnice trojúhelníku opsané a body *T*, *V* leží na jedné přímce a $TS = TV$. Tato přímka byla nazvána přímkou Eulerovou. (Od Eulera pochází též nynější označení stran, vrcholů a úhlů v trojúhelníku.)

Francouzští matematici *Jean Victor Poncelet* a *Charles Julien Brianchon* zjistili roku 1820, že středy stran trojúhelníka *ABC*, paty výšek a středy úseček *VA*, *VB*, *VC* (*V* je průsečík výšek) leží na kružnici. Roku 1822 objevil znovu tuto kružnici *K. W. Feuerbach* (žil v první polovině XIX. století) a zjistil dále, že její střed půlí úsečku *MV* přímky Eulerovy, její poloměr je polovinou poloměru kružnice trojúhelníku opsané a že se tato kružnice dotýká všech kružnic dotýkajících se přímek *AB*, *BC*, *CA*. Proto se jí říká kružnice devíti bodů nebo též kružnice Feuerbachova. Avšak již Euler věděl, že tato kružnice prochází středy stran i patami výšek trojúhelníka. Bývá proto jindy správněji nazývána kružnicí Eulerovou.

Bádání v geometrii trojúhelníka vedlo v moderní době k dalším významným důsledkům.

V XIX. století byla provedena důkladná revize základů geometrie, především jako důsledek geniálního objevu *Nikolaje Ivanoviče Lobačevského*. Jeden z nejvýznamnějších činů, souvisících s teorií trojúhelníka, který byl v tomto směru podniknut, učinil německý matematik *Moritz Pasch* v knize Vorlesungen über neuere Geometrie" (Přednášky o novější geometrii), známým axiómem Paschovým (str. 138).

Leč nejen v teoretické geometrii je trojúhelník důležitým útvarem. Rovněž i v mechanice, statice, grafickém znázornění, zeměměřictví a ve všech technických vědách je trojúhelník jedním z nejdůležitějších obrazců a znalost geometrie tohoto útvaru je pro každého technika nepostradatelná.

O vlastnostech stran a úhlů rovnoběžníka uvádí Euklides dvě věty, které dnes můžeme vyslovit asi takto: 1. Jestliže jsou dvě úsečky stejně dlouhé a rovnoběžné, pak též obě úsečky, spojující jejich koncové body po každé straně, jsou rovněž stejně dlouhé a rovnoběžné. 2. Rovnoběžníky mají stejně dlouhé protější strany a stejně velké protější úhly; úhlopříčkou je rovnoběžník půlen. Věty o vzájemném půlení úhlopříček v rovnoběžníku se vyskytují teprve u Archiméda.

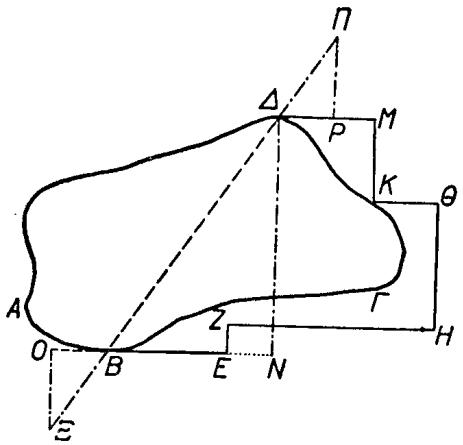
V pozdější době se další věty o vlastnostech čtyřúhelníků objevují poskrovnu. Tak např. až v XVI. století dokazuje německý matematik *Chr. Clavius* větu, že čtyřúhelník je rovnoběžníkem, jsou-li jeho protilehlé strany nebo protilehlé úhly shodné. V XVIII. století zkoumá italský matematik *A. Borelli*, které věty o rovnoběžníku lze obrátit a upozorňuje zvláště na tu okolnost, že čtyřúhelník, jehož dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné a druhé dvě jsou stejně dlouhé, nemusí být ještě rovnoběžníkem. (Příklad na to si doplní čtenář sám.)

Věty o lichoběžníku a jeho střední příčce znali v podstatě již staří Babylóňané a Egypťané. Tak v papyru Ahmesově se mluví o lichoběžníku rovnoramenném.

Euklides neuvádí větu o součtu úhlů ve čtyřúhelníku, je však možno soudit, že byla známa již před vydáním Elementů, např. *Aristotelovi* (IV. století př. n. l.). Při jejím důkazu se obvykle vychází z věty o součtu úhlů v trojúhelníku. Tím pozoruhodnější je tvrzení jedné byzantské učebnice z X. století našeho letopočtu, v němž se praví: „Že ale v každém myšleném nebo daném troj-

úhelníku je součet úhlů roven dvěma pravým, vyplývá odtud, že v každém čtyřúhelníku je součet úhlů roven čtyřem pravým a že úhlopříčka rozděluje čtyřúhelník na dva trojúhelníky, které mají celkem šest úhlů."

Později byly stále častěji objevovány další věty o čtyřúhelnících. Tak např. francouzský matematik *Pierre Varignon* (XVII. až XVIII. století n. l.) objevil větu, že spojnice všech středů sousedních stran čtyřúhelníka tvoří rovnoběžník. Soustavné propracování nauky o čtyřúhelníku bylo provedeno až v XIX. století. Ve všech učebnicích praktické geometrie se shledáváme s hojným užitím čtyřúhelníků v nejrůznější formě.



Obr. 22. Úloha z Herónovy „Dioptry"

V XV. úloze knihy „Dioptra" řeší *Herón* historicky známou úlohu: V hoře má být vybudován přímý horizontální tunel spojující dva předem zvolené body na jejím úpatí (obr. 22).

Úpatí hory tvoří linie $AB\Gamma\Delta$ a body, kde je tunel vyústěn, jsou B a Δ. Bodem B se sestrojí vodorovná úsečka BE, pomocí dioptru se vytyčí pravý úhel BEZ a podobným způsobem se sestrojí další strany lomené čáry $BEZH\Theta KM\Delta$. V bodu M je postaven dioptr tak, že jedno rameno jeho pravého úhlu směřuje k bodu K, kdežto druhé rameno má směr úsečky $M\Delta$. V dalším textu podrobného návodu k provedení této úlohy doporučuje Herón, aby si

měřič představil, že úsečka BE je prodloužena do bodu N tak, že úsečka ΔN je kolmá na EN, takže dovede ze stran lomené čáry vypočítat délky BN a ΔN a tedy také jejich poměr. Nechť je např. $BN = 5 \,.\, \Delta N$ (podle Heróna). Představme si, že ΔB se prodlouží do bodu Ξ a sestrojí se kolmice $\Xi O \perp OB$. Podobně vznikne trojúhelník $\Delta P\Pi$. Ze vztahu $BO = 5 \,.\, 0\,\Xi$ a ze vztahu $\Delta P = 5 \,.\, P\Pi$ lze snadno oba trojúhelníky sestrojit, a tím určit směr, ve kterém se začne s hloubením tunelu v bodě B a Δ tak, aby se dělníci uvnitř hory setkali. Označení Herónových nákresů bylo provedeno velkými řeckými písmeny. V našem obrázku bylo užito těchto písmen: A alfa, B beta, Γ gamma, Δ delta, E epsílon, Z zéta, H éta, Θ théta, K kappa, M mí, N ný, Ξ ksí, O omikrón, Π pí, P ró.

Hérodot vypráví, že již kolém roku 530 př. n. l. byl vybudován na ostrově Samu tunel procházející vápencovou horou Kastro. Tunel sloužil k zásobování města vodou, nebyl tedy vodorovný. Byl — podle výzkumu německých archeologů v r. 1882 — jeden kilometr dlouhý, 2 metry vysoký a stejně široký. Voda procházela rourami, které byly na dně tunelu ve vhodném výkopu. Tunel měl vertikální šachty k větrání a odstraňování sutin a výklenky pro kahance dělníků. Podle výzkumu německých vědců byl tunel hlouben z obou stran současně. Dělníci pracovali s pozoruhodnou přesností, protože odchylka obou částí tunelu byla při setkání v nitru hory ve směru horizontálním menší než 10 m a ve směru vertikálním činila jen asi 3 m. Jakými prostředky bylo tohoto výsledku dosaženo? Patrně nějakým podobným postupem, jaký jsme vylíčili v úloze Herónově.

Stavby řeckých vodovodů se však neomezily na tak krátké vzdálenosti, jako tomu bylo na ostrově Samu. Ve velkoměstech jako byla Alexandrie se 750 000 obyvatelů nebo Athény, kde bylo soustředěno na čtvrt miliónu obyvatelů, nebylo zásobování vodou ve starověku právě jednoduchým problémem. Význam dobré pitné vody zdůrazňoval již Aristoteles. Athéňané byli od dob Peisistratových zásobováni vodou vedenou do města štolami. Slavný lékař *Galenus* zřídil vodovod v Methymně. Voda byla vedena kamennými rourami. Zbytky tohoto vodovodu byly objeveny ve zříceninách města.

Jak geometrické konstrukce a výpočty přispívaly ke zhospodárnění stavby vodních zařízení, ilustruje zřetelně srovnání se stavbou akvaduktu, který dal vyhloubit král Ezechias z Judy ve skalách u Jeruzaléma v VII. století př. n. l. a kde se nepoužilo geometrie. Dělníci hloubili velmi primitivním způsobem vertikální šachty, aby zjistili, zda směr akvaduktu je správný. Přesto výsledná trať vodního vedení měla tvar lomené čáry a byla přibližně dvojnásobné délky, než byla přímá vzdálenost obou ústí vodovodu.

V geometrii se používá vlastností rovnoběžníku k řešení různých úloh, především konstruktivních.

Poznatky o mnohoúhelnících s větším počtem stran, zejména pak poznatky o obecných *n*-úhelnících, vyskytují se ve starších geometriích ojediněle. *Euklides* o nich mluví velmi zřídka a po jeho vzoru i velká většina geometrů pozdějších dob neuznává za vhodné, aby o nich pojednávala. Větu o součtu úhlů v *n*-úhelníku dokazuje *Proklos* (V. století n. l.) tak, že zvětšuje počet stran *n*-úhelníka vždy o jednu. Větu o součtu vnějších úhlů zná již *Aristoteles*. Proklos ji dokazuje pro trojúhelník, čtyřúhelník a pětiúhelník, vyslovuje ji však jen všeobecně.

Rozšíření pojmu čtyřúhelníku na úplný čtyřroh a čtyřstran ve smyslu projektivní geometrie pochází od německého matematika *Steinera* (XIX. století).

6. O KRUŽNICI

Kružnice náleží k nejstarším geometrickým útvarům, které lidstvo znalo. Patrně již od pradávných dob sestrojovali lidé kružnici nebo její části pomocí provazu opatřeného dvěma zaostřenými kolíky.

O původu kružítka vypravuje *Ovidius* ve svých „Metamorfosách" tuto pověst:

„Hoch ten páteře také si povšiml uprostřed těla rybího, vzal z těch kostí si vzor a podle nich vyřezal do tvrdé oceli zubů řad; tak vynašel pilu. První též v jediný kloub dvě železná ramena spojil tak, aby stejnou si vždycky vzdálenost uchovávala, přičemž by jedno tkvělo a druhé kroužilo kolem" (překlad F. Stiebitze).

Oním hochem vynálezcem byl Talus, synovec Dedalův. Dedalus, který byl zároveň Talovým učitelem, záviděl svému geniálnímu svěřenci jeho úspěchy ve vynalézání, a proto Tala zabil. Byl za to odsouzen do vyhnanství, odkud podle pověsti se pokusil se synem Ikarem o útěk pomocí křídel zhotovených z peří a vosku. Ikaros prý vzlétl příliš vysoko k slunci, jehož žár roztavil vosk a Ikaros se zřítil.

Lidská práce, potřeby denního života i přirozená lidská snaha o jeho zlepšení vytvářely představy základních geometrických útvarů a spolupůsobily také při vzniku geometrických nástrojů.

První definici kružnice podává *Platón* (V. až IV. století př. n. l.) takto: „Kruhové je to, čehož nejvzdálenější části jsou od středu stejně vzdáleny." Podobnou definici uvádí i *Euklides* ve svých Elementech: „Kružnice je rovinný, jednou čárou tvořený obrazec, k němuž od jednoho bodu uvnitř útvaru vedené úsečky jsou sobě rovny."

Definici, která ukazuje, jak lze kružnici vytvořit pohybem bodu, uvádí *Herón*: „Kruh vzniká, když úsečka, která zůstává stále v téže rovině, se otáčí tak, že jeden její koncový bod je pevný a druhý se pohybuje, až se vrátí do své původní polohy."

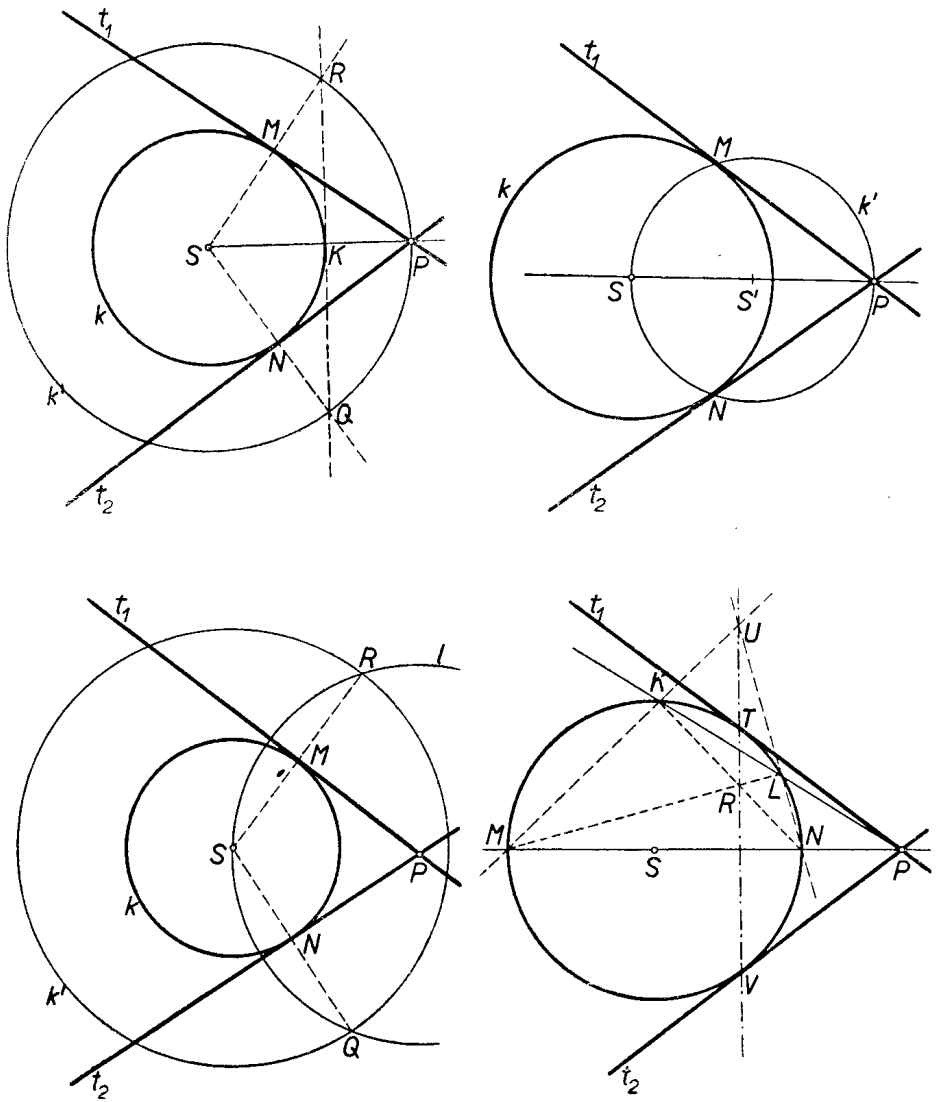
Ve svých Elementech uvádí Euklides v podstatě též všechny věty o oblouku kružnice, příslušné tětivě a středovém úhlu, o spojnici středu kružnice se středem tětivy a větu, že kolmice vztyčená v koncovém bodu průměru je tečnou kružnice. Obr. 23 ukazuje konstrukci tečen z bodu P ke kružnici tak, jak ji nacházíme v Euklidových Základech.

Konstrukci tečen z bodu P (obr. 24), při níž se užívá geometrického místa vrcholů pravých úhlů nad úsečkou PS, nacházíme nejprve v roce 1536. Tento způsob konstrukce tečen zatlačoval postupně starou konstrukci Euklidovu.

Roku 1829 se objevuje další konstrukce (obr. 25) pomocí kružnice soustředné s kružnicí danou a mající dvojnásobný poloměr.

Zajímavá konstrukce byla uveřejněna v r. 1640. Přímka PS na obr. 26 protíná kružnici v bodech M, N, druhá přímka bodem P nechť protíná kružnici v dalších dvou bodech K, L. Spojnice průsečíků přímek MK, NL, ML a KN protíná kružnici v bodech do-

tyčných. (Poznamenejme, že konstrukce zůstane v platnosti i tehdy, když přímka PM neprochází středem kružnice. Konstrukci lze uskutečnit pomocí hrany pravítka, bez použití kružítka. Je to jedna z konstrukcí, které řadíme nyní do úloh projektivní geometrie.)



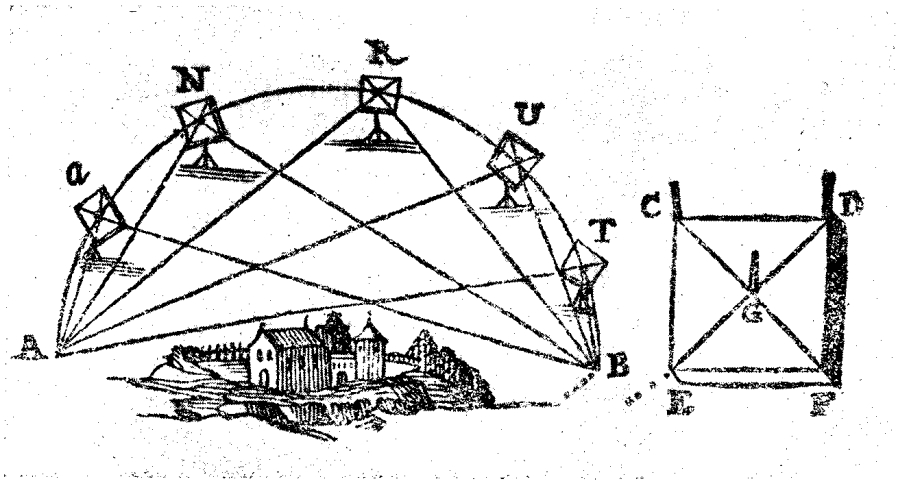
Obr. 23—26. Tečny z bodu ke kružnici

Objev, že průměr půlí kružnici, připisuje *Proklos Thaletovi*. Jeho praktické užití bylo však známo mnohem dříve, jak dokazují různé ozdoby na staroegyptských stavbách.

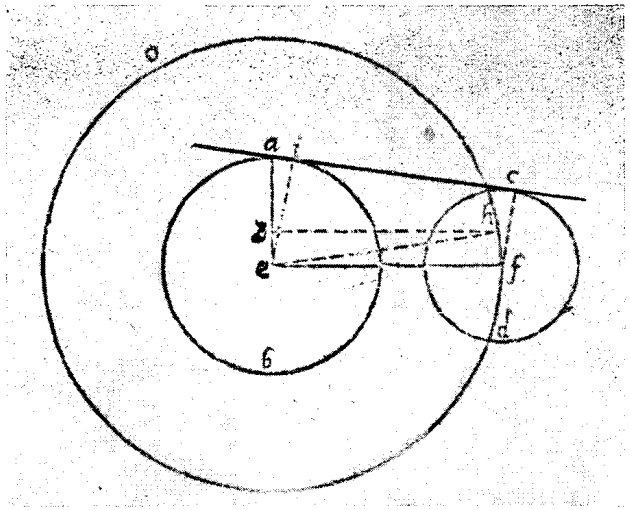
„Ztracený" (nevyznačený) střed dané kružnice hledá Euklides tak, že sestrojí tětivu AB, rozpůlí ji a středem sestrojí kolmici, která protíná danou kružnici v bodech M a N. Střed úsečky MN je hledaným středem kružnice. Naši nynější konstrukci nemáme ve starověkých spisech doloženu.

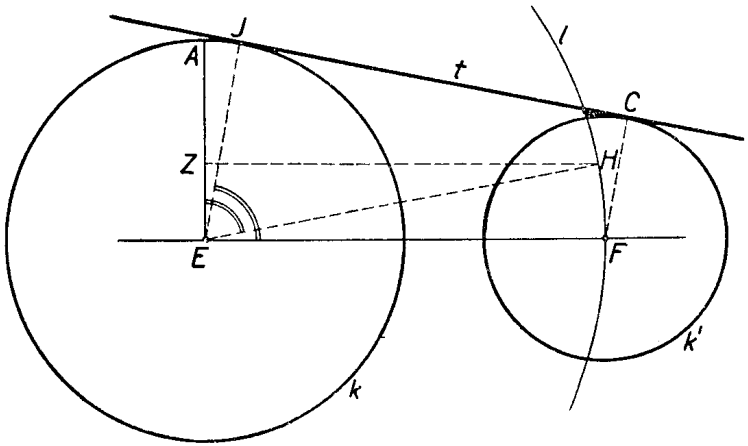
Perský matematik *Abu'Lvafa* (X. století n. l.) řeší úlohu touto konstrukcí: Rozpůlí oblouk AC bodem B. Kolmice v bodě A na AB a v C na BC se protnou v bodě D. Střed S úsečky BD je středem kružnice.

Věta o pravých úhlech nad průměrem je velmi stará. Pamphille, historička z doby Neronovy, ji připisuje Thaletovi. Poznamenává, že za její objevení obětoval osla. Je však velmi pravděpodobné, že zvláštní vlastnost obvodových úhlů v polokružnici už byla v době Thaletově a patrně i před ním obecně známa. Její přesný důkaz podal Euklides ve svých Elementech. Podobně i věty o úhlech obvodových a středových a úhlu úsekovém najdeme přesně dokázány ve třetí knize Základů (pomocí rovnoramenných trojúhelníků



Obr. 27. Užití Thaletovy věty (Schwenter)





Obr. 28a, b: Společná tečna (podle Schwentera)

a vlastnosti jejich vnějších úhlů). Obr. 27 poučuje podle jedné staré geometrie, kterak se v terénu stanoví body kružnice pomocí obrácené věty Thaletovy.

Větu, která říká, že protilehlé úhly tětivového čtyřúhelníka jsou výplňkové, dokázal Euklides. Poučku o tom, že součty protilehlých

stran tečnového čtyřúhelníka jsou si rovny, uvádí a dokazuje *Jordanus Nemorarius* (XIII. století). Obrácené věty vyslovil teprve *Christoph Clavius* r. 1574 (jezuita, učitel matematiky v Bambergu a v Římě).

Euklides studoval též vzájemnou polohu dvou kružnic. Společné vnější tečny dvou kružnic konstruoval Ital *Geronimo Girolamo Cardano* (XVI. století); společné vnitřní tečny sestrojil jako první *Giovani Ceva*, úředník, žijící kolem r. 1700 v Mantui. Dnes užívaná konstrukce se objevuje až v devatenáctém století. *Schwenter* sestrojuje vnější společné tečny dvou kružnic způsobem, který je zobrazen v obr. 28a. Poznamenejme, že $az = cf$ (poloměr menší kružnice) a úhel *aeh* je shodný s úhlem *ief* (*e* je středem větší kružnice). Tuto konstrukci provedenou a popsanou dnešním způsobem vidíte na obr. 28b.

