

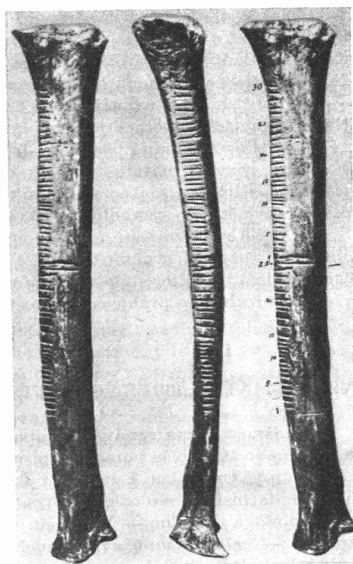
Čísla a číslice ve starověku

Zdeněk Halas

V tomto textu se seznámíme s některými prehistorickými a starověkými způsoby záznamu a zápisu čísel. Čerpat přitom budeme z dochovaných dokladů. U prehistorie se jedná o archeologické nálezy (kosti), zápisy čísel pak doložíme přímo dobovými prameny. V případě starověkého Egypta se jedná o papyry, v případě starověké Mezopotámie pak přímo o autografy – klínopisné tabulky z různých období.

Prehistorie

Jedním z nejstarších dokladů aritmetické činnosti lidí je vrubovka z Dolních Věstonic. Jedná se o 18 cm dlouhou vřetenní kost mladého vlka s 55 zářezy rozdělené do 2 skupin po 30 a 25



Obr. 1. Věstonická vrubovka (různé pohle-

zářezech. Nalezl ji profesor Karel Absolon roku 1936 na tábořišti lovců mamutů z období mladšího paleolitu (před 25 – 28 000 lety).

Vrubovka byla užívána až do začátku 19. století. Její výhodou bylo, že se mohla rozříznout podélně, přičemž jednu část si nechal věřitel a druhou dlužník. Tak mohla vzniknout snadno ověřitelná smlouva. Navíc umožňovala spočítat příslušné objekty (kusy dobytka, kusy zboží, potravin) i lidem, kteří jinak číslovky a operace s nimi neovládali. Z matematického hlediska se přitom využívá principu bijekce – dvě množiny mají stejnou mohutnost (tj. „mají stejný počet prvků“), pokud mezi nimi existuje vzájemně jednoznačné zobrazení. U konečných množin je tato definice velmi názorná, u nekonečných pak podává návod, jak ukázat, že dané dvě množiny mají stejnou mohutnost. Princip vrubovky se tak v 19. století stal základem mnoha hlubokých výsledků rodící se teorie množin.

V posledních desetiletích bylo podniknuto několik expedic, které přinesly další velmi staré doklady matematické činnosti lidí a posunuly dokonce časovou hranici nejstaršího dochovaného artefaktu hlouběji do minulosti. Jedná se zejména o 1,3 metru dlouhý kel mamutí samice s mnoha zářezy, které však nejsou uspořádány, tak vznikají pochybnosti, zda se opravdu jedná o vrubovku. Dalším argumentem proti matematické povaze tohoto nálezu je jeho veliká hmotnost, a tedy nepraktičnost. Aritmetický význam tohoto nálezu je však možný, jeho stáří je odhadováno

přibližně na 36 – 40 tisíc let. Zasloužila se o něj rusko-norská expedice, jež byla podniknuta v letech 1992 – 1997 v podhůří polárního Uralu (Мамонтова Курья).

Přírodní národy a stopy fylogeneze pojmu číslo v jazycích

Z hlediska zkoumání ontogeneze na základě paralely s fylogenezí je zajímavé připomenout přírodní národy. Lze u nich sledovat rané fáze vývoje vzniku představ o čísle. Číslo zde však musíme důsledně odlišit od jeho numerace. Zcela nepřehlédnutelným se jeví fakt, že číslo stojí na vysokém stupni abstrakce – utváření tohoto pojmu je velmi pozvolné. Způsob vyjadřování čísel primitivních národů je zkoumán již dlouhou dobu, za kterou se shromáždilo mnoho výsledků. Například studium jazyků australských domorodých kmenů ukázalo, že třicet z nich nemá číslovku pro počty větší než čtyři. Jistě ani v minulosti první lidé na tom nebyli jinak. Navíc ze struktury číslovek u některých kmenů je zřejmé, že i číslo tři zpočátku nebylo vyvinuto. Vyšší čísla se totiž vyjadřovala složením známých (menších) čísel.