7. PODOBNOST A STEJNOLEHLOST

Staří Egypťané zdobili své monumentální stavby bohatými kresbami a reliéfy. Z některých nedostavěných památek soudíme, že při tom užívali podobnosti. Z připraveného malého nákresu přenášeli kresbu pomocí čtvercové sítě na zeď, kde byla sestrojena zvětšená síť, a do ní kreslili obrazec podobný obrazci na nákresu.

Podobnosti bylo ve staroegyptském stavitelství užíváno též jinak. Je pozoruhodné, že úhly, které svírají hrany všech pyramid s horizontální rovinou, jsou vesměs stejně velké. Naskýtá se nám otázka, jak byl tento úhel přenášen. Podle některých úloh Ahmesova papyru je možno soudit, že Egypťané užívali poměrů v pravoúhlém trojúhelníku a že už věděli, že z rovnosti těchto poměrů plyne také shodnost příslušných úhlů v trojúhelnících — tedy i odchylka hrany pyramidy od horizontální roviny. Mnozí badatelé spatřují v této okolnosti první praktické užití oněch pojmů, které byly později nazvány goniometrickými funkcemi.

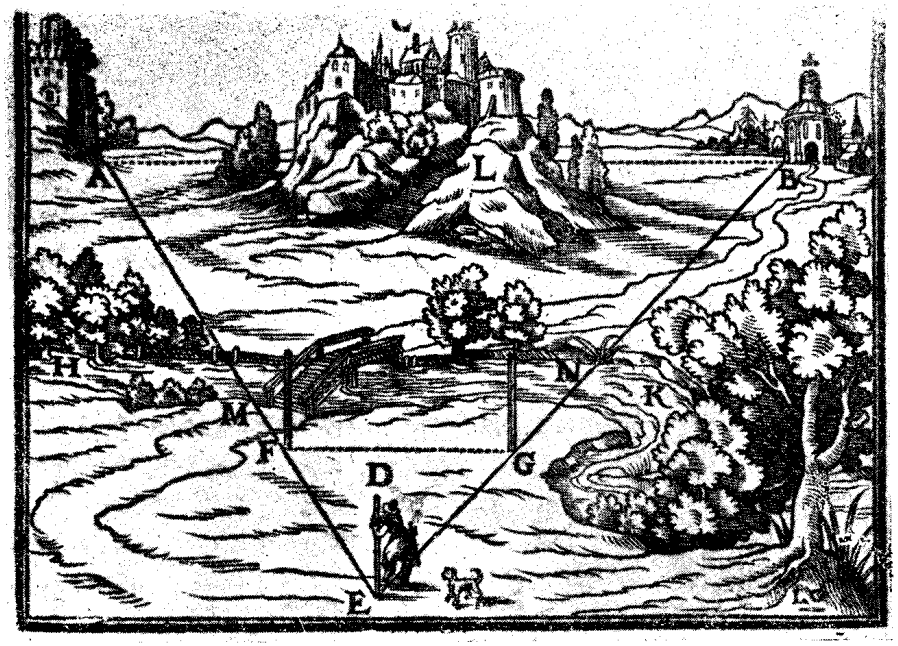
Základní vědomosti o podobnosti trojúhelníků měl patrně již *Thales z Miletu* (VI. století př. n. l.). Podle některých zpráv uměl prý stanovit výšku pyramidy tak, že změřil délku stínu svislé tyče

známé výšky a délku stínu pyramidy a z těchto tří délek určil hledanou výšku pyramidy. Měl-li Thales ještě jiné vědomosti o podobnosti, nedovedeme dnes dobře posoudit.

Některé věty o úměrných úsečkách a podobných obrazcích byly též předmětem úvah vědců školy pythagorejské v VI. a V. století př. n. l. Když však byly objeveny úsečky nesouměřitelné, bylo nutno celou tehdy známou teorii o úměrnosti úseček znovu přepracovat. Tento významný úkol provedl *Eudoxos z Knidu* (IV. století př. n. l.). Výsledky Eudoxových úvah se nám dochovaly v VI. knize Euklidových Základů (asi 320 př. n. l.). Podobně jako v ostatních knihách Základů vyslovuje i zde Euklides na počátku definice těch pojmů, s nimiž dále pracuje. V prvé definici definuje Euklides podobné mnohoúhelníky. Tato definice je v podstatě shodná s onou, které užíváme dnes. Druhá věta VI. knihy je základní větou o úměrnosti úseček na dvou stranách trojúhelníka, je-li každá z nich rozdělena na dvě části rovnoběžkou se stranou třetí. Důkaz této věty spočívá u Euklida na 1. větě VI. knihy, kde říká, že obsahy trojúhelníků o stejných výškách jsou v poměru jejich základen. V dalších větách této knihy pak rozvádí Euklides nauku o úměrnosti úseček a používá jí k řešení některých úloh, zvláště ke geometrickému stanovení neznámých členů v úměrách. Tak zde řeší úlohu, jak rozdělit úsečku v daném poměru, sestrojit třetí měřickou úměrnou (tj. řešit úměru $a : b = b : x$) a sestrojit i čtvrtou měřickou úměrnou (tj. řešit úměru $a : b = c : x$).

Pojem stejnolehlosti zavedl do matematiky *Leonard Euler* (ve druhé polovině XVIII. století). Mluví též o stejnolehlosti útvarů prostorových. Užití stejnolehlosti v praxi nacházíme ovšem už i v učebnicích mnohem starších. Tak *Daniel Schwenter* řeší řadu praktických úloh o zvětšování rovinných obrazců v knize „Geometria practica" z r. 1617. Popisuje a zobrazuje zde též přístroj, kterým se zvětšování či zmenšování na základě stejnolehlosti dá provádět takřka mechanicky. Je to v podstatě dnešní pantograf, kterého se hojně užívá v technických kreslírnách.

Podobnost a stejnolehlost našla i v praktické geometrii časté užití. Na obr. 29 (ze Schwenterovy geometrie) má měřič za úkol zjistit vzdálenost dvou bodů A a B, mezi kterými je překážka.



Obr. 29. Užití stejnolehlosti při měření nepřístupných bodů v terénu

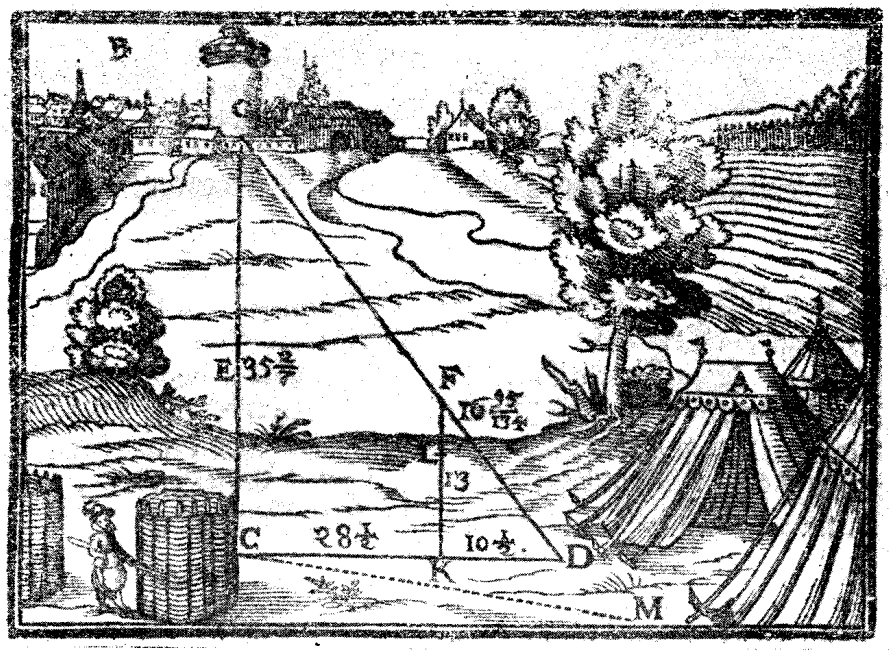
Zvolí si tedy bod E tak, aby mohl úsečky AE a BE přímo změřit. Najde pak body F a G, pro které platí: $3EF = AE$ a $3EG = BE$. Je zřejmé, že úsečka FG je třetinou délky AB.

Na obr. 30 je úměrnosti úseček použito v umění válečném. Ze změřených délek DK, DF, DC a KF vypočítal geometr vzdálenost věže G v obléhaném městě od stanovišť C a D.

Rozhodně více tělesné námahy nežli duševní činnosti vyžaduje zjištění výšky stromu, jak ukazuje obr. 31. Poznamenejme, že výška tyče BC je taková, jako výška očí geometrových.

V raném novověku oceňovali velkou výhodu podobných způsobů měření spojených s tělesným cvičením, mezi jiným také proto, že tyto geometrické výkony nevyžadovaly téměř žádných geometrických nástrojů, což bylo obvykle při textech těchto úloh zdůrazňováno.

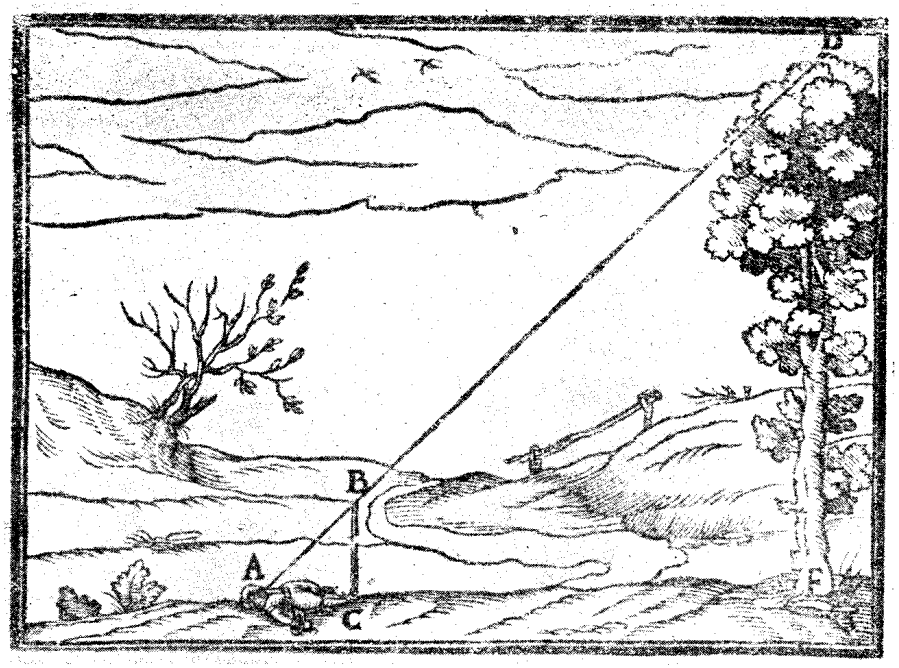
Na obr. 32 vyšetřuje podobným způsobem měřič výšku věže AB a vzdálenost GB od paty věže, je-li pata věže nepřístupná. Používá



Obr. 30

k tomu účelu dvou stejně dlouhých holí $KI = LH$. Ze Schwenterova výkladu, který je k obrázku připojen, plyne, že délka tyče KI je 18 střevíce, úsečka $KE = LM$ je 19 střevíců, LE je $9\frac{1}{2}$ střevíce, GM je 10 střevíců. Na základě těchto měření pak vypočítává Schwenter výšku věže $AB = 69\frac{3}{10}$ střevíce a vzdálenost paty věže $GB = 111\frac{13}{20}$ střevíců. Čtenář se už sám přesvědčí, zda bylo počítáno dobře.

Zcela bez nástrojů — tedy i bez hole apod. — vyšetřovali lesníci výšku stromů, jejichž pata byla přístupná, již v dávných dobách. Lesník se postavil zády ke stromu (na horizontální rovinu jdoucí jeho patou) a předklonil se. Když stál ohnu tak, že aby v rozkroku viděl právě špičku stromu, byl od stromu vzdálen o přibližnou délku jeho výšky. Že při tomto způsobu měření byla zjištěná výška stromu do jisté míry funkcí lesníkovy objemnosti, není třeba podotýkat.

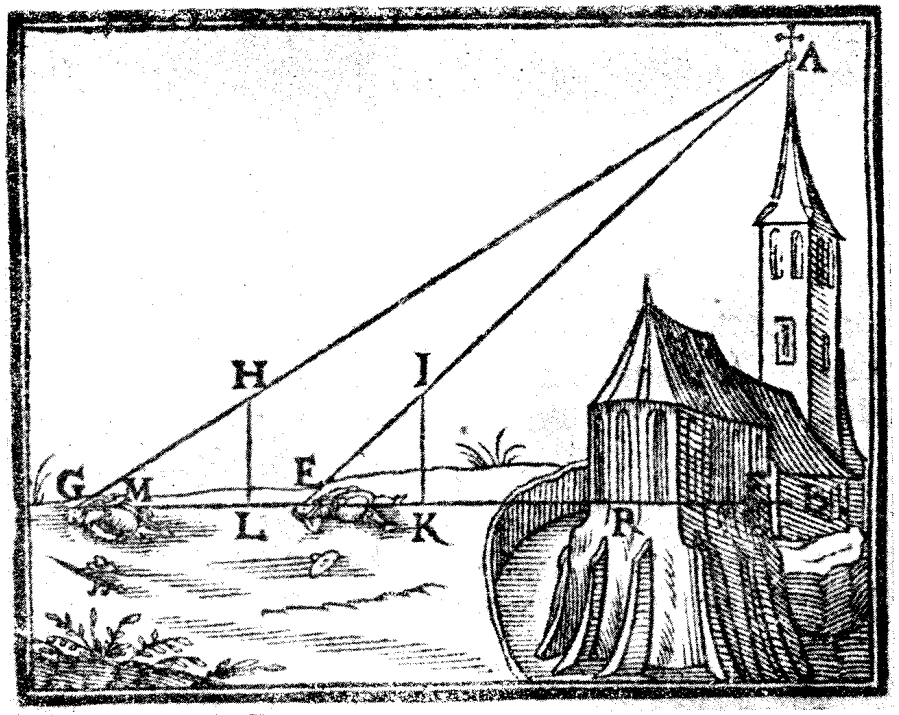


Obr. 31. Užití stejnolehlosti při zjišťování výšky stromů a věží

Obr. 33 ukazuje, jak měřič v XVII. století stanoví výšku věže pomocí horizontálního zrcátka. Čtenář si jistě sám vytvoří postup měření, jakmile si uvědomí, že trojúhelníky ABC a CDE jsou podobné.

Podobnost a stejnolehlost byla geometrickým podkladem pro vynálezy mnohých geometrických přístrojů. Vedle již jmenovaného pantografu se dodnes užívá redukčního kružítka, které bylo známo již ve starověku, jak o tom svědčí exemplář, nalezený v Pompejích. Redukčního kružítka se užívalo při řešení různých úloh technického a vojenského rázu. Tímto kružítkem, které bylo opatřeno obloukem s úhlovým dělením, měřil *Galileo Galilei* úhly ve vertikální i horizontální rovině. Užíval ho podobně, jako dnes užíváme theodolitu.

Rovněž příčné měřítko — užívané hlavně při práci s mapami — zakládá se na stejnolehlosti. Prvé měřítko toho druhu se vyskytuje

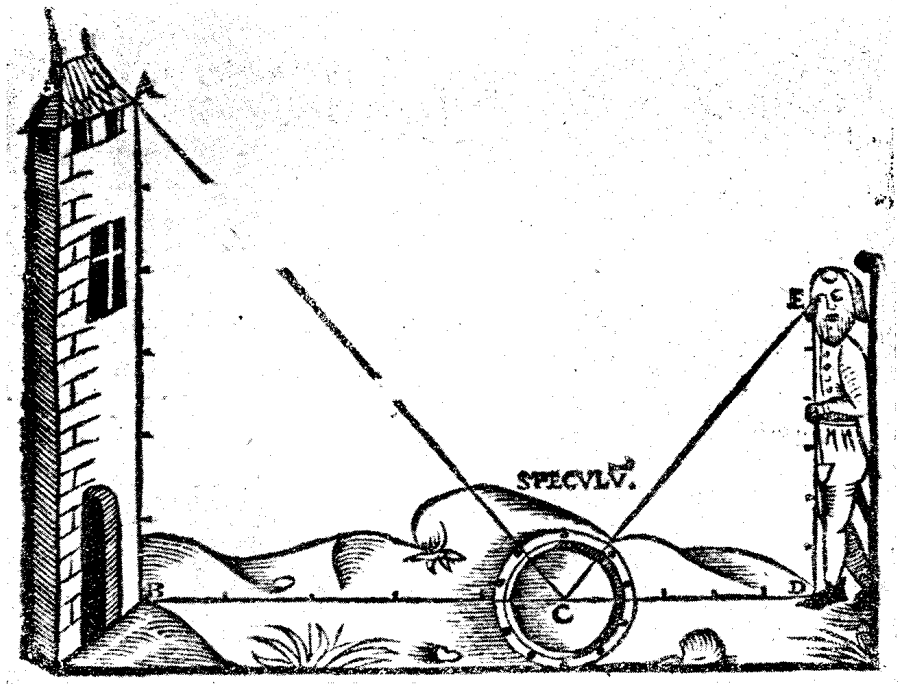


Obr. 32

na středověkém měřickém přístroji, který konstruoval židovský matematik *Levi ben Gerson*, žijící na přelomu XIII. století v Avignonu. Podobného zařízení však užíval už kolem roku 1000 n. l. při svých astronomických pozorováních i Tadžik *Al Biruni*, pocházející z Kjatu, hlavního města země Chorezmu (na území dnešního SSSR). Víme, že z tohoto kraje pocházel i slavný zakladatel algebry *Al Chovarizmi*.

8. GEOMETRICKÉ KONSTRUKCE

Jednoduché geometrické konstrukce prováděl člověk patrně již na prvních stupních svého kulturního vývoje. Stavba kruhového či obdélníkového obydlí, konstrukce lodí a různých nářadí vyža-

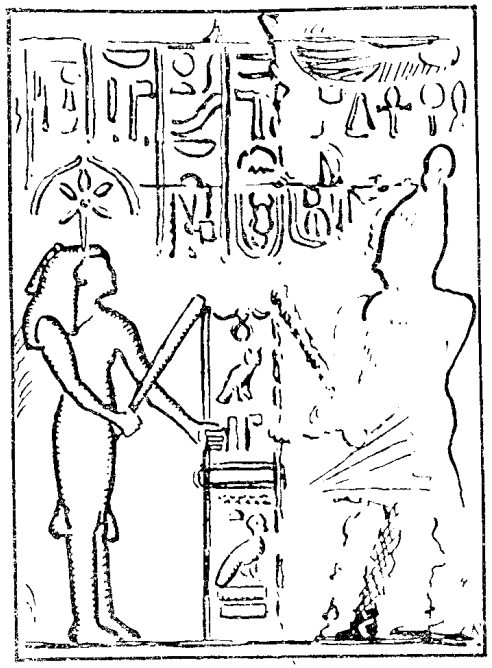


Obr. 33. Měření výšky věže pomocí zrcátka (Orontio, Liber de Geometria practica, 1558)

dovala řešení jednoduchých geometrických úkolů, jako je sestrojení kružnice, rozpůlení úsečky, vztyčení kolmice apod. Prvními geometrickými nástroji byly patrně tyče a provazec, který sloužil k měření a vytyčování přímého směru. Opatřen dvěma špičatými kolíky, stal se v lidských rukou nejstarším kružítkem. Na četných reliéfech a kresbách ze starého Egypta jsou zobrazeni měřiči (obr. 34), zvaní „napínači lan" (harpedonaptos), kteří drží v ruce tehdejší základní geometrické přístroje (svinutý provazec, úhelník, měřicí prut apod.). Při vykopávkách v babylónském Uru byly nalezeny kamenné řezby zdobící mohutnou stupňovitou věž Ziggurat. Jeden z obrazů představuje krále, kterak koná oběť před měsíčním bohem Nanarem. Bůh, sedící na trůně zobrazeném jako obdélník, drží v ruce měřicí prut a pečlivě svinutý provazec (obr. 35).

Na dolní — jen částečně zachované — části reliéfu je zobrazen král, kterak kráčí za božstvem na místo stavby věže. Nese přitom stavební a geometrické nářadí.

Rovněž ve starém Egyptě působil král jako geometr při kladení základů chrámu. Tuto svoji geometrickou úlohu prováděl v noci v zastoupení bohyně knihoven a paní kladení základů Seefech. Přitom pronášel rituální popis své „konstrukce". „Uchopil jsem

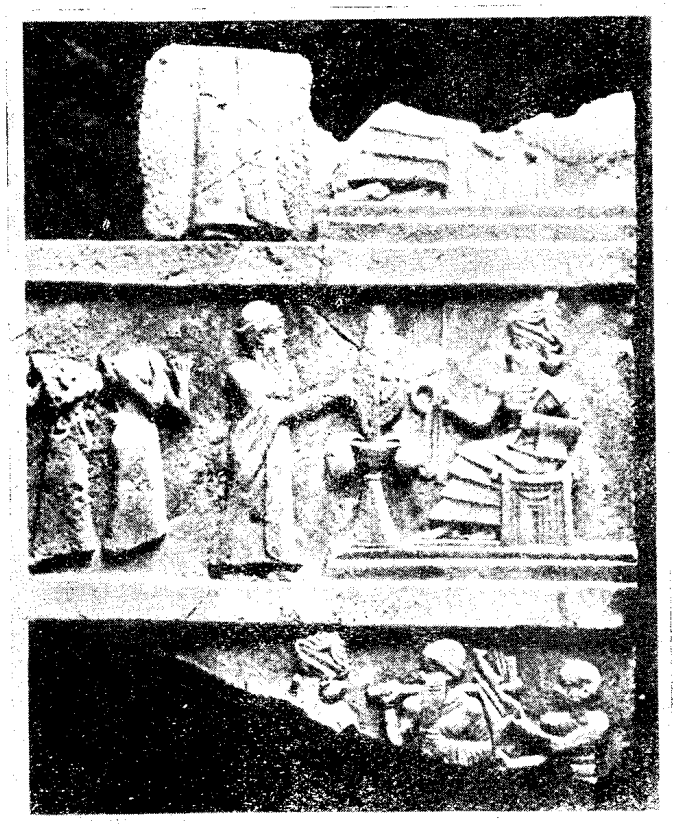


Obr. 34. Egyptští napínači lan (Harpedonapté)

dřevěný kolík a držadlo kladiva; držím provaz společně s bohyní Seefech. Můj pohled sleduje dráhy souhvězdí. Když moje oko spočine na souhvězdí Velkého vozu a když hodiny ukáží správnou dobu, tu označím základy božího domu."

Základní úlohou bylo vytyčit severojižní a východozápadní směr. Profesor pražské techniky *Kadeřávek* líčí v půvabné knížce „Geometrie a umění v dobách minulých" pravděpodobný způsob vyměřování základů egyptského chrámu. Vyslovuje domněnku, že

jednou z prvních konstrukcí, které člověk prováděl, bylo sestrojení pravidelného šestiúhelníka, jehož vrcholy dnes získá snadno malý žáček již při prvních pokusech v zacházení s kružítkem. Je tedy dost pravděpodobné, že po sestrojení severojižního směru byl kružítkem sestrojen obdélník, jehož strany měly orientaci směrů čtyř světových stran.

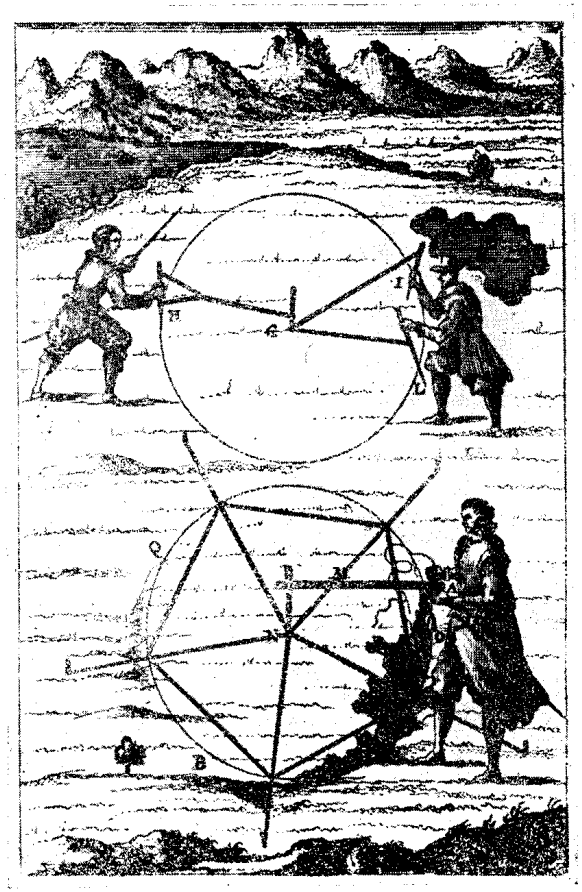


Obr. 35. Reliéf z věže Ziggurat

Egyptští geometři měli při řešení podobných úloh velké úspěchy. Potvrzují to výsledky jejich práce, především přesnost stavby pyramid. Čtverec, tvořící základnu pyramidy, je orientován podle základních světových stran. Největší odchylka od správného směru

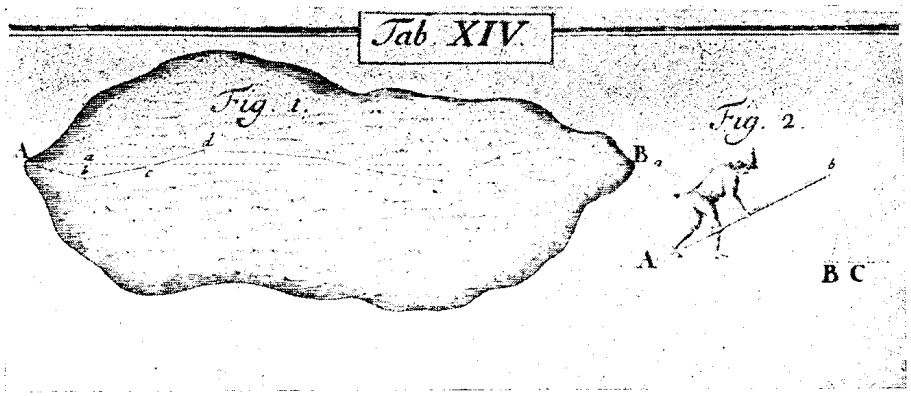
přitom činí 3′33″, nejmenší chyba je 2″ — tedy 18stý díl jednoho stupně.

Geometři rýsující obrazce v přírodě byli dobří a špatní. Názorně to ukazuje obrázek z knihy francouzského geometra — inže-



Obr. 36. Správné a nesprávné měření v terénu v XVII. století

nýra *A. M. Malleta*, která vyšla v Amsterodamu r. 1672 pod názvem „Les Travaux du Mars" (obr. 36). Poučuje čtenáře, jak je nutno správně držet kolík na konci provazce, aby mohla být kružnice správně narýsována. Ještě počátkem XVIII. století vyčítá německý



Obr. 37. Nesprávné měření v terénu v XVIII. století

geometr *Joh. Penther* ve své honosně ilustrované „Praxis Geometriae" zeměměřičům špatné měření úseček v terénu. V obraze 37 neklade měřičův pomocník měřítko po přímce, nýbrž měří lomenou čáru „protože stojí stranou měřítka a nevidí chybu v bodě *A*. Když pak zpozoruje, že není přesně ve směru *AB*, opraví chybu tím, že položí měřítko do směru *bcd*, aby tím chybu napravil. Když pak přijde do bodu *B*, naměří místo správných 5 prutů délku o $1\frac{1}{2}$ stopy větší". Podobně i na druhém obrázku měří pomocník špatně, když zvedá měřítko od země, „protože se nechce namáhat, aby se pořádně ohnul a měřítko k zemi správně položil".

Geometrické konstrukce, prováděné v praxi, předcházely před zobrazováním geometrických obrazců na poprášených destičkách a později též na papíře.

Obraz geometrických konfigurací se stále více stával zobrazením jistých logických představ, které jsou v helénské matematice vlastním obsahem geometrického uvažování. Konstrukce jsou logicky odůvodňovány a je posuzována jejich správnost. I některé velmi elementární úlohy jsou řešeny různými způsoby.

Euklides přenáší úhly pomocí věty *sss*, zatímco *Apollónios* už doporučuje použití rovnoramenného trojúhelníka, podobně, jak i dnes tuto úlohu řešíme.

Sestrojování kolmic se provádělo rozličnými způsoby. Tuto úlohu

řeší i *Euklides* ve svých Elementech. Arabský matematik *Abu'Lvafa* (X. století n. l.) sestrojil kolmici k dané přímce v daném jejím bodě pomocí obvodového úhlu nad průměrem kružnice.

Sestrojování rovnoběžek se většinou opírá o vlastnosti stran rovnoběžníka; později (v XVI. století) se užívá též věty, že se úhlopříčky v rovnoběžníku vzájemně půlí.

Při řešení konstruktivních úloh byl v Platónově akademii zaveden určitý formální postup (schéma), jehož v podstatě užíváme až dodnes. Po formulaci úlohy byl prováděn rozbor (analysa), poté následovala vlastní konstrukce a nakonec byla dokazována její správnost.

Užití analytické metody si brzy vynutilo, aby při řešení každé konstruktivní úlohy byly zkoumány též podmínky, za nichž je úloha řešitelná (determinace). Dále, aby byl rozvinut pojem „geometrického místa" (tj. množiny bodů určité vlastnosti), který má velký význam při některých metodách řešení konstruktivních úloh.

Athénský filosof *Platón* a jeho škola položili požadavek, aby se při konstrukcích používalo pouze pravítka a kružítka. Tento požadavek v podstatě znamená, aby při řešení konstruktivních úloh bylo použito pouze těchto dvou základních geometrických konstrukcí:

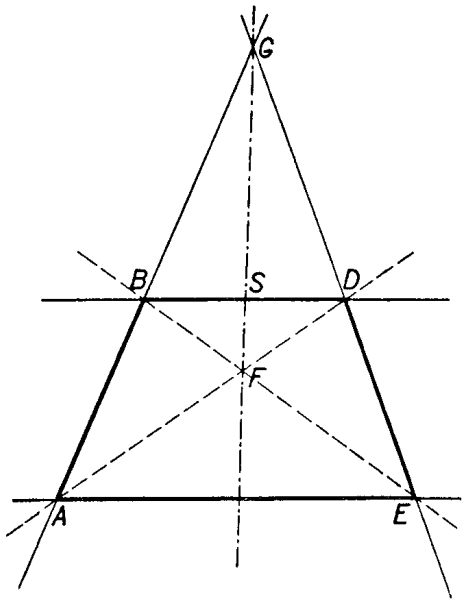
1. vésti dvěma různými body přímku,
2. opsat z daného bodu daným poloměrem kružnici.

Přitom počet použitých základních konstrukcí měl být při řešení jedné úlohy konečný. Platónův požadavek převzal jeho žák Euklides ve svých Základech, a proto konstrukce, které splňují předešlé podmínky, nazýváme konstrukcemi euklidovskými.

Nicméně Platónovo omezení konstruktivních předpokladů na pravítko a kružítko nebylo již ani samotnými Řeky obecně uznáváno, neboť tímto způsobem nebylo možno například rozřešit takové slavné úlohy tehdejší řecké geometrie, jako bylo zdvojnásobení krychle, trisekce úhlu a kvadratura kruhu. Sám Platón podal řešení úlohy o zdvojení krychle, při němž použil i jiných geometrických prostředků než pravítka a kružítka.

Velmi záhy byla pro řešení některých konstruktivních úloh vytvořena metoda, při které se pohybuje úsečka tak, že její krajní body se nacházejí stále na dvou křivkách. Tak byla také řešena i úloha rozdělení dutého úhlu na tři stejné části (trisekce úhlu).

Později byly vynalezeny i jiné konstruktivní nástroje — jako třeba kružítko o třech nebo čtyřech ramenech, jímž mohl být např. najednou přenesen celý trojúhelník či čtyřúhelník. Teoretické propracování použitelnosti těchto nástrojů bylo provedeno zčásti až v nové době. Zvláště pak kinetická geometrie, tj. nauka zabý-



Obr. 38. Půlení úsečky

vající se vytvářením geometrických útvarů pomocí pohybu, rozšířila pojem konstruktivního nástroje na rozmanité, často velmi komplikované mechanismy. Ale i jiná odvětví vědní, hlavně optika, přispěla k vytvoření dalších důležitých konstruktivních nástrojů.

Platónovo omezení konstruktivních prostředků dalo podnět k dalším podobným úvahám tohoto druhu. Tak Francouzi *Lazar Carnot* a *Charles Julien Brianchon* na počátku minulého století studo-

vali konstrukce, které lze provést pouhým pravítkem. Brianchon kladl důraz zvláště na to, aby mohly být tyto konstrukce použity v praktické geometrii. Tak například konstruuje bodem A rovnoběžku k přímce určené body B, D a zná přitom střed této úsečky BD. Konstrukce se provádí na základě věty, která říká, že v každém lichoběžníku $ABDE$ přímka FG (kde F je průsečíkem úhlopříček a G průsečíkem prodloužených ramen lichoběžníka) půlí základnu BD (obr. 38).

Italský matematik *Lorenzo Mascheroni* v knize „Geometria del Compaso" (Geometrie kružítka) uvádí konstrukce, při nichž se užívá pouze kružítka a dokazuje, že tímto způsobem lze konstruovat všechny úlohy řešitelné euklidovsky. Můžeme tedy použitím pouhého kružítka (bez pravítka) sestrojit další body přímky dané dvěma body, zdvojnásobit úsečku určenou dvěma body, sestrojit patu kolmice vedené bodem ležícím mimo přímku danou dvěma body, sestrojit průsečík dvou přímek určených dvěma body apod., aniž by jedna jediná úsečka nebo přímka byla v obrázku rýsována.

Jiní matematici (*J. H. Lambert*, *J. V. Poncelet*, *J. Steiner*) zkoumali konstruktivní řešení geometrických úloh za podmínky, že kromě pravítka mohlo být použito jen jediné kružnice narýsované na nákresně. Zvláště německý matematik Jacob Steiner (XIX. století) prozkoumal tuto otázku zcela systematicky a dokázal, že lze tímto způsobem provést teoreticky všechny euklidovské konstrukce. Bylo také uvažováno o konstrukcích, při nichž kromě rýsování přímek a úseček podle pravítka bylo dovoleno rýsovat pouze kružnice téhož poloměru. S těmito druhy konstrukcí se zabýval již jmenovaný arabský matematik Abu'Lvafa a později pak slavný malíř, vědec a vynálezce *Leonardo da Vinci*, malíř a rytec *Albrecht Dürer* a jiní.

Připustíme-li při geometrických konstrukcích bez kružítka vedle pravítka jako konstruktivní nástroj ještě pohyblivý pravý úhel, dovedeme sestrojit nejen všechny euklidovské úlohy, jak to prokázal francouzský matematik *René Descartes* (XVII. století), ale i úlohy obtížnější, které pouhým kružítkem a pravítkem konstruovat nelze.

Při všech konstrukcích, o nichž jsme se dosud zmínili, se vždy předpokládalo, že jsou splněny některé okolnosti, které v praxi nemusí nastat. Teoretické řešení konstruktivních úloh předpokládá například neomezenou rovinu, libovolně dlouhé pravítko a schopnost rýsovat kružnice libovolně velkého či libovolně malého poloměru. Prakticky není ovšem nikdy žádný z těchto požadavků splněn a záleží proto na povaze a rozměrech daných geometrických útvarů, zda lze konstrukci skutečně v dané nákresně provést, či zda některé prvky (průsečíky přímek, dané body apod.) padnou mimo ni.

Tak vznikla celá skupina geometrických úloh, které sice dovedeme teoreticky velmi snadno rozřešit, které ale za různých nepříznivých okolností (omezenost nákresny a konstruktivních nástrojů) se stávají obtížnými, ale současně i zajímavými problémy. Také takovým úlohám věnovali mnozí geometři svou pozornost. Zmíněný už německý matematik *Daniel Schwenter* shromáždil řadu těchto úloh ve jmenované knize „Geometria praktica nova". Řeší zde například tyto úlohy: Krátkým pravítkem spojit úsečkou dva body, jejichž vzdálenost je větší než délka pravítka. Rozpůlit úsečku, která je narýsována těsně při kraji nákresny, takže lze rýsovat pouze v jedné polorovině roviny. Sestrojit kolmici ke krátké úsečce. Sestrojit rovnoběžku s danou přímkou bodem velmi blízkým k přímce. Stanovit přesně průsečík dvou přímek, protínajících se pod velmi malým úhlem. Sestrojit kružnici třemi velmi blízkými body nebo takovými třemi body, které leží téměř v jedné přímce apod. Ponecháváme snaze našeho čtenáře, aby tyto jednoduché úlohy sám vyřešil.

Geometrické konstrukce prováděné za zvláštních podmínek se staly od té doby předmětem trvalého zájmu geometrů pro svůj velký praktický význam. Český matematik *V. Hruška* napsal o nich knížku „Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace". Některé její odstavce jsou vhodným tématem pro matematické zájmové kroužky a mohou je studovat i žáci nižší střední školy.

9. OBSAHY

Představa obsahu rovinného obrazce, odvozená z potřeb lidské práce (velikost a přeměna polí, úvahy o rozměrech základů obydlí, o rozsahu půdy potřebné k zajištění celoroční výživy kmene atd.) se objevuje již od dob pradávných a je ovšem zaznamenána též v prvních písemných početních památkách. Z babylónského seznamu polí z doby prvé dynastie Ur (asi 2000 let př. n. l.), jejíž králové se nazývali „králi čtyř úhlů světa" je možno soudit, že již tehdy znali Babylóňané předpis pro výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníka i rovnoramenného lichoběžníka. V Ahmesově papyru je mnoho místa věnováno výpočtům obsahů. Mnohé vzorce, které se vyskytují v staroegyptských početních předpisech, jsou ovšem jenom přibližné. Tak např. obsah rovnoramenného trojúhelníka o základně a a ramenu b je počítán podle vzorce $P = \frac{a}{2} \cdot b$. Podobně staroegyptské pravidlo pro výpočet obsahu rovnoramenného lichoběžníka bychom dnes vyjádřili vzorcem $\frac{a+c}{2} \cdot b$, kde a, c jsou základny a b je délka ramene. Přibližný vzorec $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ pro obsah čtyřúhelníka se objevuje ještě u *Heróna z Alexandrie* (100 let př. n. l.), který se zabývá hojně praktickým užitím geometrie. Herón ovšem zná vedle přibližných vzorců pro obsahy rovinných mnohoúhelníků také vzorce přesné.

Euklides se ve svých úvahách nezabývá nikde praktickým užitím geometrie. Proto také nepodává návody pro výpočty obsahů a uvažuje nejvýš o poměrech obsahů některých rovinných obrazců. Na konci první knihy Elementů se např. praví, že „rovnoběžníky o stejné základně a stejné výšce mají stejný obsah" a dále, že „obsah trojúhelníka se rovná polovině obsahu rovnoběžníka o shodné základně a shodné výšce" a podobně.

Velkou pozornost výpočtům obsahů obrazců omezených úsečkami (obsahům mnohoúhelníků) věnuje již zmíněný Herón z Alexandrie ve spise „Metrica". V této knize jsou shromážděny základní vzorce pro výpočty obsahů a jsou zde podány i jejich důkazy. Kromě jiného je tu též uveden vzorec pro obsah trojúhelníka, který je dán stranami. Skutečným objevitelem tohoto vzorce je však patrně *Archimédes*.

Důležitým dílem praktické geometrie se stal ve XIII. století spis „Practica geometriae", který podle arabských pramenů napsal *Leonardo Pisánský*. V této knize byla též zachycena celá nauka o obsazích, jak se dochovala z dob Euklidových a Herónových. Celý další středověk a novověk až do XIX. století nezaznamenal podstatný pokrok v elementárních úvahách o obsazích rovinných mnohoúhelníků.

Teprve v roce 1853 uveřejnil německý matematik *P. Gerwien* důležitou větu, která říká, že dva rovinné mnohoúhelníky, které mají rovné obsahy, lze příčkami vždy rozdělit v části tak, že každé části jednoho mnohoúhelníka odpovídá shodná část mnohoúhelníka druhého. Tato věta platí stejně pro obdobné útvary na kouli, nelze však její platnost rozšířit pro úvahy o objemech. Obsahy všech druhů mnohoúhelníků se zabýval důkladně slavný německý matematik *K. F. Gauss*. Nové cesty pro úvahy o obsazích (a též o objemech) ukázal německý matematik *A. F. Möbius* (XIX. století) ve spise „Der barycentrische Calcul" (1827).

10. VĚTA PYTHAGOROVA

Dnes je už téměř bezpečně zjištěno, že větu Pythagorovu *Pythagoras* ani neobjevil, ani nedokázal.

Prvá kniha Euklidových Elementů končí větami 47. a 48., z nichž první dnes nazýváme větou Pythagorovou a druhou pak větou k Pythagorově větě obrácenou. Zde poprvé nacházíme také obecný důkaz této věty; *Euklides* ho provádí tak, že nejprve dokáže rovnost obsahu čtverce nad odvěsnou a obsahu obdélníka sestrojeného z přepony a průmětu příslušné odvěsny na přeponu. Užitím tohoto poznatku pro obě odvěsny dostává pak větu Pythagorovu. *Proklos* v V. století n. l. tvrdí, že tento důkaz byl objeven samotným Euklidem.

Zvláštní případy pravoúhlých trojúhelníků, v nichž délky všech tří stran jsou čísla celá (tzv. pythagorejské trojúhelníky) byly známy v různých zemích dávno, někde i celá tisíciletí před Pythagorou a byly prakticky užívány k sestrojování pravého úhlu. Tako-

vým pythagorejským trojúhelníkem je např. trojúhelník o stranách 3, 4, 5 nebo o stranách 5, 12, 13 aj. Příslušnou trojici čísel pak nazýváme „pythagorejskou trojicí."

Mezi úlohami zaznamenanými klínovým písmem na babylónských hliněných destičkách nacházíme také problémy, které byly řešeny užitím věty dnes nazývané větou Pythagorovou. Uveďme dvě takové úlohy:

1. Vedle svislé zdi stojí trám dlouhý 30 délkových jednotek. Trám opřeme o zeď tak, že horní konec je o 6 jednotek níže, než tomu bylo u svisle stojícího trámu. Jak daleko od zdi je dolní konec trámu?

2. Roura stojí svisle vedle zdi. Opře-li se šikmo, sníží se její horní konec o 3 lokty a její dolní konec se vzdálí od zdi o 9 loktů. Jak dlouhá je roura?

Pravoúhlé trojúhelníky, o které se opírá řešení dvou předešlých úloh, mají strany v poměru 3 : 4 : 5; Babylóňané však znali pravoúhlé trojúhelníky i s jiným poměrem stran, např. 5 : 12 : 13; 8 : 15 : 17 apod.

V starověgyptských památkách z doby XII. dynastie (více než 4000 let př. n. l.) jsou zaznamenány rozmanité číselné vztahy jako např.

$$1^2 + (\tfrac{3}{4})^2 = (1\tfrac{1}{4})^2 \text{ nebo } 6^2 + 8^2 = 10^2,$$

jež jsou zřejmě odvozeny z pythagorejské trojice čísel 3, 4, 5, která splňuje rovnici $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Při kladení základů egyptských chrámů ve III. tisíciletí př. n. l byl pomocí astronomických pozorování nejprve určen severojižní směr. K vytyčení pravoúhlého základu chrámu bylo pak zapotřebí sestrojit kolmici k tomuto směru. To prováděli harpedonapté (napínači lan) pomocí svých tajných vědomostí. Patrně přitom někdy používali trojúhelníka, jehož strany byly v poměru 3 : 4 : 5. Toto (pravděpodobné) počínání harpenodaptů můžeme napodobit tak, že použijeme dvanáctimetrového lana, jehož oba konce jsou spojeny a které je vždy po jednom metru rozděleno uzly. Prvý, čtvrtý a osmý uzel jsou vyznačeny nějakým zvláštním způsobem. Napneme-li nyní lano např. pomocí tří kolíků tak, že vznikne trojúhelník

s vrcholy v prvém, čtvrtém a osmém uzlu, pak je tento trojúhelník podle obrácené věty Pythagorovy pravoúhlý s pravým úhlem při čtvrtém uzlu.

Číňané kladou své prvé poznatky o větě Pythagorově do doby více než jednoho tisíce let př. n. l. V knize „Čou pei" se líčí rozhovor dvou osobností z této doby. Trojúhelník o stranách 3, 4, 5 je uveden následovně: „Rozložíme-li pravý úhel v jeho součástky, tu čára spojující konce jeho ramen má délku 5, jestliže je základna 3 a výška 4." Je však pravděpodobné, že řečená kniha je mladší, snad z doby kolem počátku našeho letopočtu.

Indické znalosti o porovnávání obsahů, stejně jako o vlastnostech stran trojúhelníka pravoúhlého jsou také velmi starého původu a pramenily patrně z náboženských potřeb. Náboženský kult Indů vytvořil již ve XII. století př. n. l. velmi přísné předpisy pro velikost povrchu obětní desky oltáře, přičemž ale měly tyto desky u různých oltářů různé obrysy. Při úvahách o ploše obětní desky byly uplatňovány různé poučky pro srovnání obsahů rovinných obrazců a bylo též užíváno věty o vztahu čtverců nad stranami pravoúhlého trojúhelníka (dnešní Pythagorovy věty). Velkou úlohu při indických bohoslužbách hrál pravý úhel, svislost hran oltáře, orientace vzhledem k světovým stranám apod. Jestliže tyto předpoklady nebyly splněny, nepřijalo božstvo oběť a obětující upadl do nemilosti.

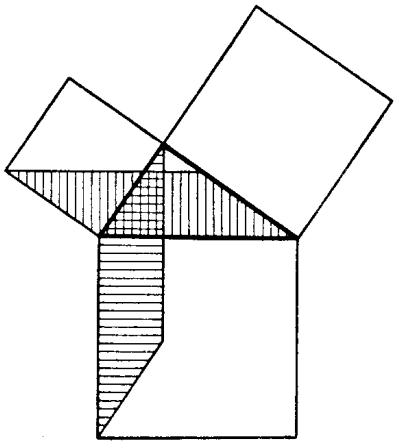
Věta o vlastnostech stran pravoúhlého trojúhelníka a číselný vztah, který s těmito vlastnostmi souvisí, byl tedy znám již před Pythagorou a jeho školou. Ale ani obecný důkaz této věty nelze Pythagorovi přiznat. Rozvoj a stav geometrických znalostí nebyl totiž v jeho době zdaleka ještě takový, aby poměrně složitý důkaz zmíněné věty mohl být přesně proveden. Je tedy velmi pravděpodobné, že ani Pythagoras nepodal skutečný důkaz věty o čtvercích nad stranami pravoúhlého trojúhelníka, nýbrž že tato věta byla dokázána až mnohem později někým z jeho následovníků. Vždyť již ani v době Aristotelově nebylo možno rozlišit práci a podněty samotného Pythagora od toho, co uskutečnila jeho škola.