Příkladem systému obsahujícího jako základní číslovky pouze jedničku a dvojku je:

guna, barkula, barkula-guna, barkula-barkula, ...

Systémem se třemi základními číslovkami jsou například:

mal, bulan, guliba, bulan-bulan, bulan-guliba, guliba-guliba, ...

a, oa, ua, oa-oa, oa-oa-a, oa-oa-oa, ...

Stopy tohoto vývoje lze zaznamenat i v morfologii některých jazyků, zejména v dvojném čísle (tzv. duálu). Duál byl užíván v sanskrtu, na ústupu byl v klasické řečtině, dodnes je užíván v semitských jazycích (např. arabštině, hebrejštině). V češtině jsou zachovány už jen zbytky duálu, a to zejména ve zvláštním skloňování substantiv označujících některé párové orgány (ruce, oči, uši, ...).

Alternativní způsob počítání bez označování číslovek je s využitím prstů. Na prstech lze přitom počítat až do sta. Lze využít i nohou či jiných částí lidského těla. Jsou známy případy, kdy na prstech současně počítaly dvojice či trojice lidí, jednotlivé části těla jsou přitom označeny čísly.

Počítání na prstech zanechalo významné stopy zasahující až do současnosti. První z nich je označení samotné číslice v některých indoevropských jazycích. V češtině máme adjektivum „digitální“. Přitom latinské „digitus“ znamená „prst“. Druhou, mnohem významnější stopou, je základ většiny používaných a zachovaných numeračních soustav. Většinou se jedná o základ deset, známé jsou i soustavy pětkové a dvacítkové. Například dvacítková soustava byla základem mayské numerační soustavy. Její stopy nacházíme i ve francouzštině:

80 = 4 dvacítky

90 = čtyři dvacítky a deset

quatre-vingts

quatre-vingt-dix

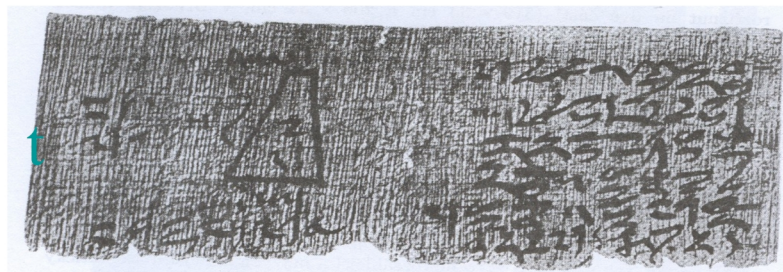
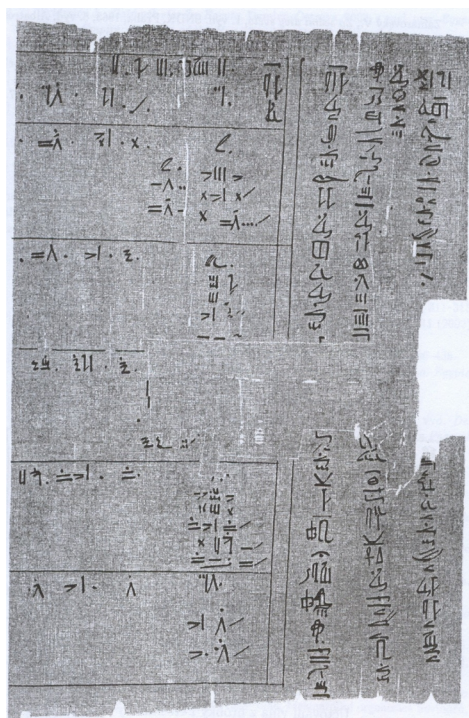
Naproti tomu některé zdánlivě dvanáctkové systémy mohou být naopak čistě desítkové, například v angličtině:

eleven = jeden navíc
(10 + 1)