Pythagorova věta je jednou z nejdůležitějších vět elementární geometrie. Její význam se odráží i v tom, že byla mnohokrát doka-

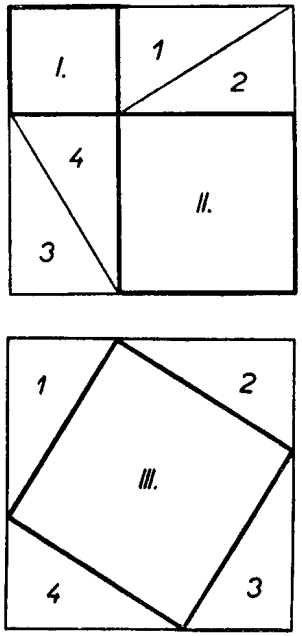
zována nejrozmanitějšími způsoby. Na počátku minulého století bylo těchto důkazů v jednom německém spise shromážděno 32, počátkem tohoto století jich bylo zaznamenáno už 96. Nyní je už známo přes 100 důkazů. Podle matematických prostředků, které se při důkazech užívají, rozdělujeme je zhruba do čtyř skupin. První skupina důkazů je založena na pravidlech o proměnách obrazců stejného obsahu (obr. 39), druhá užívá věty o rozdělení rovnoplochých mnohoúhelníků na shodné mnohoúhelníky, třetí skupina pracuje s algebraickými vztahy a do čtvrté skupiny jsou zařazeny ty důkazy, při nichž je použito podobnosti.

V elementárních učebnicích se s oblibou dokazuje tato slavná věta způsobem, který bývá zván indickým důkazem (obr. 40).

Různé formy důkazů druhé skupiny tvořily často podstatu skládanek a hlavolamů, které byly nabízeny ke koupi v hračkářských obchodech. Některé tyto důkazy lze sledovat na našich obrázcích 41, 42.

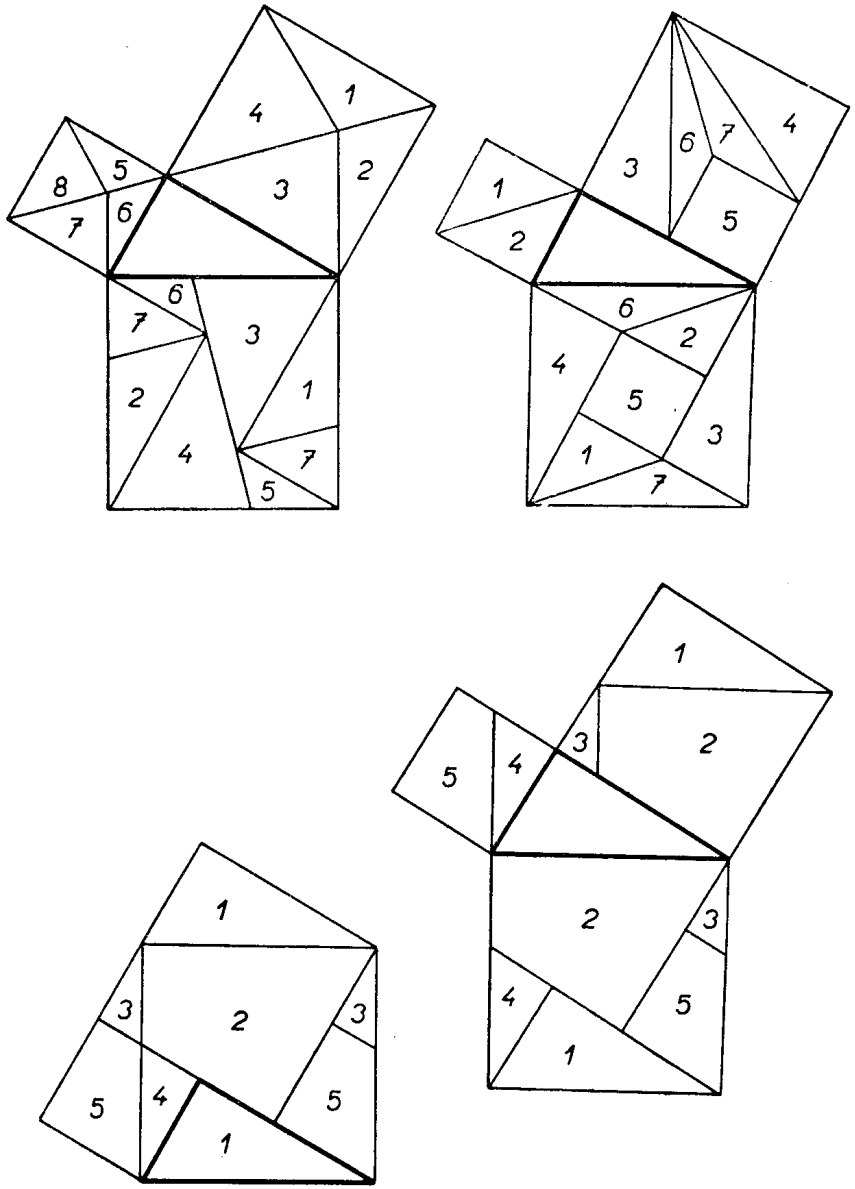


Obr. 39



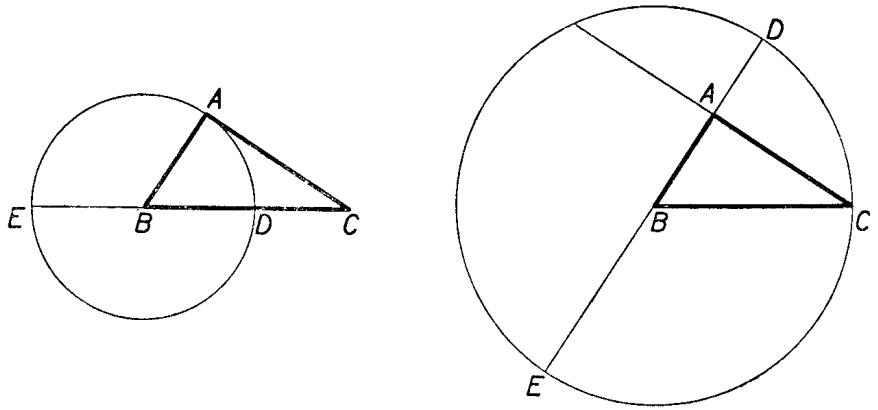
Obr. 40

Důkazy věty Pythagorovy



Obr. 41—43

Důkazy věty Pythagorovy



Obr. 44
Důkazy věty Pythagorovy

K úplnému důkazu ovšem je zapotřebí zjistit, že obrazce, které jsou stejně číslovány, jsou skutečně shodné. Pozoruhodný důkaz rozkladem příslušných čtverců podal arabský matematik *Annairizi* kolem r. 900 n. l. (viz obr. 43). *H. Brandes* dokázal, že v tomto důkazu bylo použito nejmenšího počtu trojúhelníků, kterých lze při důkazu rozkladem užít. (Každý ze čtyřúhelníků „2" a „5" se rozdělí úhlopříčkou ve dva trojúhelníky.) Formální jednoduchostí vyniká důkaz ze 3. skupiny. Z věty o mocnosti bodu ke kružnici ihned plyne (obr. 44)

$$AC^2 = DC \,.\, EC, \quad \text{čili} \quad b^2 = (a - c)(a + c)$$

nebo

$$AC^2 = AD \,.\, AE, \quad \text{čili} \quad b^2 = (a - c)(a + c)$$

Byly také odvozeny četné věty, které jsou rozšířením a zobecněním věty Pythagorovy.

Řešení Pythagorejské rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ přirozenými čísly podává Euklides v desáté knize Elementů. Dnes víme, že každé celé řešení x, y, z této rovnice lze obdržet tím, že vhodně zvolíme celá čísla p, q, r tak, aby pq^2 a pr^2 bylo současně liché nebo současně sudé a pak položíme

$$x = pqr, \; y = \tfrac{1}{2}p(q^2 - r^2), \quad z = \tfrac{1}{2}p(q^2 + r^2)$$

Připojíme-li ještě podmínku, že čísla p, q, r jsou kladná a že platí $q > r$, dostaneme pythagorejské trojice čísel. Pythagorovci

znali řešení méně obecné:

$$x = 2q + 1, y = 2q^2 + 2q, z = 2q^2 + 2q + 1$$

(q je kladné číslo).

11. DÉLKA KRUŽNICE A OBSAH KRUHU

Dějiny určování délky kružnice a obsahu kruhu, jakož i určování čísla π, které značí poměr obvodu kruhu k jeho průměru, lze rozdělit do tří období:

V prvém období se délka kružnice a obsah kruhu zjišťovaly empiricky, druhé období zahrnuje geometricko-počtářské úvahy a v třetím období se již užívá metod funkční analysy, pomocí níž se pak podařilo problém obvodu a obsahu kruhu úplně vyřešit.

I. období: Primitivní lidé se původně domnívali, že obsah kruhu je přímo úměrný jeho průměru. Někteří obyvatelé jihomořských ostrovů se to domnívají až doposud.

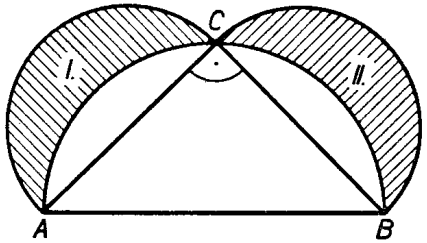
Ale již v nejstarších písemných matematických památkách nacházíme správnější představu o obsahu kruhu. V Ahmesově papyru je obrázek a výpočet, podle kterého se obsah kruhu rovná obsahu čtverce, jehož strana je $\frac{8}{9}$ průměru. Bylo tedy staroegyptské $\pi = 3{,}1604\ldots$

II. Období: Ve starověké matematice zaznamenáváme četné pokusy o tzv. kvadraturu kruhu a rektifikaci kružnice. Kvadraturou kruhu se rozumí sestrojení takového čtverce, jehož obsah by se rovnal obsahu daného kruhu. Rektifikace kružnice pak znamená sestrojení úsečky, jejíž délka se rovná délce dané kružnice (obvodu kruhu).

Hippokrates z ostrova Chiu (V. století př. n. l.) hledal rovinné obrazce omezené dvěma oblouky různých kružnic, přičemž obsah těchto obrazců se měl rovnat obsahu nějakého n-úhelníka. To se mu podařilo ve čtyřech zvláštních případech. Tak např. sestrojil nad odvěsnami AC, BC rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka ABC polokružnice (vně trojúhelníka) a nad přeponou AB další polokružnici tak, aby procházela vrcholem C. Součet obsahů obou částí

roviny, jež jsou těmito polokružnicemi omezeny (Hippokratovy měsíčky), rovná se pak ploše trojúhelníka *ABC* (obr. 45).

Tento vztah platí pro každý pravoúhlý trojúhelník. Ani tyto úvahy nevedly ovšem k vyřešení úlohy, jak proměnit kruh v rovnoplochý *n*-úhelník.



Obr. 45. Hippokratovy měsíčky

Rozhodný krok ve vyřešení otázky obvodu kruhu a jeho obsahu učinil *Archimédes*. Kromě jiného dokázal i tyto tři důležité věty:

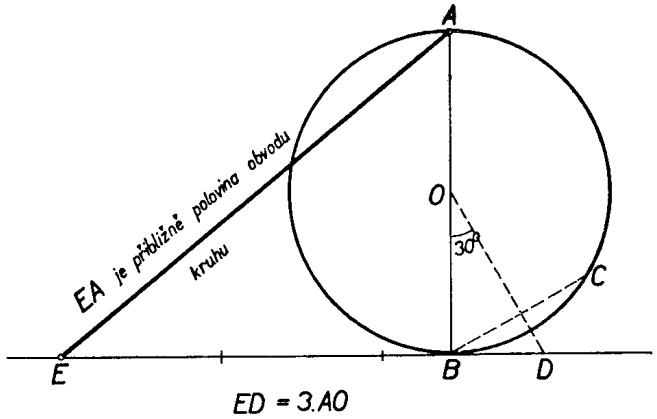
1. Obsah kruhu se rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna se rovná poloměru kruhu a druhá odvěsna jeho obvodu.
2. Poměr obsahu kruhu a čtverce o straně rovné průměru kruhu se rovná přibližně 11 : 14.
3. Obvod kruhu je třikrát tak velký jako jeho průměr a ještě o něco větší, totiž o více než $\frac{10}{71}$ průměru a o méně než $\frac{10}{70}$.

Tuto větu dokazuje Archimédes pomocí pravidelných *n*-úhelníků ($n = 6, 12, 24, 48, 96$), jež jsou danému kruhu opsány, respektive vepsány. Přitom přijímá z názoru předpoklad, že je obvod kruhu vždy menší než obvod opsaného *n*-úhelníka a větší než obvod *n*-úhelníka vepsaného. Touto Archimédovou úvahou byla poprvé udána vědecká metoda pro výpočet obvodu a obsahu kruhu a tím také čísla, které dnes nazýváme π.

Později byly pro číslo π nalezeny jiné přibližné hodnoty a zároveň byly objeveny přibližné konstrukce pro stanovení délky kružnice a obsahu kruhu. Některé přesnější hodnoty pro π našli Indové. Tak *Bhaskara* (XII. století n. l.) uvádí hodnotu $\frac{3927}{1250}$,

kterou vypočítal Archimédovou metodou použiv opsaného a vepsaného až 384-úhelníku. *Bráhmagupta* (VI. až VII. století n. l.) říká, že pro praktický výpočet obvodu kruhu postačí násobit průměr třemi. Přesnější výsledek obdržíme, když odmocníme desetinásobný čtverec průměru; $o = \sqrt{(2r)^2 \cdot 10} = 2r\sqrt{10}$. Podle tohoto indického matematika je tedy $\pi = \sqrt{10}$.

Velkou pozornost vyšetřování obvodu a obsahu kruhu věnovali Arabové. Počátkem XV. století arabský matematik *Džemid Giasedin al Kaši* ve spise „O kružnici" má např. kapitolu nazvanou „Oddíl třetí o tom, na kolik částí je nutno rozdělit kružnici a do jakého (šedesátkového) řádu je nutno provádět výkon, aby rozdíl mezi získaným obvodem a danou kružnicí nebyl ani vlas."



Obr. 46. Kochańského přibližná rektifikace kružnice

Z přibližných konstrukcí je nejznámější rektifikace kružnice (obr. 46), kterou navrhl polský matematik *Adamas Adamandus Kochański* (XVII. století).

Konec XVI. a začátek XVII. století byl dobou velkých numerických výpočtů. Aritmetika právě končila výstavbu své symboliky a mezi matematiky se obecně rozšířila znalost počítání s desetinnými zlomky. Do této doby spadá též vznik logaritmů a sestavování logaritmických i jiných tabulek. Rozvoj numerického počítání byl podnícen především potřebami astronomie a trigonometrie. Sou-

časně však bylo numerické počítání zneužíváno v astrologii, která takto nepřímo též přispěla k jeho rozvoji.

Odraz záliby v numerickém počítání jeví se i v historii čísla π. Holanďan *Ludolf van Ceulen* (XVI. století) vypočítává Archimédovou metodou číslo π zprvu na 32, později na 35 desetinných míst a používá k tomu pravidelných 1 073 741 248-úhelníků. Pro tuto obětavou práci bývá často konstanta π nazývána číslem Ludolfovým.

Počet postupně zjišťovaných desetinných míst čísla π stále roste. Tak např. Slovinec *G. Vega*, autor velkých logaritmických tabulek, vypočítal číslo π na 140 desetinných míst. Další zvyšování počtu nalezených desetinných míst čísla π bylo dosaženo pomocí analytických metod a spadá již do III. období. Dovedný počtář *Dase* stanovil 200 a po něm *Rutherford* 440 desetinných míst čísla π. Roku 1873 uveřejnil Angličan *W. Shanks* výpočet čísla π na 707 desetinných míst. Nicméně se pozdějším zkoumáním ukázalo, že jeho výpočet je od 528 místa nesprávný. *D. F. Ferguson* a *J. W. Wrench* vypočetli roku 1878 číslo π na 808 desetinných míst a správnost výsledku byla v nedávné době potvrzena výpočtem na elektronkových počítacích strojích, jímž bylo číslo π určeno během 96 hodin na 2040 desetinných míst. Všechny tyto výpočty mají ovšem doposud jenom teoretický význam a byly více méně diktovány snahou o rekord.

III. období: Počínaje XVII. stoletím staly se úvahy o čísle π předmětem matematické analysy. Jeho výpočet se dál pomocí nekonečných řad, nekonečných součinů a nekonečných řetězových zlomků. O obecné zavedení znaku π má hlavní zásluhu *Euler*, který ho často užíval ve své rozsáhlé vědecké korespondenci.

Všechny tyto výzkumy však neřešily zásadní otázku charakteru čísla π. Matematikové se sice již dlouho domnívali, že π není racionálním číslem (např. *Huygens* to tušil již v roce 1654), ale algebraické prostředky, které měli k dispozici, jim nedovolily tuto otázku v plném rozsahu rozhodnout. Euler dokonce vyslovil domněnku, že číslo π není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty. Toto tvrzení dokázal teprve německý matematik *F. Lindemann* v roce 1882. Tím byl zároveň podán i důkaz,

že není možno pravítkem a kružítkem sestrojit úsečku, jejíž délka by se přesně rovnala délce dané kružnice, ani čtverec, jehož obsah by se přesně rovnal obsahu daného kruhu. Tisíciletý průběh výzkumu rektifikace kružnice a kvadratury kruhu byl tím konečně definitivně ukončen.

12. STEREOMETRIE

První stereometrické úvahy stejně jako první úvahy planimetrické vznikly z praktických potřeb našich předků. Již v neolitické době musel mít člověk poměrně velmi značnou prostorovou představivost, jestliže dovedl vybudovat obydlí, které bylo podle nynějších archeologických vykopávek 17 m dlouhé a 8 m široké.

Popud k systematickému studiu stereometrie dalo teprve rozvíjení perspektivy. V V. století př. n. l. zkoumal perspektivu *Anaxagoras* po stránce vědecké. Řecký malíř *Agatharchos* v polovině V. století př. n. l. postavil perspektivní dekorace pro scénickou výpravu posledních Aischylových „Tragedií" a napsal o tomto svém umění zvláštní pojednání.

Perspektiva však položila pouhé počátky k systematickým úvahám stereometrické povahy, z nichž teprve později vznikla vlastní stereometrie. Ještě *Platón* káral Řeky v VII. knize svých „Zákonů" pro jejich nevědomost ve vyměřování všeho, co má délku, šířku a hloubku. Tento nedostatek sám Platón a jeho současníci do značné míry napravili.

Starořecká stereometrie této doby se mnoho zabývala pravidelnými tělesy, ale již předtím škola pythagorovců znala (ovšem více méně empiricky) krychli, pravidelný čtyřstěn a dvanáctistěn. Pravidelný dvanáctistěn byl znám už středoitalským Etruskům, kteří mu přisuzovali mystický význam. Seznámili se s ním patrně z tvaru krystalů pyritu, který se hojně vyskytuje v severní Itálii. Odtud pronikla znalost pravidelného dvanáctistěnu až do jižní Itálie, kde jej poznala i pythagorejská škola. Pravidelný osmistěn a dvacetistěn byly objeveny až později.

Platón učinil nauku o pravidelných tělesech součástí svého idealistického světového názoru. Podle něho se oheň skládal ze čtyř-

stěnů, vzduch z osmistěnů, voda z dvanáctistěnů a země z krychlí; obrys světa pak tvořil dvacetistěn. Proto se pravidelná tělesa nazývají někdy tělesy platónskými.

Euklides se zabýval stereometrií již zcela systematicky a znal takřka všechny věty, které naše školní stereometrie obsahuje. Studoval i nauku o „vrcholech" (trojhranech), čili, jak se dlouho říkalo, nauku o prostorových úhlech.

Prostorové vztahy mezi přímkami, respektive mezi přímkami a rovinami studovali úspěšně francouzští matematikové *Legendre* a *Cauchy*. Legendre se v podstatě první zabýval mimoběžkami.

Vztahy mezi počtem vrcholů, hran a stěn u mnohostěnů byly zkoumány již ve starověku. *Euler* studoval mnohostěny, vyhovující větě nazvané jeho jménem, která praví: Počet vrcholů zvětšený o počet stěn se rovná počtu hran zvětšenému o dvě. Dokázal, že mezi takovéto mnohostěny patří především všechny vypuklé (konvexní) mnohostěny. Mnohostěny, pro něž platí Eulerova věta, se dnes nazývají eulerovské mnohostěny.

Velmi vhodným prostředkem ke zkoumání geometrických prostorových útvarů je deskriptivní geometrie. Pokusy o zobrazování prostorových jevů v jedné nebo i více rovinách jsou velmi starého data. Půdorys a nárys byly známy už babylónským i egyptským stavitelům, jak tomu nasvědčují vyobrazení dochovaná z nejstarších dob.

Rovněž římští zeměměřiči (agrimensoři) používali v široké míře při sestrojování plánů svých staveb různých průmětů. Nejznámější je *Vitruvius*, římský stavitel z doby kolem počátku našeho letopočtu. Metody půdorysu a nárysu odděleného osou v podstatě už užíval německý malíř *Albrecht Dürer*, geometr *Daniel Schwenter* aj.

Základ vědeckého pojetí deskriptivní geometrie položil francouzský matematik *Gaspard Monge* (XVIII. až XIX. století), který svými pracemi a přednáškami zvláště z doby Velké francouzské revoluce uvedl tuto nauku mezi matematické disciplíny. Od té doby přispěla deskriptivní geometrie k rozšíření znalostí prostorových útvarů a současně se stala i nepostradatelnou pomůckou každého technika.

13. OBJEMY

Různé úvahy související s představou objemů těles se objevují již u primitivních národů. Odhadování objemů nádob, prostornosti sýpek, odhadování materiálu potřebného k výstavbě obydlí apod., to byly první podněty tohoto druhu. Nejstarší objemové míry svědčí o tom, že byly odvozeny z pojmů a praktických potřeb chovatelů dobytka a zemědělců. Tak např. dutá míra, zvaná „kravská noha", bývala užívána v některých krajinách Indie, kde kráva byla posvátným zvířetem. Tato jednotka představovala objem, odpovídající objemu otisku kravského kopyta v měkké půdě. Rovněž u Indů se nám dochovaly staré nábožensko-matematické předpisy (Sulvasutras) o rozměrech obětních oltářů zasvěcených různým bohům.

Podle dosud rozřešených nápisů babylónského klínového písma soudíme, že Babylóňané dovedli počítat objemy pevnostních valů s lichoběžníkovým průřezem.

Také v Egyptě se vyvinul určitý druh nauky o objemech z potřeb zemědělství, hlavně ze zjišťování objemů sýpek. Egyptské špýchary měly buď tvar kvádrů s čtvercovou základnou, nebo byly tvaru válcového. Počítání objemů bylo obdobné jako u nás. Z objemu udaného v kubických loktech bylo počítáno, kolik jednotek obilních měr se vejde do sýpky. K tomu se užívalo vztahu: 1 kubický loket = = 1,5 khar; jeden „khar" obsahoval pět měřic obilí.

Úlohy, týkající se výpočtu objemů, které jsou obsaženy v Ahmesově papyru, jsou dvojího druhu; v prvních se z rozměrů sýpky počítalo množství obilí, které v ní lze uskladnit, ve druhých se z množství obilí soudilo na rozměry sýpky. Jedna taková úloha zní takto:

„Příklad na propočítání čtyřrohé obilní sýpky, která je 10 loket dlouhá, 10 loket vysoká a 10 loket široká. Jaké množství zrna se tam vejde? Násob 100 desíti, to je 1000. Vezmi polovinu, to je 500, dostaneš 1500; to jest objem v „kharech". Musíš vzíti $\frac{1}{20}$, to jest 75. Objem je tedy 7500 měřic."

V Ahmesově papyru se řeší také obrácená úloha: „Do obilní sýpky se vejde 7500 měřic obilí. Jaké jsou její rozměry? Vezmi 75

a násob dvaceti, dostaneš 1500. Počítej s 1500; musíš z toho vzít desetinu — totiž 150; desetinu z desetiny, totiž 15; dvě třetiny desetiny z desetiny, totiž 10. Rozměry jsou tedy 10 : 10 : 10."

Návod k výpočtu objemu komolého jehlanu papyrus Ahmesův už neobsahuje. Zato Moskevský papyrus, který pochází z téže doby jako papyrus Ahmesův, dává i správný návod pro výpočet objemu komolého jehlanu.

Zakladatel filosofického směru, zvaného atomismus, učitel ataraxie (dokonalého duševního klidu) *Demokritos* (V.—VI. století př. n. l.) zjistil jako první, že objem jehlanu se rovná třetině objemu hranolu o stejné podstavě a téže výšce. Přesný důkaz této věty byl podán až později; podle svědectví Archimédova tak učinil *Eudoxos z Knidu*.

V Euklidových Elementech — jak už bylo řečeno — nejsou uvedeny žádné návody pro výpočty objemů geometrických těles. Najdeme zde pouze věty, v nichž se objemy různých těles porovnávají. Tak se dovídáme, že hranoly o stejně velkých podstavách a stejných výškách mají týž objem, nebo že poměry objemů hranolů stejných výšek jsou rovny poměrům obsahů podstav apod.

Pravidla pro počítání objemů nacházíme ve spise „Metrica", který napsal *Herón z Alexandrie* (asi r. 100 př. n. l.). Herón tehdy shromáždil všechny dosavadní poznatky řeckých i egyptských matematiků z tohoto oboru.

Povrch a objem koule počítá *Archimédes*; již *Euklides* zná však jednu větu o objemu koule: „Koule jsou v trojnásobném poměru jejich poloměrů", což v naší matematické mluvě znamená: Poměry objemů koulí se rovnají poměrům třetích mocnin jejich poloměrů.

Odvození pravidel pro výpočet povrchu a objemu koule je jedním z nejkrásnějších úspěchů Archimédova matematického génia. Archimédes vyslovuje tyto poučky v dvojí formě: Zaprvé říká, že objemy a povrchy koule a jí opsaného válce jsou v poměru 2 : 3, zadruhé dokazuje, že objem koule je čtyřikrát větší než objem kužele s podstavou rovnou největšímu kruhu koule a výškou rovnající se poloměru koule; povrch koule je čtyřikrát větší než obsah největšího kruhu. Odtud plyne, že kužel, polokoule a válec o stejných základnách a stejných výškách mají objemy v poměru 1 : 2 : 3.

Sám Archimédes tento svůj objev považoval za tak významný, že žádal, aby obraz koule s opsaným válcem a vepsaným kuželem byl vyryt na jeho náhrobku. Když za 100 let po smrti Archimédově navštívil Cicero jako římský kvestor Syrakusy, našel podle tohoto vyobrazení Archimédův hrob na hřbitově. Podobný obraz byl též ražen na mincích města Syrakus.

Pomůcky k zjišťování objemů a povrchů nepravidelných těles uvádí již *Herón*. Radí ponořit zkoumané těleso do vody a změřit množství vytlačené vody. Jiný způsob určení objemu takového tělesa spočívá v tom, že se těleso vpraví do jílu, celek se upraví do formy kvádru objemu V_1, pak se těleso vyjme a zbylá hlína se opět zformuje do menšího kvádru objemu V_2. Rozdíl $V_1 - V_2$ je hledaný objem. K změření určitého povrchu doporučuje Herón zavinutí tělesa do vhodného materiálu (např. látky), jehož plocha se potom změří.

Podobné metody se znova objevují v pozdějších spisech, např. u *Leonarda Pisánského* v Liber Abaci (1228), u francouzského geometra *Pierre Varignona* v XVII. století a u *J. Fr. Penthera* počátkem XVIII. století.

Později byly ovšem nalezeny mnohem vhodnější metody pro vyšetřování objemů.

Je to především princip *Cavalieriho*, který zní takto: Dvě tělesa $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ mají týž objem, jestliže mají tyto dvě vlastnosti: a) Každá rovina rovnoběžná s určitou rovinou a protínající jedno z těles, protíná i těleso druhé, b) obě průsečné plochy každé takové roviny s tělesy $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ mají vždy týž obsah.

Bonaventura Cavalieri, jenž byl profesorem matematiky na slavné boloňské universitě v XVII. století, nevyslovil však tento svůj princip tak přesně, jak je výše formulován. Hlavní příčinou tu byl silný reumatismus, jímž po celý svůj život velice trpěl. To mu bránilo, aby své myšlenky podrobně rozvedl. Jak sám přiznává, neměl prý k tomu trpělivosti.

Nejasná Cavalieriho formulace byla však důvodem, že jeho princip nebyl dostatečně oceněn a byl docela i napadán, mimo jiné také matematikem *Guldinem*. Cavalieriho princip platí i pro obsah rovinných obrazců, nahradíme-li tu rovnost obsahů shodností

rovnoběžných úseček. Guldin mezi jiným namítá, že z této rovinné interpretace Cavalieriho principu by mohl plynout následující falešný závěr: „Jestliže v trojúhelníku *ABC* sestrojíme výšku *BD*, která nám dělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, pak lze ke každé rovnoběžce *MN* s *BD* v trojúhelníku *ABD* sestrojit v trojúhelníku *BCD* rovnoběžku *PQ* stejně dlouhou. Oba trojúhelníky *ABD* a *CBD* měly by tedy mít podle principu Cavalieriho stejný obsah." (Kde asi je v této úvaze chyba?)

Objemy rotačních těles se zabýval již *Archimédes*. Obecné pravidlo pro výpočet objemů těchto těles vyslovil ke konci třetího století n. l. *Pappos z Alexandrie*, který poznal, že objem rotačního tělesa se vypočítává jako součin dráhy těžiště a obsahu rotujícího obrazce. Tato věta byla však později zapomenuta. Znovu ji objevil po více než 13 stoletích slavný pražský hvězdář *Kepler* (XVI. až XVII. století) a také jí použil k výpočtu objemů různých rotačních těles, mezi jiným i k výpočtu objemů sudů. Dnes nazýváme tuto větu Guldinovým pravidlem, třebaže ho Guldin ani neobjevil, ani nedokázal.

Tyto vyšetřovací metody a pravidla zjišťování objemů (a také obsahů) byly stále zobecňovány, až vedly k metodám diferenciálního a integrálního počtu, který ve druhé polovině XVII. století současně vynalezl německý matematik a filosof *Gottfried Wilhelm Leibniz* a anglický fyzik a matematik *Isaac Newton*. Metody tohoto počtu spočívají na pojmu limity a umožnily matematikům obecně a pohodlně počítat nejen obsahy a objemy, ale i délky rozmanitých čar. Integrální a diferenciální počet našel pak nejširší využití v technické praxi.

14. GONIOMETRIE A TRIGONOMETRIE

Slovo trigonometrie je původu řeckého a znamená v doslovném překladu měření trojúhelníka. Slovo goniometrie znamená měření úhlu.

Úloha „měření trojúhelníka" čili jak dnes říkáme řešení trojúhelníka, tj. určení jeho stran a úhlů ze tří daných prvků, tvořila

od nejstarších dob základ praktických aplikací trigonometrie. Podobně jako jiné vědy, vyrostla i trigonometrie z lidské práce při procesech řešení konkrétních praktických úloh. Počátky rozvíjení trigonometrie jsou těsně spojeny s vývojem astronomie, jedné z nejstarších věd, která vznikla především z potřeby sestavit správný kalendář. Dalším důležitým činitelem pro rozvoj astronomie a s ní spojené trigonometrie byly rostoucí požadavky rychle se rozvíjejícího mořeplavectví. Důležitou úlohou při plavbě bylo správné určování kursu lodí na širém moři podle polohy těles nebeských. Rovněž sestavování přesných zeměpisných map a určování vzdáleností na povrchu zemském, dále některé rozsáhlé stavební úkoly a zvláště stavby mešit, které musely být orientovány směrem k Mekce, byly významnými činiteli v rozvoji trigonometrie. Orientace mešit nebyla nikterak snadnou úlohou v rozlehlé kalifově říši, neboť sahala od krajů střední Asie až na poloostrov Pyrenejský.

Jisté náznaky trigonometrických vědomostí se vyskytují v některých úvahách v Ahmesově papyru. Bylo jich používáno při stavbě pyramid. První počátky trigonometrie poznali Řekové u Chaldejců a Babylóňanů. Řecký dějepisec Hérodot v V. století př. n. l. vypravuje, že sluneční hodiny, gnómon a rozdělení dne na dvanáct hodin převzali Řekové od Babylóňanů.

Po tažení Alexandrově (356—323 př. n. l.) do Asie poznali Řekové blíže chaldejsko-babylónskou astronomii a s ní souvisící trigonometrické znalosti. Tam také poznali dělení kruhu na 360 dílů, přičemž středové úhly jsou jednotkami pro měření úhlů (tj. stupně).

Základní význam pro vývoj trigonometrie v období jejího zrodu měly práce starořeckého astronoma *Hipparcha* (II. století př. n. l.). Práce Hipparchovy se však nedochovaly. Podle některých zpráv napsal 12 knih o počítání tětiv. Z komentářů pozdějších autorů — zvláště Claudia Ptolemaia — soudíme, že Hipparchos sestavil tabulky, které vyjadřovaly délky tětiv příslušejících různým středovým úhlům v kružnici daného poloměru. V podstatě to byly tabulky dvojnásobků sinů polovin středových úhlů.

Také řecký matematik *Menelaos z Alexandrie* (kolem r. 100 n. l.) napsal rozsáhlé dílo o počítání s tětivami. Z tohoto spisu známe

pouze část jednající o tzv. sférické trigonometrii (tj. trigonometrii trojúhelníků na kouli), která byla hodně pěstována pro účely astronomie.

Menelaovo dílo mělo velký vliv na práci *Claudia Ptolemaia* (II. století n. l.), který napsal spis zvaný „Megalé syntaxis" (arabsky zvaný Almagest, tj. Velká skladba). Tím uzavřel dílo Hipparchovo a Menelaovo. Almagest bylo velmi dokonalé dílo, které nebylo po tisíciletí předstiženo. Ve třinácti knihách obsahuje kromě trigonometrie i celou Ptolemaiovu astronomickou soustavu.

Základ Ptolemaiových výpočtů tvoří věta: „Obdélník, sestrojený z úhlopříček čtyřúhelníka vepsaného do kružnice, rovná se součtu obdélníků sestrojených z protilehlých stran tohoto čtyřúhelníka." Tuto větu nazýváme dnes větou Ptolemaiovou, třebaže byla známa již Hipparchovi. Na jejím podkladě vypočítal Ptolemaios ze známých tětiv dvou úhlů tětivu součtu, polovičního rozdílu a dvojnásobku těchto úhlů. Vcelku tedy dospěl k obdobným výsledkům, jaké dnes vyjadřujeme vzorcem pro sinus součtu nebo rozdílu dvou úhlů a vzorcem pro sinus dvojnásobného a polovičního úhlu.

Ptolemaiovu trigonometrii, založenou na počítání délek tětiv středových úhlů, nazýváme dnes „trigonometrií celotětivovou".

Hlavním předmětem zájmů Hipparchových, Menelaových i Ptolemaiových byla trigonometrie útvarů na kouli, čili trigonometrie sférická. Rovinnou trigonometrii pěstovali pouze jako pomocnou vědu pro výpočty tabulek tětiv a k dokazování vět trigonometrie sférické.

Vnitřní rozpory starořeckého otrokářského řádu, dobytí Řecka Římem a řada dalších příčin vedly postupně k úpadku helénské kultury. To se projevuje i v historii matematiky. Po Ptolemaiovi už nedocílili alexandrijští vědci v trigonometrii žádných podstatných objevů. Další vývoj trigonometrie, podobně jako vývoj ostatních matematických vědních oborů, je zprvu spojen s rozvojem matematické kultury národů obývajících Indii, země Zakaspické a země Blízkého Východu. Později se přenáší na národy, sídlící na severoafrickém pobřeží, Pyrenejském poloostrově a konečně i na národy evropské.

V období V. až XII. století n. l. převzali v trigonometrii vedoucí roli Indové. Na rozdíl od Řeků začali užívat při výpočtech ne už celou tětivu odpovídající středovému úhlu, nýbrž její polovinu, tj. dnešní sinus příslušného úhlu. Celou tětivu nazývali Indové „dživa", což znamenalo tětivu loveckého luku. Vycházeli tedy při pojmenování této funkce z obdoby obrazu luku s tětivou s obrazem oblouku kružnice a příslušnou tětivou. Při překládání indických spisů do arabštiny a později z arabštiny do latiny byl však původní smysl tohoto pojmenování překroucen a nakonec se ve vědecké mluvě zakořenil latinský název sinus, značící v doslovném překladu prohloubení.

Nejstarší dochované indické astronomické spisy napsal *Aryabhata* (nar. 476 n. l.). V nich nacházíme v podstatě úplnou trigonometrii funkce sinus.

Indové zavedli také funkci cosinus a znali vzorec $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Dále uměli už i vzorce pro funkce součtu a rozdílu dvou úhlů. Indický matematik *Bhaskara* (XII. století) dosahuje již v trigonometrických výpočtech velmi značné přesnosti. Nachází např. pro sinus 3°45′ hodnotu $\frac{100}{1529}$ a pro cosinus téhož úhlu hodnotu $\frac{466}{467}$. Tato čísla se liší od přesných o méně než 0,000 000 01 poloměru.

Podobně jako v jiných oborech matematiky, také v trigonometrii přebírali velmi brzy indické poznatky vědci středoasijských zemí, zvláště vědci žijící na území nynější Tadžické a Uzbecké SSR a vědci arabští na rozsáhlém území tehdejšího arabského kalifátu.

Ve střední Asii se rozvíjela matematika spolu se zeměpisem a astronomií. Měla aritmetický charakter a byla zaměřena na řešení praktických úloh ze zeměměřictví. Přesto středoasijští vědci vybudovali trigonometrii jako zvláštní matematickou disciplínu. Mezi mnoha jejich úspěchy musíme si zvláště všimnout zavedení všech šesti goniometrických funkcí, z nichž Indové znali jenom dvě.

Syrský astronom *Albattani* (zemřel r. 929 n. l.) zavedl na základě pozorování výšky slunce pomocí vertikální tyče a jejího stínu funkci, kterou dnes nazýváme cotangens a vytvořil tabulku hodnot pro úhly rostoucí vždy po 1°. Astronom *Abu'Lvafa* (X. století) sestavil

tabulku hodnot funkce tangens, tj. vypočítal délku stínu vrženého horizontální tyčí určité délky ($a = 60$) na vertikální stěnu.

Názvy „tangens" (doslovně tečna) a „cotangens" pocházejí z latinského jazyka a objevily se v Evropě teprve v XVI. a XVII. století. Středoasijští vědci označovali příslušné úsečky názvy „stíny"; cotangenta byl „první stín", tangenta „druhý stín".

Abu'Lvafa vyjadřoval vztahy mezi goniometrickými funkcemi slovy. Ve svých úvahách často předpokládal, že poloměr kruhu je 1. Tento zvláště důležitý případ byl zkoumán evropskými vědci o 300 let později.

Velmi významných úspěchů v oblasti užití trigonometrie, zvláště v astronomii, dosáhl uzbecký sultán a slavný astronom *Ulugbek* (XV. století), který byl hvězdářem na největší tehdejší observatoři v Samarkandu (nynější Mordvinská sovětská autonomní republika).

Vrcholných výsledků dosáhli středoasijští vědci v oboru sférické trigonometrie, která zkoumá trojúhelníky omezené oblouky hlavních kružnic na povrchu koule. Zde si největších zásluh vydobyl azerbájdžánský astronom a matematik *Nasir-eddin* (XIII. století) z města Tusi, které tehdy bylo významným střediskem tadžické kultury. Nasir-eddin napsal úplnou samostatnou učebnici rovinné i sférické trigonometrie.

V Evropě po pádu římské říše nastal naprostý kulturní úpadek. Vědecká činnost se omezovala na neplodné scholastické spekulace, které zabraňovaly rozvinutí skutečných věd. Teprve vznik městské kultury a rozvoj obchodních i peněžních vztahů uvnitř feudálního hospodářství začal postupně oživovat vědy a umění.

V období obchodních cest a křižáckých výprav se Evropané seznámili nejen s výsledky východních kultur, ale i s kulturními poklady dávno zapomenutého antického světa, především starověkého Řecka. To všechno bylo silným popudem k samostatnému vědeckému tvoření. Jedny z prvních úspěchů na evropské půdě zaznamenala právě trigonometrie.

Německý vědec *Johannes Müller*, řečený *Regiomontanus* (XV. století) napsal traktát o pěti knihách, který nazval „De triangulis omnimodis" (O trojúhelnících všech druhů). V tomto díle vykládá Regiomontanus trigonometrii jako samostatnou vědu, nezávislou

na astronomii, a zavádí funkci tangens do té doby v Evropě neznámou. Při počítání hodnot sinů a tangent předpokládá Regiomontanus, že poloměr kruhu je 10 000 nebo i 10 000 000. Vyjadřuje tedy v podstatě hodnoty goniometrických funkcí v desetinných zlomcích a upouští už od výpočtů v soustavě šedesátkové.

Další pokrok v trigonometrii učinil slavný polský hvězdář *Mikuláš Kopernik* (XV. až XVI. století) ve slavném spise „De revolutionibus orbium coelestium" (O pohybech těles nebeských).

Roku 1637 vyšel spis „Discours de la méthode" (Rozprava o metodě), který napsal francouzský matematik a filosof *René Descartes*. Jedna z kapitol tohoto spisu, nazvaná „Geometrie", zavádí nový analytický způsob studia geometrických útvarů pomocí souřadnic. V důsledku toho se brzy objevuje i grafické znázorňování goniometrických funkcí. Různí matematikové sestrojují během XVII. století jejich grafy, a to v jednom nebo ve dvou kvadrantech. *Isaac Barow* sestrojil roku 1674 graf sinu, sekanty a tangenty v prvním kvadrantu. Periodicita goniometrických funkcí se objevuje v grafickém vyjádření teprve začátkem XVIII. století.

Francouzský algebraik *François Viète* (XVI. století) odvodil vzorce, které vyjadřují $\sin m\alpha$ a $\cos m\alpha$ pomocí cosinu a sinu úhlu α. Dále použil goniometrických formulí při řešení rovnic 3. stupně v případě, že rovnice má tři reálné kořeny. V tom případě totiž se tyto kořeny nedají vyjádřit pomocí reálných výrazů z koeficientů rovnice.

Goniometrické vzorce prodělaly zvláštní vývoj, který úzce souvisí s vývojem numerického počítání. Před vynalezením logaritmů bylo počítání součinů a podílů poměrně obtížné, zatímco se sčítání a odčítání provádělo snadněji. Proto také se ve vzorcích pro goniometrické funkce projevovala snaha počítat se součty a rozdíly funkcí. Stoupencem této metody byl zvláště pražský astronom a vynálezce logaritmů *Joost Bürgi* (XVI. až XVII. století). Obtížné numerické výpočty s goniometrickými funkcemi byly pro všechny počtáře důrazným podnětem k hledání prostředku, který by odstranil potíže počítání. To nakonec vedlo k vynalezení logaritmů. Po tomto objevu zvítězila pak snaha převádět výpočty s goniomet-

rickými funkcemi na součiny, které se pomocí logaritmů už snadněji počítaly.

Slavný švýcarský matematik *Leonard Euler* (XVIII. století) dal trigonometrii nynější formu. Dříve byly goniometrické funkce definovány na základě kružnice, jejíž poloměr byl od XII. století nazýván sinus totus (úplný sinus). Mnohem později Kopernikův žák *Georg Joachim Rhäticus* (XVI. století) vyšel při definici goniometrických funkcí z pravoúhlého trojúhelníka, přičemž přepona byla poloměrem kružnice, na níž se měřily příslušné oblouky. Tento poloměr se pak stále opakoval ve výpočtech, což bylo na úkor jejich přehlednosti. Teprve Euler zavedl důsledně jednotkový poloměr.

Ve své práci „Úvod do analysy" (1748) vybudoval Euler trigonometrii jako vědu o goniometrických funkcích. Dal jí analytický výklad tím, že odvodil celý souhrn goniometrických vzorců z několika základních vztahů. Další velkou zásluhou Eulerovou je stanovení vhodné symboliky. Zavedl označení stran trojúhelníka malými písmeny latinské abecedy, jim protilehlé úhly označil odpovídajícími písmeny velké abecedy. Tak trigonometrické funkce nabyly pro trojúhelník tvaru, který umožnil výhodnou cyklickou záměnu. Značným zjednodušením bylo i označení goniometrických funkcí úhlu zkratkami, jako např. $\sin Z$, $\operatorname{tang} Z$, $\cos Z$ atd.

Euler nalezl též souvislost goniometrických funkcí s imaginární jednotkou a stanovil pravidlo pro určování znamének funkcí v jednotlivých kvadrantech. Tím zabránil mnohým chybám, jichž se dříve dopouštěli autoři ve většině matematických učebnic při výkladu trigonometrie.

Vzorec $a = 2r \sin \alpha$ zná už *Bráhmagupta* (VI. století n. l.). Ptolemaios zná obdobný vzorec v trigonometrii celotětivové. Sinovou větu nacházíme ve spisech *Nasir-eddinových*, byla však známa již dříve. Větu kosinovou v trigonometrické podobě uvádí *Viète*, stejně i větu tangentovou, kterou však objevil *Thomas Fink* o deset let dříve. Období rozkvětu holandské matematiky v XVI. století působí velmi příznivě také na vývoj a praktické užití trigonometrie. Matematik *Villebrord Snellius* řeší roku 1617 úlohu protínání zpět. *Karl Friedrich Gauss* řeší tento problém roku 1850 metodami

analytické geometrie. Rovněž tzv. Hansenovu úlohu (tj. úlohu, jak stanovit ve čtyřúhelníku $ABCD$ stranu DC, je-li změřena strana AB a úhly ACB, ACD a BDC, ADB) řešil poprvé Snellius r. 1617. Současně provedl i její podrobný rozbor. *Peter Hansen* (XIX. století) řešil už tuto úlohu prostředky analytické geometrie.

Trigonometrie přispěla svými početními prostředky k poznání skutečných rozměrů zeměkoule a rozmnožila astronomické poznatky. Francouzský lékař a matematik *Jean Fernel* změřil v prvých letech XVI. století délku jednoho poledníkového stupně, a to mezi Paříží a Amiensem. Měření provedl na základě počtu otáček kola vozu, v němž cestoval po přímé cestě mezi oběma místy. Ze získaného výsledku pak vypočítal délku celého poledníku tak přesně, že jím nalezená délka se lišila od skutečné délky meridiánu jen o 40 km.

Skutečně vědecké měření části poledníku provedl Villebrord Snellius v roce 1614 způsobem, který se používá i dnes a nazývá se triangulací. Vyšel přitom ze základny dlouhé 87 rýnských prutů (asi 326 m) a vhodným skládáním trojúhelníků dospěl k změření vzdálenosti mezi dvěma body téhož poledníku. Odtud vypočítal délku kvadrantu zemského, která by v dnešních délkových měrách činila 10 004 km.

Významné trigonometrické proměřování části zemského poledníku bylo provedeno ke konci XVII. století, kdy byla změřena část poledníku mezi Dunquerkem a Barcelonou. Měření se účastnila řada francouzských vědců, zvláště astronom *Pierre François André Méchain* a *Jean Babtiste Jos. Delambre*. Z výsledků tohoto měření byla pak vypočtena délka jednoho stupně a délka čtvrtpoledníku zemského. Měření bylo prováděno v tehdejší francouzské míře „tois" (1,949 m). Desetimilióntá část čtvrtiny zemského poledníku byla nazvána „mètre" (metr) a zavedena jako zákonná jednotka délkové míry ve Francii a později i ve většině ostatních civilizovaných zemí.

Další rozsáhlé proměřování poledníku bylo uskutečněno v letech 1817—1852 v Rusku. Řídil je *Bedřich Jiří Vilém Struve*, ředitel hvězdárny v Pulkově u Petrohradu. Měřena byla část poledníku sahající od ústí Dunaje až k Severnímu ledovému moři v rozsahu asi 25° a délce 2880 km. Byla provedena řada jiných rozsáhlých

měření poledníků v Evropě, v Africe a jinde, a získané výsledky byly doplněny sítí měření podle rovnoběžek. Z těchto prací je nejdůležitější měření podél 51. rovnoběžky mezi Irskem a Uralem, které bylo provedeno na popud již jmenovaného ruského astronoma Struveho v šedesátých letech minulého století a obsáhlo 69°. Za základ mu sloužily triangulační sítě anglické, belgické, pruské a ruské.

V.

STRUČNÝ PŘEHLED DĚJIN ČESKÉ A SLOVENSKÉ MATEMATIKY

1. ÚVOD

Početní pojmy a geometrické vztahy byly v Čechách známy a užívány ve stejné době a stejnou měrou jako u národů sousedních. Živý obchodní styk na křižovatce tradičních kupeckých cest mezi mořem Středozemním a Baltským a mezi oblastí románsko-germánskou na západě a slovanskou na východě vyžadoval znalostí peněz, měr, vah i jednotlivých početních výkonů jistě stejně, jako je měli kupci italští či němečtí.

Naši předkové se především věnovali polnímu hospodaření, pro které našli vhodné přírodní podmínky v úrodných údolích řek i v mírném podnebí. Bylo přitom třeba upravovat sousedské vztahy, ohraničit majetky. Vznikaly nároky městských práv, povinnosti poddaných vůči pánům i státu. Prvotní hrubý odhad výměry půdy byl nahrazován zprvu méně přesným měřením, později však požadavky na přesnost vyměřování půdy stále vzrůstaly. Rozměřovala se půda nejen při „vysazování" (zakládání) osad, ale i při kontrolování rozloh již osídlených, ale nespolehlivě vyměřených.

Tyto okolnosti způsobily, že zeměměřictví se stalo poměrně záhy významným činitelem v českém veřejném životě a po staletí se vyvíjelo vedle matematiky, pěstované na školách, později i na universitě. Zásluhu o to měli praktičtí zeměměřiči, o které nebyla v našem národě nouze. Někteří z nich uložili své vědění a zkušenosti ve spisech, poučujících nejen o stavu měr tehdy v Čechách

užívaných, ale i o stupni vědomostí geometrických a současných požadavcích kladených na přesnost při vyměřování půdy.

Geometrické vědomosti se uplatňovaly dosti brzy ve stavitelských i jiných výtvarných dílech našich předků. Spytihněvův kostel v Budči (kolem roku 900) a stejně i rotunda sv. Martina na Vyšehradě, vystavěná v desátém století, má půdorys kruhový, který je dveřmi a okny dělen na 4, respektive 8 dílů.

V malířských dílech z XI. století, jakož i v pracích století následujících, nacházíme ve stále rostoucím rozsahu určité prvky perspektivního zobrazení.

Je velmi pravděpodobné, že se některým matematickým poznatkům učilo už na škole, založené knížetem Spytihněvem (asi 894—905) při kostele sv. Petra a Pavla v Budči. Škola vychovávala synky z předních rodů a připravovala i na povolání kněžské. Základní aritmetické a astronomické vědomosti byly potřebné při stanovení dat pohyblivých svátků, což byl úkol prvořadé důležitosti.

Podle vzoru budečské školy byly potom zakládány i školy další. Velké proslulosti nabyla škola při kapitule sv. Víta, kde bylo zřízeno tzv. „studium generale minor" (tj. menší obecné učení). Král Václav II. pomýšlel i na jeho přeměnu na „studium generale major" (tj. větší obecné učení), čili na zřízení university. Záměr se nezdařil pro odpor panstva, které nepřálo šíření vzdělanosti mezi lidem, hlavně z obavy ze ztráty moci, kterou by pak nabylo duchovenstvo ovládající školství. Přesto však okolnost, že se ke konci XIII. století již mohlo uvažovat o zřízení university v Praze, svědčí o tehdejší naší vynikající kulturní úrovni.

Znalost matematických vědomostí, jaké na latinských školách dosahovali čeští vzdělanci, odpovídala současnému stavu vědomostí ve střední Evropě. Obor obecně užívaných přirozených čísel sahal asi do miliónu a zápis čísel se prováděl číslicemi římskými i indickými. Z početních výkonů se učilo sčítání, odčítání, zdvojování, půlení, násobení a někdy také dělení, přičemž se obvykle používalo abaků (počitadel). Algoritmické počítání bylo méně známé. Také hlubší znalosti počítání se zlomky byly vyhrazeny jen některým počtářům. Bylo též známo sčítání konečného počtu členů aritmetických a geometrických posloupností. V geometrii

byl užíván pojem bodu, čáry, přímky, roviny, plochy, tělesa, trojúhelníka a čtyřúhelníka, kružnice, úhlu, kolmosti, dále hranolu, jehlanu, válce, kužele a koule, a stejně i základní měřické úlohy o obvodech, obsazích a objemech. Elementární měřické úlohy se v praxi uplatňovaly, jak jsme už naznačili, při rozměřování pozemků, zakládání nových osad apod.

2. ROZVOJ ČESKÉ MATEMATIKY OD ZALOŽENÍ PRAŽSKÉ UNIVERSITY

Založením pražské university Zlatou bulou královskou vydanou Karlem IV. dne 7. dubna 1348 se dostává našim zemím vysokého učení (universitas magistrorum et studentium), na němž se co do rozsahu i náplně vyučovalo všechno, čemu se tenkrát učilo na universitě v Paříži (universitas magistrorum) i v Boloni (universitas scholarium). Přednášela se gramatika, rhetorika, dialektika a tak zvané kvadrivium, tj. aritmetika, geometrie, astronomie a múzika. Úroveň přednášek byla velmi vysoká. Němečtí historikové přiznávají, že se na pražské universitě už ve XIV. století přednášely i takové matematické disciplíny, jež se na lipské universitě přednášely teprve v XVI. století.

Vynikajícím učitelem matematiky a horlivým zastáncem mistra Jana Husa byl mistr *Jan Křišťan* z Prachatic (1368—1439). Dochovalo se nám po něm několik matematických rukopisů z doby kolem roku 1400. Svůj statečný postoj vůči církevní hierarchii osvědčil tím, že odmítl číst klatbu, kterou nad Husem vyhlásil papež. Později si také s Husem dopisoval a roku 1415 ho dokonce navštívil v Kostnici.

Především jako hvězdář měl vynikající pověst i za hranicemi naší vlasti *Jan Šindel* (1373 až asi 1450), zvaný též Johannes Pragensis. Předpověděl velké zemětřesení ve Vídni a v Uhrách r. 1443. Jeho spis „Tabulae astronomicae" užíval ještě i slavný astronom *Tycho de Brahe* (1546—1601) a velmi ho cenil.

Svědectvím vyspělé úrovně matematického i astronomického vědění v XV. století je pražský staroměstský orloj. Toto mistrovské

dílo zhotovil královéhradecký rodák *Hanuš*. Dokonalý hodinový stroj svědčí o těsném spojení teoretických i praktických znalostí v oboru matematiky, mechaniky a astronomie tehdejší doby.

V XV. a v prvé polovině XVI. století nastává v našich zemích pokles v pěstování matematických věd. Sociální a náboženské boje husitské jsou středem národního zájmu. Přesto však byly v této době vydány tištěné české lidové učebnice počtů. Je to především spis *Ondřeje Klatovského* z Klatov (nar. asi r. 1504), pocházející z roku 1530 a nazvaný „Nowe knížky wo počztech na Cifrý a na

Obr. 47. Titulní list Klatovského „Nowe knížky wo počztech“

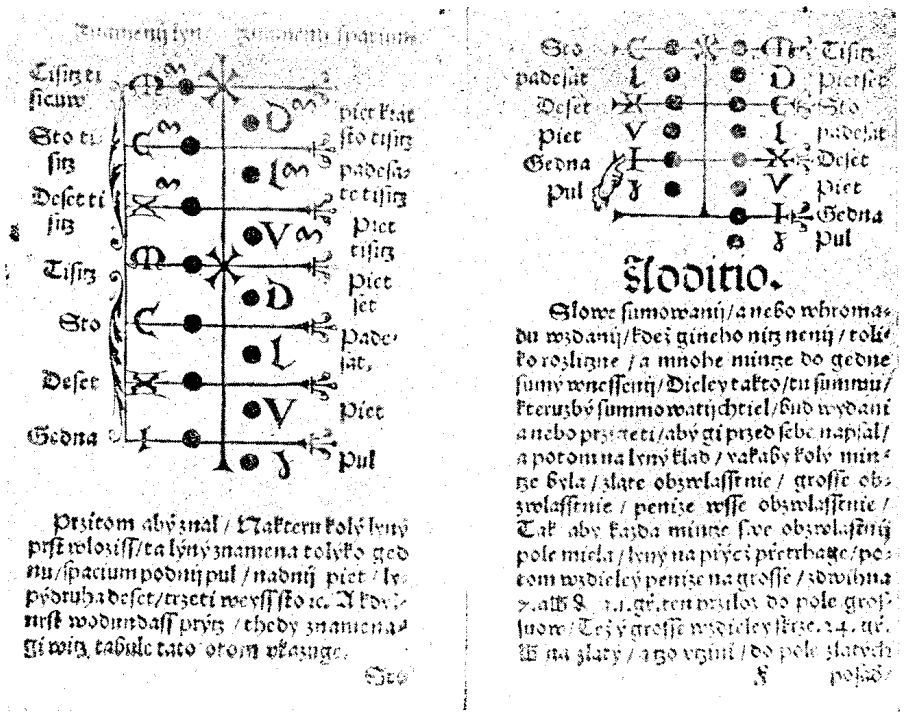
Obr. 48a, b, Ukázky textu z Klatovského „Nových knížek“

lyny, przytom niektere velmi užytečné regule a exempla mintze rozlyczně podle biehu kupetzkeho kratze a užytečznie sebrana“ (obr. 47). Ukázky textu jsou na obr. 48a, b.

V rudolfinské době ke konci XVI. a počátkem XVII. století se stává Praha znovu střediskem matematických a astronomických věd. Zde byly vydány roku 1620 jedny z prvních logaritmických tabulek na světě (viz str. 124) a uveřejněna slavná „Astronomia nova“ pražského hvězdáře *Johanna Keplera* (1571—1630).

Vědcem moderních názorů byl lékař a matematik *Tadeáš Hájek z Hájku* (1525—1600), žák slavného vídeňského matematika *Georga z Peuerbachu*. Hájek byl jedním z nejslavnějších hvězdářů své doby, jak dosvědčuje i jeho velký přítel Tycho de Brahe. O povolání tohoto znamenitého astronoma do Prahy má Hájek velkou zásluhu.

Současníkem Hájkovým, Braheovým a Keplerovým byl i *Martin Bacháček z Nouměřic* (asi 1540—1612), jenž byl pokládán za jednoho



Obr. 48b

z nejučenějších mužů své doby. Profesorem pražské university se stal v roce 1582 a jak bylo tehdy zvykem, přednášel kromě matematiky i astronomii a klasické jazyky. Zavedl významné školské reformy a ujímal se vždy velmi rozhodně českého školství — především universitního.

Národní tragedie, počínající porážkou na Bílé hoře v r. 1620, odráží se i ve vývoji věd matematických a vyvolává v XVII. a v prvé polovině následujícího století znovu jejich velký úpadek. Když se roku 1622 dostává Karlovo vysoké učení pod moc jezuitů (sloučením s jezuitskou akademií), projevuje se v důsledku toho hluboký soumrak ve vědách matematických. Matematice se vyučuje nedbale, není ani vždy jmenován profesor matematiky.

Přesto se i nyní vyskytují vědci, kteří přes tvrdou reakci dovedli vyjádřit své pokrokové mínění. Jedním z nich je *Marcus Marci*

z Kronlandu (1595—1667), lékař, filosof a matematik český. Ve sporu s jezuity se velmi zastával práv university. Přisuzuje se mu prvenství v objevení zákonů, jimiž se řídí pohyb a náraz pružných koulí.

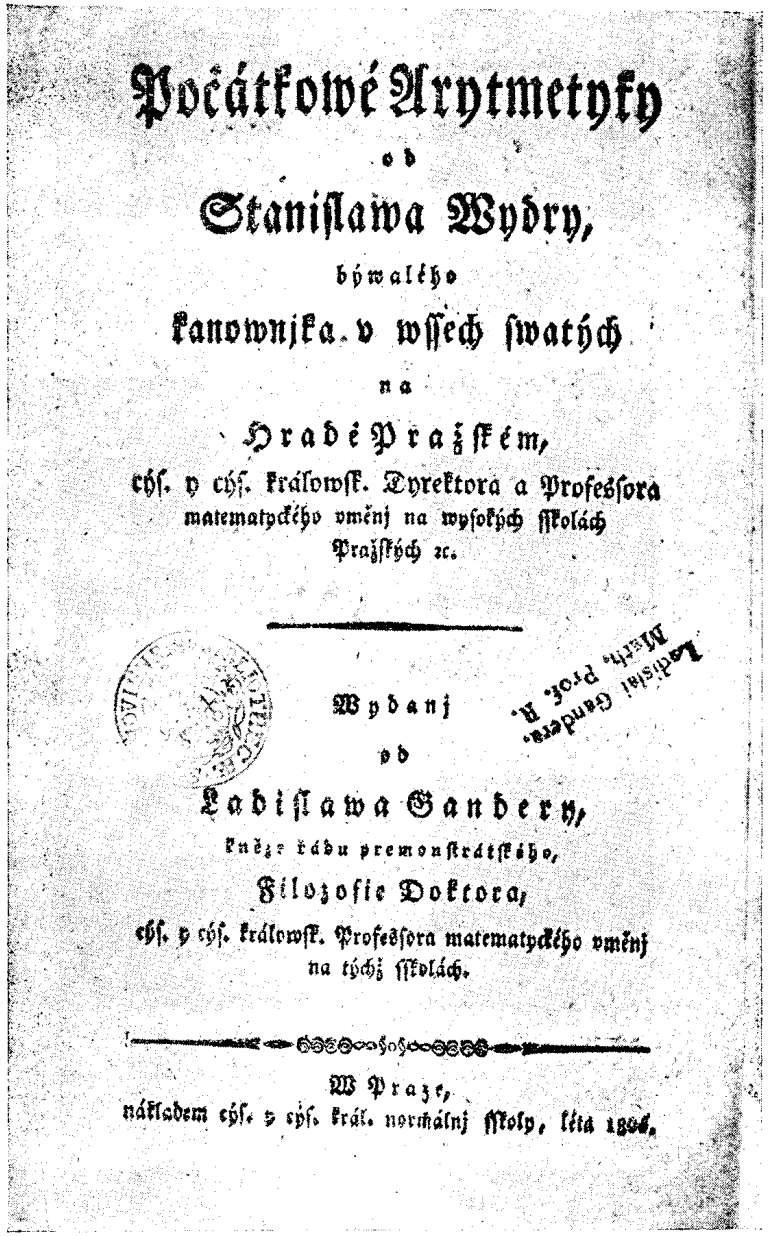
Režim zavedený jezuitským řádem udusil na dlouhá léta pokrok české vědy, mezi jiným i tím, že mnoho našich nadaných lidí bylo vysíláno do cizích zemí. Tak např. působil po dlouhá léta v Cadixu a Madridě český jezuitský matematik *Jakub Kresa* (1648—1715), který byl pro své vědecké práce nazýván „španělským Euklidem". Byl jedním z prvních, kdo se (za svého krátkého pobytu v Praze) zabýval u nás analysou. Zpracoval také trigonometrii na algebraickém a analytickém základě.

Praktickým úkolům zeměměřickým a zvláště měrám zemským je věnován spis *Šimona Podolského z Podolí* (narozen 1562). Svou knížkou přispěl Podolský významně k zavedení jednotných měr v českých zemích.

Počátkem XVIII. století bylo v Praze založeno první technické učiliště na světě. Dne 18. ledna 1707 projevila císařská kancelář česky psaným reskriptem souhlas k české žádosti inženýra *Josefa Willenberga*, aby v Praze byla založena inženýrská škola a stavy zemské vyzvány, aby učinily příslušná opatření k uskutečnění tohoto kroku. Roku 1806 pak bylo toto technické učiliště zásluhou astronoma a matematika *Františka Josefa Gerstnera* přeměněno na „Královské české stavovské učeliště v Praze", kterýžto název byl ve studijním roce 1848—1849 vystřídán názvem „Český stavovský polytechnický ústav v Praze". Honosí se tedy Praha nejen první universitou ve střední Evropě, ale také první inženýrskou školou na světě vůbec a druhou polytechnikou po polytechnice pařížské.

V druhé polovině XVIII. století nastává opět renesance české matematiky i příbuzných vědních oborů. Zásluhou profesora pražské university *Josefa Steplinga* (1716—1778) a s jeho finanční pomocí byla v roce 1751 zřízena hvězdárna na budově Klementina. Když si velký rozvoj věd filosofických a matematických vynutil v roce 1753 zavedení nového studijního řádu, bylo jeho provedení rovněž svěřeno Steplingovi. Stepling napsal řadu spisů a byl jedním z prvních pěstitelů diferenciálního počtu u nás. Jeho spisy

Obr. 49. Stanislav Vydra



Počátkowé Arytmetyky
od
Stanislawa Wydry,
býwalého
kanownika v wssech swatých
na
Hradě Pražském,
cýs. y cýs. králowsk. Tyrektora a Professora
matematyckého vměnj na wysokých sskolách
Pražských ꝛc.

Wydanj
od
Ladislawa Gandery,
kněze řádu premonstrátského,
Filozofie Doktora,
cýs. y cýs. králowsk. Professora matematyckého vměnj
na týchž sskolách.

W Praze,
nákladem cýs. y cýs. král. normálnj sskoly, léta 1806.

Obr. 50. Počátkové arytmetyky

vycházely v „Pojednáních" zprvu soukromé a od roku 1784 veřejné „Královské české společnosti nauk".

Stepling vychoval a do učitelského úřadu uvedl svého žáka *Jana Tesánka* (1728—1788). Podobně jako jeho učitel byl i Tesánek horlivým stoupencem Newtonovým. Jeho náhrobek nese nápis: „Magni Newtoni commentator" (česky: Vykladač velkého Newtona).

Mladším Steplingovým žákem byl *Stanislav Vydra* (1741—1804), který přednášel na pražské universitě elementární matematiku (obr. 49). U Vydry si zvláště ceníme jeho obrozenecké činnosti. Nejlepším dokladem jeho vlasteneckých snah je jeho spis „Počátkové Arytmetyky" (obr. 50), který Vydra diktoval po úplném oslepnutí svým dvěma žákům *Josefu Zieglerovi* a *Janu Dostálovi*. Vydra zde často vyzvedá přednosti českého národa, v jeho době „pomalu z tuhé poroby se probouzejícího".

Z Vydrových žáků nejvíce vynikl *Bernard Bolzano* (na obr. 51) (1781—1848), který předstihl četné své současníky v mnohých matematických oborech, zvláště v abstraktní logice a v nauce o reálných číslech a funkcích. Jeho práce vynikají přesností a kritičností a zaručují Bolzanovi přední místo mezi světovými matematiky.

V šedesátých letech minulého století počíná soustavné pěstování matematiky v českém jazyce. Předpoklady k tomu byly vytvořeny především Vydrovým spisem „Počátkové Arytmetyky" a pak spisem *Vojtěcha Sedláčka* „Základové měřictví čili geometrie" (1822). Prvním středoškolským profesorem, který vyučoval matematice a fyzice česky, byl *Václav Jandečka* (1820—1898). Stalo se tak roku 1849 na gymnasiu v Hradci Králové. Sám Jandečka také psal české učebnice matematiky.

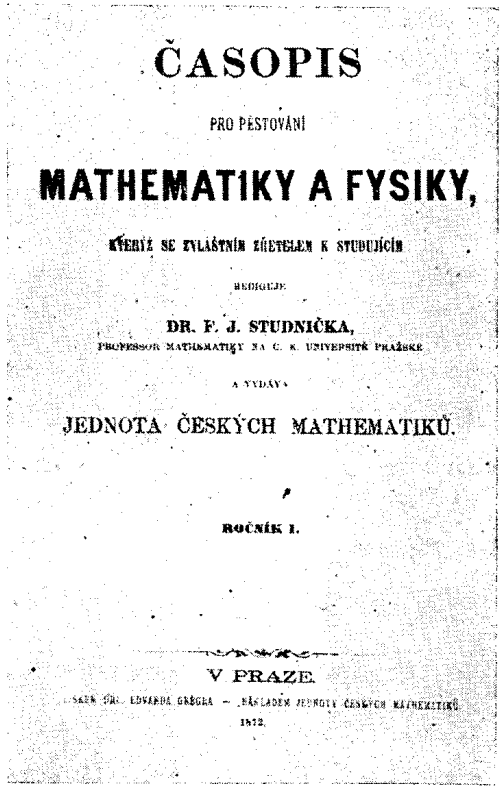
Rozhodný krok kupředu v českých výkladech exaktních věd učinil mladý profesor deskriptivní geometrie na pražské technice, *Rudolf Skuherský* (1828—1863). Ten počal přednášet deskriptivní geometrii česky již ve školním roce 1860—61, třebaže rovnoprávnost českého a německého jazyka byla na pražské technice zavedena až rok po jeho smrti. Druhým profesorem deskriptivní geometrie byl ustanoven *František Tilšer* (1825—1913). Skuherský i Tilšer se stávají zakladateli významné české školy deskriptivní geometrie,

Obr. 51. Bernard Bolzano

z níž později vyšli vynikající čeští geometři: *Karel Pelz* (1845—1908), *Vincenc Jarolímek* (1846—1921), *Bedřich Procházka* (1855—1934), *František Machovec* (1855—1892), *Jan Sobotka* (1862—1931) a mnoho jiných.

Mezi první budovatele české matematické literatury náleží

František Josef Studnička (1836—1903), zprvu profesor matematiky na pražské technice, později po dlouhá léta na pražské universitě, kde již v roce 1871 počal jako první přednášet matematiku česky. Studnička zanechal velmi mnoho spisů z různých oborů matematiky i jiných přírodních věd. Jeho publicistická činnost směřovala především k tomu, aby česká matematická literatura byla opatřena aspoň nejzákladnějšími díly. Tak např. sestavil první obsáhlejší českou učebnici infinitesimálního počtu. Už před ním učinil podobný pokus — třeba značně skromnější — *Václav Šimerka* (1819—1887).


ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATHEMATIKY A FYSIKY,

KTERÝŽ SE ZVLÁŠTNÍM ZŘETELEM K STUDUJÍCÍM

REDIGUJE

DR. F. J. STUDNIČKA,

PROFESSOR MATHEMATIKY NA C. K. UNIVERSITĚ PRAŽSKÉ

A VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

ROČNÍK I.

V PRAZE.

TISKEM PRO EDVARDA GREGRA — NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

1872.

Obr. 52. Titulní list prvního ročníku „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky"

Významným činitelem v rozvoji české matematické literatury a českého matematického života vůbec se stala „*Jednota českých matematiků a fysiků*", která vznikla roku 1869. Jejích předchůdcem byl „*Spolek pro volné přednášky z matematiky a fysiky*", založený roku 1862. Jednota počala v roce 1872 vydávat „*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*" (obr. 52), který byl prvním a po dlouhou dobu také jediným matematickým časopisem v celém Rakousku-Uhersku. Jednota si získala veliké zásluhy vydáváním dobrých školních učebnic matematiky, deskriptivní geometrie i fyziky a popularizací matematicko-fyzikálních věd.

Nové geometrické směry — studium příbuzností a s tím spojené studium křivek — zavedli u nás bratři Emil a Eduard Weyerové. *Emil Weyr* (1848—1894) seznámil českou matematickou obec s projektivní geometrií, sepsal řadu důležitých prací světové úrovně a zasloužil se o proniknutí prací českých matematiků do zahraničí. *Eduard Weyr* (1852—1903) napsal řadu duchaplných příspěvků k algebře, analyse a jiným oborům matematiky. Dlouho nepředstiženým dílem v české matematické literatuře byl jeho spis „Projektivní geometrie základních útvarů prvního řádu". Jeho „Počet diferenciálný" byl po léta dobrou učebnicí matematického dorostu. Významným společným dílem obou bratrů pak byly „Základové vyšší geometrie".

V algebře, teorii čísel a v analyse pracoval velmi úspěšně jeden z největších českých matematiků *Karel Petr* (1868—1950), profesor pražské university. Jeho vysokoškolské učebnice „Počet diferenciální" a „Počet integrální" byly vzorem přesnosti a staly se podkladem studia matematiky pro celou další generaci našich matematiků. Analysou se zabýval i náš další vynikající matematik *Matyáš Lerch* (1860—1922), profesor brněnské university a předtím řádný profesor matematiky na universitě ve Fribourgu ve Švýcařích.

Vedle Petra a Lercha se ovšem může česká matematika pochlubit i mnohými jinými znamenitými matematiky, kteří vykonali obrovský kus vědecké i pedagogické práce. Hitlerovská okupace naší vlasti a násilné uzavření českých vysokých škol sice na nějaký čas velmi ztížily vědeckou i výchovnou činnost našich matematiků, avšak přes veškerý útisk a tyranii ji nedovedly zlomit. Po osvobo-

zení naší vlasti statečnou Sovětskou armádou v roce 1945 se znovu u nás rozrostl vědecký život, a to za mnohem lepších pracovních podmínek, než tomu bylo dříve. Při bývalé „*České akademii věd a umění*" vznikl speciální matematický ústav, který se později změnil v „*Ústřední ústav matematický*" a po založení „*Československé akademie věd*" v roce 1952 se stal její součástí. Současně se mnoho vynikajících českých matematiků stalo členy nově zřízené „Československé akademie věd." Jejími řádnými členy jsou dnes: *Eduard Čech* (*1893), *Vojtěch Jarník* (*1897), *Bohumil Bydžovský* (*1880), *Vladimír Kořínek* (*1899), *Josef Novák* (*1905). Dopisujícími členy jsou *Otakar Borůvka* (*1899), *Miroslav Katětov* (*1918), *Miloš Kössler* (*1884) a *Štefan Schwarz* (*1914).

Matematice, otázkám jejího vyučování a aplikací je v naší republice věnováno několik časopisů. Ze zmíněného již „Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky" vznikl ryze odborný časopis teoretické matematiky, vydávaný Matematickým ústavem Československé akademie věd pod názvem „*Časopis pro pěstování matematiky*". Otázkám fyzikálním jsou věnovány časopisy jiné. Kromě toho vydává Matematický ústav ČSAV pro mezinárodní matematickou veřejnost časopis Чехословацкий математический Журнал (Czechoslovak Mathematical Journal). Časopis je psán ve světových jazycích a každé pojednání je doprovázeno shrnutím (resumé) v dalším světovém jazyku.

Užití matematiky v různých vědních i výrobních oborech je věnován časopis „*Aplikace matematiky*", vydávaný stejným vydavatelem. Většina článků je psána česky, respektive slovensky, články jsou doplněny shrnutími v jazyce ruském a v dalším světovém jazyce. V poslední době jsou některé články psány v cizím jazyce a jsou provázeny dvěma resumé.

Dalším časopisem, věnovaným otázkám matematiky, fyziky a astronomie jsou „*Pokroky matematiky a astronomie*", vydávané Jednotou československých matematiků a fyziků.

Problémy organizace a metodami vyučování matematiky se zabývá časopis „*Matematika ve škole*", vydávaný Státním pedagogickým nakladatelstvím na popud ministerstva školství a kultury.

„*Rozhledy matematicko-fyzikální*" je časopis pro studující a učitele škol všeobecně vzdělávacích i odborných a vydává jej Státní pedagogické nakladatelství z pověření ministerstva školství a kultury.

Otázkám vyučování matematice jsou porůznu věnovány články v „Učitelských novinách" a v měsíčníku „Komenský", který je určen učitelům národních škol.

Studie z historie matematiky a věd příbuzných jsou uveřejňovány ve „Sborníku pro dějiny přírodních věd a techniku", který vychází v nakladatelství Československé akademie věd.

Československá vláda a komunistická strana pozorně sleduje a všestranně podporuje každou vážnou vědeckou činnost. Úspěšné dovršení výstavby socialismu v naší vlasti vyžaduje soustředění všech tvůrčích sil lidu obou našich národů a její zapojení do převratného dění s cílem zajištění maximálního uspokojení stále rostoucích hmotných i kulturních potřeb celé naší společnosti. Československá matematická věda, budující v duchu slavných pokrokových tradic a neodtrhující se od praxe a školského života, nabyla neobyčejné důležitosti v socialistickém zřízení. Není ovšem možno v tomto stručném přehledu podrobně a dokonale vylíčit široký rozmach, který dnes naše matematika prožívá. Pěstují se nejrozmanitější matematické obory, od těch nejabstraktnějších až ke zcela konkrétním, a řeší se otázky vědeckého, školského i ekonomického významu matematiky. Věnuje se velká pozornost historii matematiky — zvláště matematiky československé — a utužuje se přátelství se sovětskými vědci i vědci lidových demokracií. V mnohých matematických disciplínách dobyli českoslovenští matematici tak významných úspěchů, že jsou uznávány celým vědeckým světem.

3. VÝVOJ MATEMATIKY NA SLOVENSKU

I na Slovensku se matematika vyvíjela jako nástroj různých praktických odvětví lidské činnosti a z potřeb školského života. Čilé obchodní styky i drobná řemesla podmiňovala tu odedávna znalost běžných elementárních matematických poznatků.

Těžba kovů a ražení peněz především v Banské Štiavnici

a v Kremnici vyžadovala znalostí praktické aritmetiky a geometrie. Proto také byla záhy založena báňská akademie.

Četná válečná tažení v širých rovinách Uher a Slovenska ukázala potřebu podrobných i přehledných map. To dalo podnět k prvním pokusům o kartografické zachycení těchto rozlehlých prostor. Mapovacích prací se zúčastnilo i hodně rodáků ze Slovenska. Někteří z nich byli geometři z povolání, jiní byli činní jako matematici na vysokých školách, mnozí přímo na území Slovenska.

Významné projekty map slovenské krajiny provedl *Samuel Mikoviny* (1700—1750). Narodil se v Abelové a studoval nejprve v Lučenci, později v Německu. Vedle významných prací kartografických se zabýval i kvadraturou kruhu. Po nějaký čas byl profesorem matematických a fyzikálních věd na báňské škole ve Štiavnici.

Nutným podkladem zdárného mapování byla četná astronomická pozorování, která byla provedena na hvězdárně v Trnavě. Tuto observatoř založil štiavnický rodák, astronom *Maxmilian Hell* (1720—1792). Hell vydával od r. 1757 až do 1786 ve Vídni astronomické tabulky (Ephemerides astronomicae) a v Norsku konal pozorování přechodu hvězdy Venuše přes Slunce. Další hvězdárny na Slovensku byly v Košicích, ve Staré Ďale (nynější Hurbanovo) aj. Světové pověsti dosáhla astronomická observatoř na Skalnatém plese vybudovaná dr. Antonínem Bečvářem a meteorologická observatoř na Lomnickém štítu.

Školská i praktická potřeba vedla řadu slovenských učitelů matematiky k napsání matematických učebnic.

Již roku 1687 vydal v Trnavě profesor tamější university *Henricus Berzeviczi* knihu „Arithmetica practica". Latinsky psané učebnice elementární aritmetiky vydal r. 1753 také *Ignác Hertl*, učitel matematiky v Trnavě a v Košicích.

Nejstarší slovenským jazykem napsanou učebnicí aritmetiky je patrně „Praktica arithmetica", která vyšla v Levoči r. 1729. Jejím autorem byl *Julius Caesar Padvai*.

Liptovský učitel *Martin Raduch* vydal v Prešpurku r. 1776 „Sprostný, ale zřetedlný Traktát Aritmetický pro neumělých, a zwlásste Kupeckého a Sedláckého Stawu lidj sepsaný w dwacjti

třech Tabuljch wtessených obsažený a s mnohau pilnostj a prácý spořádaný".

Prorektor vysoké školy v Kežmarku, *Samuel Augustini ab Hortis* (1729—1792), mineralog a matematik, psal pojednání o algebraických rovnicích.

V pozdější době se stále častěji objevují učebnice a matematické publikace nejrůznějšího druhu. Uveďme zde několik autorů.

Jiří Lešák vydal v Prešpurku r. 1775 lidovou příručku matematiky.

Člen uherské akademie *Vojtěch Bresztyenski* (1786—1851) napsal řadu matematických pojednání.

Profesor na reálce v Levoči *Gustav Kordoš* (1836—1908) uveřejnil metodiku a učebnice měřictví a aritmetiky určené především pro obecné školy. Měřictvím se také zabýval *Ivan Branislav Zoch* (1813—1921), který vydal v Turčanském sv. Martině r. 1873 učebnici „Počiatky názornej merby".

Slovenské učebnice matematiky pro obecné školy napsal i *Jan Györffy* (*1829).

Rozsáhlou činnost učebnicovou vykázal též *Josef Zelliger* (1831 až 1886), ředitel učitelského ústavu v Trnavě.

Autorem učebnic matematiky pro nižší gymnasia je *Martin Čuleň* (1823—1894). Vydával je v letech 1854—1866 ve Skalici. Vybudoval gymnasium v Klášteře pod Znievem, na němž pak byl i ředitelem.

Jan Bežo (1842—1905) psal učebnice matematiky a fyziky pro obecné školy.

V letech 1859—1862 působil na reálce v Košicích jako učitel kreslení také autor českých učebnic geometrie *František Šanda* (1831—1893).

Slovensko se honosí i řadou slavných jmen vědců, kteří buď ze Slovenska pocházejí, nebo zde po nějaký čas působili.

Roku 1576 zemřel v Košicích matematik a astronom *Rhäticus*, vlastním jménem *Georg Joachim von Lauchen* (1514—1576). Byl žákem a přítelem Kopernikovým. Přičinil se o vydání Kopernikova slavného spisu „De revolutionibus orbium coelestium".

R. 1704 se v Prešpurku narodil *Jan Segner*, profesor matematiky a fyziky na různých universitách v Německu. Je velmi znám svým vynálezem vodního mechanismu, nazvaného podle něho Segnerovo kolo. Zemřel v Göttingách r. 1777.

V Banské Štiavnici působil v letech 1847—1848 s titulem báňského rady jako profesor matematiky a mechaniky proslulý fyzik *Christian Doppler* (1803—1854). Přišel sem z pražské techniky. Jeho asistentem a po krátký čas i nástupcem byl významný praktický geometr (geodet) *Karel Kořistka*, který ze Štiavnice odešel r. 1849 na nově vznikající techniku v Brně.

Významné místo v dějinách matematických věd zaujímají rodáci ze Spišské Bělé, bratři *Petzwalové*. Starší *Josef* (1807—1891) působil na universitě ve Vídni, mladší *Oto* (1809—1883) byl učitelem matematiky na průmyslové škole a později profesorem na universitě v Budapešti. Napsal učebnici vyšší matematiky.

Budování samostatného slovenského školství ve svobodném Československu podnítilo bohatou a plodnou činnost také na poli matematiky. Zrodila se řada dobrých učebnic četných matematických disciplín a mnoho vědců starší i mladší generace se podílí na intenzívním studiu různých odvětví matematiky.

V roce 1953 byla zřízena *Slovenská akademie věd*. Jejími řádnými členy z řad matematiků jsou akademici *Juraj Hronec* (*1881) a *Štefan Schwarz* (*1914).

VI.

STRUČNÝ PŘEHLED RUSKÉ A SOVĚTSKÉ MATEMATIKY V DRUHÉM A TŘETÍM VÝVOJOVÉM OBDOBÍ

Matematické vědy v Rusku XVII. a XVIII. století — po ozdravění ruského národa z dlouhé tatarské poroby — se počaly slibně rozvíjet. Z této doby se zachovalo množství rukopisů, které svědčí o dobré úrovni ruské matematiky, zejména užité aritmetiky a geometrie. Pokrokové snahy Petra I. způsobily rychlý růst ruské vzdělanosti ve všech oborech, což se výrazně projevilo také v matematice. V Moskvě byla založena „Škola matematických a navigačních, tj. mořeplaveckých nauk", která později byla přeložena do Petrohradu a přeměněna v námořní akademii. Petr I. zakládal také tzv. „ciferní školy" a „garnisonní školy" i jiná, především vojenská učiliště.

Roku 1703 byla vydána znamenitá učebnice „Aritmetika neboli nauka početní", kterou napsal vynikající ruský pedagog a matematik *Leontij Filipovič Magnickij* (1669—1739). Tato učebnice však obsahovala nejen aritmetiku, ale i značné množství poznatků z algebry, geometrie, trigonometrie, meteorologie, astronomie a navigace. Z popudu Petra I. byla též založena petrohradská Akademie věd (r. 1724), jež měla rozhodující význam pro rozvoj matematiky v Rusku. Hned od počátku tu působili jedni z nejskvělejších matematiků tohoto období bratři *Mikuláš Bernouilli* (1695—1726) a *Daniel Bernouilli* (1700—1782), dále *Christian Goldbach* (1690—1764) a konečně slavný *Leonard Euler* (1707—1783).

Euler se narodil ve Švýcařích v Basileji. Od roku 1727 pracova na petrohradské Akademii věd. V roce 1741 přesídlil do Berlína

ale po pětadvacetiletém působení na akademii císaře Bedřicha II. vrátil se r. 1766 opět do Petrohradu, kde zůstal až do konce svého života. Euler strávil v Petrohradě celkem 30 let a uveřejnil zde úhrnem 473 velmi významné práce ze všech oborů matematiky, které jí určily vývojovou dráhu na staletí dopředu. Petrohradská Akademie věd brzy po svém založení počala vydávat vědecký časopis „*Commentarii Academie scientiarum imperialis Petropolitanae*". Ten se uvedl tím, že v jeho prvním svazku byla zveřejněna řada pojednání o integrálních a diferenciálních rovnicích, poprvé v historii matematiky zkoumaných bez souvislosti s geometrickými a mechanickými úlohami.

V roce 1755 pak byla založena v Moskvě přičiněním největšího ruského vědce *Michajla Vasiljeviče Lomonosova* (1711—1765) první ruská universita.

Všechny tyto události se výrazně odrážejí ve vývoji ruské matematiky. Nejvýznačnější zahraniční matematické učebnice jsou překládány do ruského jazyka. Vzniká i řada skvělých původních učebnic aritmetiky, algebry, geometrie, trigonometrie a analysy, které se vyrovnají nejlepším současným učebnicím západoevropským. Je věnována velká pozornost metodice matematického vyučování. Vedle již vzpomenutého L. Magnického je to zejména vynikající metodik matematiky *Semijon Emeljanovič Gurjev* (1764 až 1813), v jehož pracích se poprvé kladou a řeší mnohé obecné otázky metodiky vyučování matematice. Mohutný rozvoj ruské matematiky během XVIII. století je zvláště patrný z toho, že v první polovině tohoto století vyšlo v ruském jazyce 30 učebnic, jež buď zcela nebo aspoň zčásti byly věnovány matematice. V druhé polovině tohoto století už vyšlo 98 knih takového obsahu. Tyto knihy připravily půdu k dalšímu neobyčejnému pokroku a rozvití matematických disciplín v Rusku, které hned počátkem třetího vývojového období přineslo bohatou žeň v geniálních pracích *Nikolaje Ivanoviče Lobačevského* (1792—1856) a jeho následníků.

Slavní sovětští matematikové *J. M. Vinogradov* a *N. J. Muschelišvili* praví: „Rozvoj matematiky jako celku je možný pouze za současného harmonického rozvoje všech jejích složek. Velký úspěch v jednom odvětví obyčejně ovlivní i rozvoj jiných, někdy jemu vzdálených odvětví ... Často se výsledky na první pohled izolovaných oblastí matematiky ukáží neočekávaně aplikovatelnými na nejkonkrétnější otázky přírodovědy a techniky ... Bohatá historická zkušenost tedy ukazuje, že se matematika vždy rozvíjela jako jediný celek při současném pokroku všech jejích odvětví. Z toho plyne nutnost současného rozvoje všech hlavních odvětví moderní matematiky. Jen při takovém všestranném rozvoji dokáže matematika vyhovět potřebám přírodovědy a techniky."

Ve třetím vývojovém období ruské matematiky došlo k tak pronikavým úspěchům ve všech matematických disciplínách, že v tomto přehledu lze podat jenom zcela stručnou charakteristiku nejvýznačnějších objevů.

Vedle častokráte již vzpomenutého geniálního původce neeuklidovské geometrie *N. I. Lobačevského* jsou to především matematikové tzv. petrohradské školy, která vznikla v době, kdy Lobačevskij tvořil v Kazani svou novou geometrii. Hlavním předmětem bádání této školy byla teorie čísel, matematická fyzika a teorie pravděpodobnosti.

M. V. Ostrogradskij (1801—1861) pracoval v oblasti matematické fyziky a mechaniky nebeských těles, kde záhy předčil západní vědce. Zajímal se též o teorii algebraických funkcí a provedl metodu integrace racionálních funkcí tím způsobem, jaký je dodnes používán v učebnicích.

Vynikajícím příslušníkem petrohradské matematické školy byl *P. L. Čebyšev* (1821—1894). Proslavil se svými pracemi z matematické analysy (teorie nejlepší aproximace) stejně jako skvělými pracemi z teorie čísel a z teorie pravděpodobnosti. Čebyšev byl zastáncem sblížení teoretické matematiky s praxí a sám dosáhl v tomto oboru významných úspěchů. Ve svém pojednání „Kreslení zeměpisných map" (1856) praví: „Sblížení teorie s praxí má velmi prospěšné výsledky. Nezískává jím toliko sama praxe; i vědy se vyvíjejí vlivem praxe, neboť tato pro ně nachází nové úkoly nebo jim ukazuje nové stránky věcí již dávno známých. Přes vysoký vývojový stupeň, jehož dosáhly matematické vědy prací velkých matematiků posledních tří století, odhaluje praxe jasně jejich neúplnost po mnoha stránkách. Předkládá otázky, jež jsou pro vědu úplně

nové a nutí ji tak, aby hledala a nacházela úplně nové metody. Získává-li teorie mnoho novým použitím staré metody nebo jejím rozvíjením, ještě mnohem více získává odkrytím metod nových. V tomto případě nachází věda spolehlivého vůdce v praxi."

Dalšími představiteli petrohradské (později leningradské) matematické školy jsou: *S. V. Kovalevskaja* (1853—1891), jež byla první ženou, která se věnovala přes předsudky a odpor tehdejší ruské snobské společnosti cele matematické vědě; *A. M. Ljapunov* (1857—1918), který zpracoval skvělým způsobem nejtěžší problémy současné mechaniky (teorii stability pohybu a teorii rovnováhy rotujících kapalin); *A. A. Markov* (1856—1922), který zvláště vynikl v teorii pravděpodobnosti; *V. A. Stěklov* (1863—1926), který začal pracovat pro sovětské zřízení již od první chvíle sovětské vlády a postavil se v čelo „Svobodné společnosti pro rozvoj a šíření základních vědomostí"; *D. A. Grave* (1863—1939), jenž jako Čebyševův žák založil slavnou kijevskou algebraickou školu. Konečně sem patří i akademik a hrdina socialistické práce *A. N. Krylov* (1863—1945), jenž s výjimečným úspěchem rozřešil řadu obtížných matematických otázek, majících zásadní význam pro stavbu lodí. Z dosud žijících členů leningradské matematické školy jmenujme ještě *V. I. Smirnova* (*1887) a *S. L. Soboljeva* (*1908).

Důležitým předchůdcem sovětské matematiky byla též moskevská matematická škola, jejíž vznik klademe do roku 1864, kdy byla založena Moskevská matematická společnost, jedna z nejstarších matematických společností vůbec. Nepřihlížíme-li k mechanice, v níž se velmi proslavil zakladatel aerodynamiky *N. J. Žukovskij* (1847—1921), měla moskevská matematická škola za carského Ruska menší důležitost než škola petrohradská. Její význam však počátkem XX. století prudce stoupl, především zásluhou *D. F. Jegorova* (1869—1930) a jeho žáka *N. N. Luzina* (1883—1950). Po Velké říjnové socialistické revoluci se stala Moskva vedoucím centrem bádání v teorii množin a příbuzných oborech.

Současně se však dále široce rozvíjela i leningradská (dříve petrohradská) matematická škola. Ačkoliv měly zpočátku obě školy dosti odlišné zaměření, sbližovaly se čím dál tím více, zejména

po roce 1934, kdy sovětská Všesvazová akademie věd přesídlila do Moskvy.

Velká říjnová socialistická revoluce od základu změnila životní podmínky ruského lidu a zároveň vytvořila nejlepší předpoklady pro vědeckou práci. Sovětští vědci v naprosté většině rychle pochopili epochální význam Říjnové revoluce pro postavení vědy. Rovněž matematici se radostně připojili k obrovskému dílu, které sovětská vláda a komunistická strana začala uskutečňovat pro lepší život pracujících. Vedle Moskvy a Leningradu vznikla za sovětské vlády řada velmi významných kulturních středisek v oblastech, kde před Říjnovou revolucí nebyla ani jediná vysoká škola.

Vítězství Velké říjnové socialistické revoluce zahájilo zcela novou epochu v dějinách ruské vědy. Skromné řady vědců předrevolučního Ruska se v Leninově epoše rozrostly v ohromnou armádu sovětských vědců. Ti mají dnes k dispozici tisíce skvěle vybavených vědeckých ústavů, rozmístěných po celé zemi.

Mohutný rozvoj vědy v Sovětském svazu si vyžádal zřízení mnoha speciálních vědeckých ústavů, mezi jinými i ústavů matematických. Takové ústavy byly zřízeny nejen při Akademii věd SSSR a při ukrajinské, gruzínské a uzbecké akademii, ale i při četných sovětských universitách, jako např. v Moskvě, v Tomsku a jinde. Založení těchto institutů a kolektivní práce v nich dokázala sovětským matematikům, že jejich vědecká činnost nemá jenom osobní význam, nýbrž že je celostátně důležitá a že znamená tvůrčí sílu v rukou celé socialistické společnosti.

Vznik takových matematických ústavů způsobil, že mnohé matematické kolektivy našly nové cesty vědeckého bádání, a tím odkryly nové možnosti tvůrčí činnosti v matematice. Současně s vědeckou prací zabývají se tyto ústavy i výchovou vědeckého dorostu. Nejnadanější žáci vstupují po skončení svých studií na universitě do těchto ústavů a pod vedením nejlepších specialistů se zdokonalují ve svém oboru.

Díky této nebývalé péči, kterou věnuje sovětská vláda a komunistická strana výchově vědeckého dorostu, a porozumění, s nímž vychází vstříc každé vážné vědecké práci, dopracovala se sovětská matematika na jedno z nejpřednějších míst v matematice světové.

V mnohých matematických disciplínách má absolutní primát, který je uznáván celým světem, a v četných dalších k světovému primátu nezadržitelně spěje.

Vyžadovalo by rozsáhlý rozbor, abychom se podrobně seznámili s nesmírně bohatou a široce rozvětvenou vědeckou činností sovětských matematiků. Mezi nimi zvláště vynikli *I. M. Vinogradov* (*1891), *L. G. Šnirelmann* (1905—1938), *C. N. Bernštejn* (*1880), *A. N. Kolmogorov* (*1903), *P. S. Alexandrov* (*1896), *P. S. Uryson* (1898—1924), *I. G. Petrovskij* (*1901), *A. J. Chinčin* (*1894), *L. S. Pontrjagin* (*1908), *M. V. Keldyš* (*1911), *M. A. Lavrentěv* (*1900), *N. I. Muschelišvili* (*1891) a mnozí další.

Hloubka a tvůrčí smělost, opřená o dialekticko-materialistický světový názor a spojená s pronikavým porozuměním potřebám praxe, charakterizují směr bádání všech sovětských matematiků. V západních kapitalistických zemích však mnozí buržoasní vědci nepochopili, že matematika tkví svými kořeny ve vztazích a formách reálného světa. Pokoušeli se ji pěstovat zcela teoreticky, odtrženě od praxe, jako nějakou neomezenou a k ničemu určitému zaměřenou, třebaže duchaplnou hru rozumu. Matematické pojmy pokládali za volné výtvory lidského ducha, které nemají nic společného s reálným světem a s nimiž lze operovat podle vlastní vůle a fantazie. Tento falešný výklad původu, účelu a zaměření matematického poznání, propagovaný reakčními buržoasními filosofy i vědci s idealistickým světovým názorem, vedl v kapitalistických zemích k dlouhodobé krizi studia a vývoje matematiky.

Naproti tomu sovětští matematici jsou plně přesvědčeni, že matematická věda vyplývá ze zkušeností a z potřeb praxe a že musí být v podstatě zaměřena na řešení konkrétních úkolů vědy a techniky. Současně ovšem intenzívně pěstují i velmi abstraktní úseky matematiky, jako např. teorii čísel a topologii. Pohlížejí však na ně nikoli jako na samoúčelnou hru s pojmy, nýbrž jako na důležitou rezervu k překonání nových překážek, jež nutně vyrostou dalším vzestupem vědy a techniky (podle sovětského akademika *S. I. Vavilova*).

O jedinečné zdatnosti sovětských vědeckých pracovníků a o správnosti vědeckých, výchovných i pracovních metod, používaných

v Sovětském svazu, svědčí nepochybně obrovské úspěchy sovětské vědy a techniky téměř ve všech oborech lidské činnosti. Vyslání umělých zemských družic a planet do kosmického prostoru, které Sovětský svaz uskutečnil jako první ze všech států na světě, jasně ukazuje, že jeho vědecká i technická vyspělost den ode dne roste a nabývá stále větší váhy.

Spojení teorie s praxí, kolektivní práce, smělost, s níž sovětská věda láme zastaralé tradice, staré normy a přežitá zařízení, neobyčejné pochopení a zájem o dějiny vlastenecké vědy i oddaná služba pracujícímu lidu postavily sovětskou matematiku v čelo matematiky světové. Tím se zároveň jasně prokázalo, že má-li být matematika vědou, sloužící k poznávání a přeměně přírody, musí se řídit pokrokovým sovětským příkladem.

VII. LITERATURA

G. Adams: Geometrische und Graphische Versuche (Lipsko 1795)
Archimédes: Kugel und Zylinder (přeložil A. Czwalina, Lipsko 1922)
Archimédes: Über schwimmende Körper und Sandzahl (přeložil A. Czwalina, Lipsko 1925)
Aristote: Physique (přeložil H. Carteron, Paříž 1926)
Aristoteles: Metafysika (přeložil A. Kříž, Praha 1946)
H. Beck: Elementargeometrie, I. a II. díl (Lipsko 1930)
N. Bion: Mathematische Werck-Schule (přeložil J. G. Doppelmayr, Norimberk, 1741)
E. Bortolotti: L'École Mathématique de Bologne (Boloňa 1928)
J. Boyer: Histoire des Mathématiques (Paříž 1900)
A. Braunmühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie (Lipsko 1900)
F. Cajori: A History of Mathematics (New York 1924)
M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I.—IV. díl (Lipsko, 1901—1922)
Christophorus Caius: Geometriae (Mohuč 1606)
R. Dekart: Rassuždenie o metode (přeložili G. G. Sljusarev a A. P. Juškevič, Leningrad 1953)
Diofantos: Die Arithmetik (přeložil G. Wertheim, Lipsko 1890)
F. Enriques: Fragen der Elementargeometrie (přeložil H. Fleischer, Lipsko 1923)
Euklid — Načala Evklida, díl I.—III.: přeložil D. D. Morduchaj-Boltovskij) Moskva—Leningrad, 1949—1950)
L. Euler: Vollständige Anleitung zur Algebra (Lipsko, Reclam-Bibl.)
E. Fettweis: Wie man einstens rechnete (Lipsko 1923)
B. V. Gnedenko: Očerki po istorii matematiky v Rosii (Moskva 1946)
J. Goerl: Aritmetica (Praha 1677)
V. Hájek: Kronika česká, díl I.—IV. (Praha 1933)
A. Hermann: Das delische Problem (Lipsko 1928)

S. Hilbert: Grundlagen der Geometrie (Lipsko, 1930)
J. E. Hofmann: Geschichte der Mathematik, I. a II. díl (Berlín 1953, 1956)
M. Chasles: Aperçu historique (Paříž 1875)
Al Chovarizmi: Hisabaljabr w'almucabalah (vydal L. Ch. Karpinski, New York 1915)
Istoriko-matěmatičeskije issledovanija Sv. II.—X. (Moskva 1949—1957)
F. Kadeřávek: Geometrie v dobách minulých (Praha 1935)
Al Kaši: Ključ arifmetiki. Traktat o okružnosti (přeložil B. A. Rozenfeld, Moskva 1956)
A. G. Kästner: Geschichte der Mathematik, I. a II. díl (Göttingen 1797)
O. Klatovský: Nowe knížky wo počztech, I. vyd. (Norimberk 1530); II. vyd. (Praha 1558)
F. Klein: Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus, I. až III. díl (Berlín 1924)
F. Klein: Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik 19. Jahrhundert (Berlín 1926)
E. Kofler: Z dziejóv matematyki (Varšava 1956)
K. Koutský: Matematikové na Slovensku (rukopis)
K. Kuchař: Naše mapy (Praha 1958)
W. Litzmann: Überblick über die Geschichte der Elementarmathematik (Lipsko 1928)
C. J. Lure: Archimed (Moskva 1945)
K. Menninger: Zahlwort und Ziffer (Vratislava 1934)
P. H. Michel: De Pythagore a Euclide (Paříž 1950)
V. H. Molodšij: Osnovy učenija o čisle v XVIII. veke (Moskva 1953)
F. Novotný: O Platonovi, I.—III. díl (Praha 1949)
L. Nový: Učebnice praktické geometrie v Čechách ke konci první poloviny 18. století (Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky, sv. III., Praha 1957)
F. Orontio: Geometrie practica (Argentorati 1557)
J. B. Pavlíček: Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského (Praha 1953)
J. F. Penther: Praxis Geometrae (Augsburg 1755)
M. Planudes: Das Rechenbuch (přeložil H. Wäschke, Halle 1878)
S. Podolský: Knížka o měrách zemských (Praha 1683)
Ch. U. Sabykov: Biruni (Moskva 1953)
V. Sedláček: Základové měřictví čili geometrie (Plzeň 1822)
H. Slouka: Astronomie v Československu (Praha 1952)
D. E. Smith: History of Mathematics (New York 1925)
J. Smolík: Mathematikové v Čechách od založení university pražské, část I. (Praha 1865)

E. Stemplinger: Antike Technik (Mnichov 1927)
M. D. Schwenter: Geometria practica nova (Norimbek 1617)
M. D. Schwenter: Deliciae Physiko-Mathematicae oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden (Norimberk 1636)
D. J. Struik: A concise History of mathematics (Londýn 1956)
P. Treutlein: Das Rechnen im 16. Jahrhundert (Lipsko 1877)
J. Tropfke: Geschichte der Elementar-Mathematik, I.—VII. díl (Berlín 1930)
A. V. Velflík: Dějiny technického učení v Praze, I.—III. díl (Praha 1906—1925)
V. J. Veselý: Gruntovní počátek mathematického umění (Praha 1734)
Q. Vetter: Jak se počítalo na úsvitě kultury (Praha 1926)
Q. Vetter: Šest století matematického a astronomického učení na universitě Karlově v Praze (Věstník královské české společnosti nauk, ročník 1952)
Q. Vetter: Některá „Rara mathematica" v pražských knihovnách (Přírodovědecký sborník, sv. VI., Praha 1929)
Q. Vetter: Matematika v našich zemích od příchodu Čechů do založení university (Matematika ve škole, Praha 1955)
I. M. Vinogradov, N. I. Muschelišvili: Sovětská matematika (přeložili L. Zachoval, F. Vyčichlo, M. Kopecký, Praha 1951)
Vitruvius: Deset knih o architektuře (přeložil A. Otoupalík, Praha 1953)
K. Vogel: Die Grundlagen der egyptischen Aritmetik (Mnichov 1929)
S. Vydra: Počátkové arytmetyky (Praha 1806)
J. Vyšín: Elementární geometrie, sv. I. a III. (Praha 1952)
B. L. Warden: Erwachende Wissenschaft (přeložila Helga Habicht, Basel 1956)
J. Wiedmann: Behende und hübsche Rechnung (Lipsko 1489)
Z. Winter: O životě na vysokých školách pražských (Praha 1899)
Z. Winter: Život a učení na partikulárních školách v Čechách (Praha 1901)
K. Wolf: Geschichte der Astronomie (Mnichov 1877)

a další díla.

VIII. JMENNÝ REJSTŘÍK

Abel N. H. 31, 33, 103
Abu 'Lvafa 20, 163, 176, 178, 199, 200
Abu Zagarija Alhassar 66
Adrien van Roomen 23
Agatharchos 191
Agrimensoři 7, 19
Ahmes (Ahmesův papyrus) 42, 63, 75, 82, 87, 105, 106, 113, 132, 148, 157, 165, 180, 187, 193, 194, 197
Albattani 20, 199
d'Alembert J. 28, 100
Alexandrov P. S. 228
Alkuin 115
Annairizi 186
Anaxagoras 191
Apianus 54, 55, 66
Apollonios 7, 15, 17, 34, 46, 147, 175
Archimédes 7, 15, 17, 26, 34, 46, 104, 116, 125, 134, 139, 156, 157, 180, 188, 189, 194—196
Aristoteles 7, 13, 15, 148, 157, 159, 160, 183
Aryabhata 8, 19, 67, 107, 118, 199
Augustini Samuel ab Hortis 221
Avicena (Ibn Sina) 79

Bacháček M. 209
Barow I. 201
Bečvář A. 220
de Beldomandi Prosdocimo 60
Berkeley G. 27
Bernouilli Daniel 223
Bernouilli Jakub 28
Bernouilli Jan 28
Bernouilli Mikuláš 223
Bernštejn C. N. 228
Berzeviczi H. 220
Bežo J. 221
Bhaskara 8, 19, 58, 67, 99, 114, 122, 188, 199
Al Bíruni 170
Bolyai J. 33, 143
Bolzano B. 31, 79, 214, 215
Borelli G. A. 157
Borůvka O. 218
de Brahe Tycho 207, 209
Bráhmagupta 8, 19, 65, 67, 83, 98, 99, 107, 108, 118, 189, 202
Brandes H. 186
Bresztyenski V. 221
Brianchon Ch. J. 156, 177, 178
Briggs H. 126, 127
Bruno G. 18
Bürgi J. 23, 71, 124, 126, 201
Bydžovský B. 218

Cantor G. 32, 78—80, 105
Cardano G. 22, 99, 121, 165
Carnot L. 100, 177
Cauchy A. L. 31—33, 127, 192
Cavalieri B. 26, 34, 195
Ceulen L. 23, 190
Ceva G. 165
Clairaut A. C. 28
Clavius Ch. 157, 165
Cremona L. 32

Čan San 108
Čebyšev P. L. 225, 226
Čech E. 218
Čuleň M. 221

Dase J. M. Z. 190
Dedekind R. 32, 72, 79, 105
Delambre J. B. 203
Demokritos 13, 103, 133, 134, 194
Desargues G. 30
Descartes R. 25, 26, 94—97, 100—102, 104, 134, 178, 201
Diofantos 7, 19, 83, 89, 90, 91, 97—99, 101, 102, 107—114, 118, 119, 122
Doppler Ch. 222
Dostál Jan 214
Dürer A. 178, 192

Engels B. 9, 10, 24—27, 35
Eratosthenes 7, 78
Eudoxos 7, 15—17, 34, 72, 103, 133, 136, 137, 166, 194
Euklides 7, 15—17, 20, 33, 67, 71, 72, 78, 88, 89, 103, 118, 133—138, 140—143, 147—150, 152, 154, 156, 157, 160, 161, 163—166, 175, 176, 180, 181, 186, 192, 194, 211
Euler L. 28, 29, 77, 100—102, 123—127, 156, 190, 192, 202, 223, 224

Ferguson D. F. 190
Fermat P. 25, 77
Fernel J. 202, 203
Ferrari L. 22
Ferro S. 22
Feuerbach K. W. 156
Fink T. 202
Fourier J. B. J. 28

Galenus 159
Galilei G. 18, 26, 134, 169
Galois E. 33
Gauss K. F. 32, 33, 77, 121, 143, 156, 181, 202
Gemma F. 23
Gerstner F. J. 211
Gerwien P. 181
Girard A. 94, 121
Goerl G. 68, 74, 93
Goldbach Ch. 223
Grave D. A. 226
Guldin P. 34, 195, 196
Gurjev S. J. 224
Györffy J. 221

Hájek T. 20, 209
Hájek V. 141, 144
Hamilton W. R. 81
Hansen P. 202, 203
Hanuš 208
Harriot T. 95
Hell M. 220
Hérigone P. 95
Hermite Ch. 33
Hérodot 42, 131, 159, 197
Herón 7, 18, 101, 104, 113, 134, 150, 158, 159, 161, 169, 180, 181, 194, 195
Hertl I. 220
Hilbert D. 81, 137, 139
Hipparchos 7, 18, 197, 198
Hippokrates 7, 16, 133, 187, 198
Hromádko F. 115
Hronec J. 222
Hruška V. 179
Huygens Ch. 190

Chinčin A. J. 228
Al Chovarizmi (Abu Abdalah Muhamed ben Musa al Chorezme) 8, 20, 21, 65, 79, 83, 84, 90, 102, 108, 118—121, 170

Ikaros 161
Isokrates 131

Jandečka V. 214
Jarník V. 218
Jarolímek V. 215
Jaroslav Moudrý 21
Jegorov D. F. 226
Jordanus Nemorarius 21, 65, 91, 92, 165

Kadeřávek F. 172
Al Kaši (Machmud) 57, 58, 189
Katětov M. 218
Keldyš M. B. 228
Kepler J. 26, 34, 71, 124, 196, 209
Kirik 21
Klatovský O. 49, 52, 75, 93, 116, 208
Klein F. 32
Kochański A. A. 189
Kolmogorov A. N. 10, 228
Komenský J. Á. 27
Kopernik M. 18, 22, 134, 201, 202, 221, 222
Kordoš G. 221
Kořínek V. 218
Kořistka K. 222
Kössler M. 218
Kovalevskaja S. V. 226

Kresa J. 211
Krylov A. N. 226
Křišťan J. 207

Lagrange J. L. 28
Lambert J. H. 178
Landau E. 81
Laotse 37
Laplace P. S. 28, 100
Lavrentěv M. A. 228
Legendre A. M. 28, 77, 192
Leibniz G. W. 9, 25—28, 93, 94, 100, 104, 108, 196
Lenin V. I. 15
Leonardo da Vinci 178
Leonardo Pisánský 8, 21, 64—67, 73, 74, 76, 78, 79, 91, 92, 94, 99, 108, 120—123, 181, 185, 195
Lerch M. 217
Lešák J. 221
Levi ben Gerson 170
Lie S. 32
Lindemann F. 190
Ljapunov A. M. 226
Lobačevskij N. I. 33, 141—143, 156, 157, 224, 225
Lomonosov M. V. 134, 224
Luzin N. N. 226

Magnickij L. F. 113, 223, 224
Mahavira 67
Machmud (zv. Al Kaši) 57
Machovec F. 215
Mallet A. M. 174
Al Mamun 90
Al Mansur 90
Marcus Marci 210
Markov A. A. 226
Mascheroni L. 178
Méchain P. F. A. 203
Melanchton F. 125
Menelaos 18, 195—198
Méray Ch. 32, 79, 105
Mercator N. 126
Mikoviny S. 220
Möbius A. F. 181
Monge G. 28, 30, 192
Müller J. 22, 200
Muschelišvili N. I. 224, 228

Napier J. 23, 124, 126, 127
Nasir eddin 20, 200, 202
Neugebauer O. 68, 69
Newton I. 26, 27, 95, 100—102, 104, 106, 196, 214
Nipsus 121, 151
Novák J. 218

Oresme N. 91, 102
Ostrogradskij M. V. 225
Ougthred W. 93—95, 126
Ovidius 160

Pacioli L. 56, 60, 62, 66, 76, 99, 116
Padvai J. C. 220
Pamphile 163
Pappos 7, 16, 19, 34, 152, 156, 196
Pascal B. 26, 30
Pasch M. 138, 139, 157
Peano G. 80
Pell J. 94
Pelz K. 215
Penther J. F. 175, 195
Petr K. 121, 217
Petrovskij I. G. 228
Petzwal J. 222
Petzwal O. 222
Peuerbach G. 22, 69, 70, 209
Pierre F. 203
Planudes M. 113, 117
Platón 7, 13—16, 78, 133, 161, 176, 177, 191
Plinius 64
Podolský Š. 141, 144, 211
Poncelet J. V. 32, 156, 178
Pontrjagin L. S. 228
Procházka B. 215
Proklos Diadochos 15, 16, 103, 141, 160, 163, 164, 181
Prosdocimo de Beldomandi 60
Ptolemaios Cl. 7, 18, 20, 147, 195, 196—198
Pythagoras 7, 12, 103, 115, 133, 136, 148, 149, 181—187

Raduch M. 220
ar Rašid Harun 90
Record R. 94
Regiomontanus (Müller J.) 22, 69, 200
Rhäticus (Georg Joachim von Lauchen) 202, 221
Riemann B. 31, 33
Ries A. 67, 102, 115, 117, 121
Rudolf Ch. 102
Rutherford W. 190

Sedláček V. 214
Segner J. 222
Shanks W. 190
Schwarz Š. 218, 222
Schwenter D. 115, 117, 152—156, 165, 166, 168, 179, 192
Skuherský R. 214
Smirnov V. I. 226
Snellius W. 23, 202, 203
Soboljev S. L. 226
Sobotka J. 215
Sokrates 13
Steiner J. 160, 178
Stěklov V. A. 226
Stepling J. 211
Stevin S. 23, 66, 70, 71, 94, 121
Stifel M. 75, 102, 104, 108, 125, 126
Strnad A. 115
Struve J. V. 203
Studnička F. J. 216

Šanda J. 221
Šimerka V. 216
Šindel J. 207
Šnirelmann L. G. 228

Tannery J. 81
Tartaglia N. 75, 95, 104
Tesánek J. 214
Thales 7, 12, 15, 133, 149, 152, 163—166
Theaitetos 16, 103
Tilšer F. 214

Ulugbek 58, 200
Uryson P. S. 228

Varignon P. 158, 192, 195
Vavilov S. J. 228
Vega J. 190
Veronese G. 139
Veselý V. 146
Viète F. (zv. Vieta) 23, 24, 70, 94—96, 121, 201, 202
Vinogradov I. M. 77, 224, 228
Vitruvius 116, 147, 192
Vydra S. 126, 127, 212—214
Vyšín J. 139, 140

Wallis J. 95, 100
Weierstrass K. 31—33, 79, 81, 105
Wessel G. 32
Weyr Eduard 217
Weyr Emil 32, 217
Widmann J. 75, 92, 117
Willenberg J. 211
Wrench J. W. 190

Zelliger J. 221
Zenon 7
Zermelo E. 32, 80
Ziegler Josef 214
Zoch B. I. 221

Žukovskij N. J. 226

OBSAH

I. VÝVOJ MATEMATIKY

1. Úvod 9
2. První vývojové období: Matematika jako nauka o číslech, veličinách a geometrických útvarech 11
3. Druhé vývojové období: Matematika jako nauka o změnách veličin a geometrických transformacích 24
4. Třetí vývojové období: Matematika jako věda o kvantitativních vztazích a prostorových formách skutečného světa v celé jejich obecnosti 31

II. ARITMETIKA

1. První početní představy 35
2. Číselné soustavy 38
3. Psaní čísel 40
   A. Obrazová písma 41
   B. Systémy založené na místní hodnotě 42
   C. Zapisování čísel užitím písmen abecedy 46
4. Početní výkony s přirozenými čísly 48
   A. Sčítání 50
   B. Odčítání 51
   C. Násobení 52
      Středověký způsob násobení 54
      Algoritmus násobení zvaný „gelosia“ 56
      Jiné způsoby násobení 58
   D. Dělení 60
5. Zlomky 62
6. Desetinná čísla 68
7. Úměry 71

8. Trojčlenka, počet řetězový, spolkový apod. 73
9. Vlastnosti přirozených čísel 77
10. Axiómatisace aritmetiky 79

III. ALGEBRA

1. Vznik algebry 82
2. Počátky počítání s písmeny 91
3. Znaky početních výkonů 92
4. Počítání s písmeny ve významu čísel 95
5. Záporná čísla 97
6. Mocniny 101
7. Odmocniny 103
8. Z historie rovnic
Úvod 105
Lineární rovnice 108
Některé historické slovní rovnice 112
Kvadratické rovnice 117
Staré úlohy o kvadratických rovnicích 121
9. Logaritmy 123

IV. GEOMETRIE

1. Vznik geometrie 128
2. Vědecké pojetí geometrie 133
3. O měření délek 143
4. O měření úhlů 146
5. Z historie mnohoúhelníků 148
6. O kružnici 160
7. Podobnost a stejnolehlost 165
8. Geometrické konstrukce 170
9. Obsahy 180
10. Věta Pythagorova 181
11. Délka kružnice a obsah kruhu 187
12. Stereometrie 191
13. Objemy 193
14. Goniometrie a trigonometrie 196

V. STRUČNÝ PŘEHLED DĚJIN ČESKÉ A SLOVENSKÉ MATEMATIKY

1. Úvod 205
2. Rozvoj české matematiky od založení pražské university . . . 207
3. Vývoj matematiky na Slovensku 219

VI. STRUČNÝ PŘEHLED RUSKÉ A SOVĚTSKÉ MATEMATIKY VE DRUHÉM A TŘETÍM VÝVOJOVÉM OBDOBÍ 223

VII. LITERATURA 230

VIII. JMENNÝ REJSTŘÍK 233

K-2101 205/60
Vysoké učení technické v Brně
Fakulta inženýrského stavitelství
Ústav matematiky

DR. FRANTIŠEK BALADA

Z DĚJIN ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKY

Obálku navrhl Jaromír Valoušek
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 85—0—04
Edice Pomocné knihy pro učitele

Odpovědný redaktor: Jaromír Dubský
Výtvarná redaktorka: Marie Tůmová
Technický redaktor: Jiří Krejsa

Z nové sazby písmem Baskerville vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p., závod 4, Ostrovní 30, Praha 2 — Formát papíru 86 × 122 cm — AA 13,71 — VA 14,43 — D-594 772

Tematická skupina a podskupina 16/1

Vydání 1.
Náklad 10 000 výtisků

Cena brožovaného výtisku Kčs 9,10
56/II-13

Cena vázaného výtisku Kčs 12,50
56/XI-2