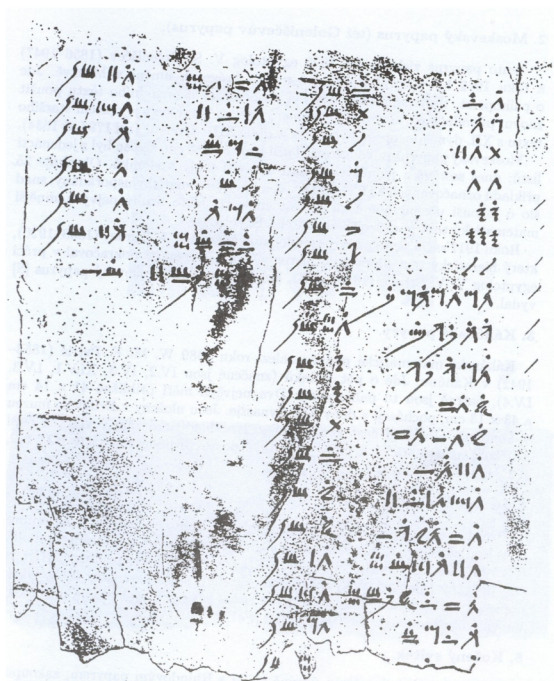
twelve = dva navíc
(2 + 10)

Starověký Egypt

Ze starověkého Egypta máme, pokud se jedná o matematické spisy, velmi málo dokladů. Dochovalo se nám jen velmi málo delších textů. Mezi nimi dominují dva hieratické papýry: Rhindův a Moskevský. Další jsou méně významné (např. Berlínský papyrus a Kožený svitek).



Ukázky z Rhindova papyru a z Moskevského papyru



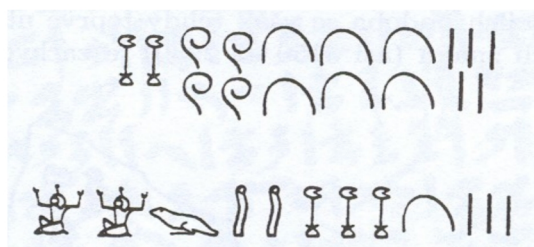
Column 4		Column 3		
90	III	90	III	1
90	III	90	III	2
90	III	90	III	3
90	III	90	III	4
90	III	90	III	5
90	III	90	III	6
90	III	90	III	7
90	III	90	III	8
90	III	90	III	9
90	III	90	III	10
90	III	90	III	11
90	III	90	III	12
90	III	90	III	13
90	III	90	III	14
90	III	90	III	15
90	III	90	III	16
90	III	90	III	17
90	III	90	III	18
90	III	90	III	19

Část Koženého svitku (psán hieratikou) a přepis do hieroglyfů

Číslovky jsou však také užívány v hojně dochovaných hospodářských záznamech. Oba předchozí obrázky obsahují číslovky, přehled uvedeme v následujících tabulkách.

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

Hieroglyfy používané pro označování čísel

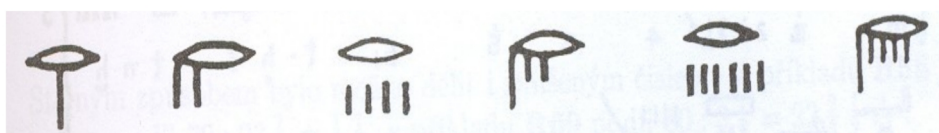


Příklad zápisu čísel pomocí hieroglyfů

Z uvedených zápisů je patrné, že hieroglyfická numerace byla nepoziční a desítková. Zápis čísel byl tedy čistě kumulativní, např. zápis čísla 40 se prováděl pomocí čtyř znaků pro desítku.

1	1	1	1	10	10	10	100	100	100	1000	1000	1000	1000
2	2	2	2	20	20	20	200	200	200	2000	2000	2000	2000
3	3	3	3	30	30	30	300	300	300	3000	3000	3000	3000
4	4	4	4	40	40	40	400	400	400	4000	4000	4000	4000
5	5	5	5	50	50	50	500	500	500	5000	5000	5000	5000
6	6	6	6	60	60	60	600	600	600	6000	6000	6000	6000
7	7	7	7	70	70	70	700	700	700	7000	7000	7000	7000
8	8	8	8	80	80	80	800	800	800	8000	8000	8000	8000
9	9	9	9	90	90	90	900	900	900	9000	9000	9000	9000

Srovnání hieroglyfického zápisu a hieratické kurzívy
(jednotky, desítky, stovky, tisíce)



1/3

2/3

1/4

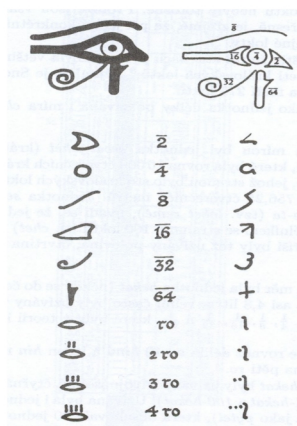
3/4

1/6

5/6

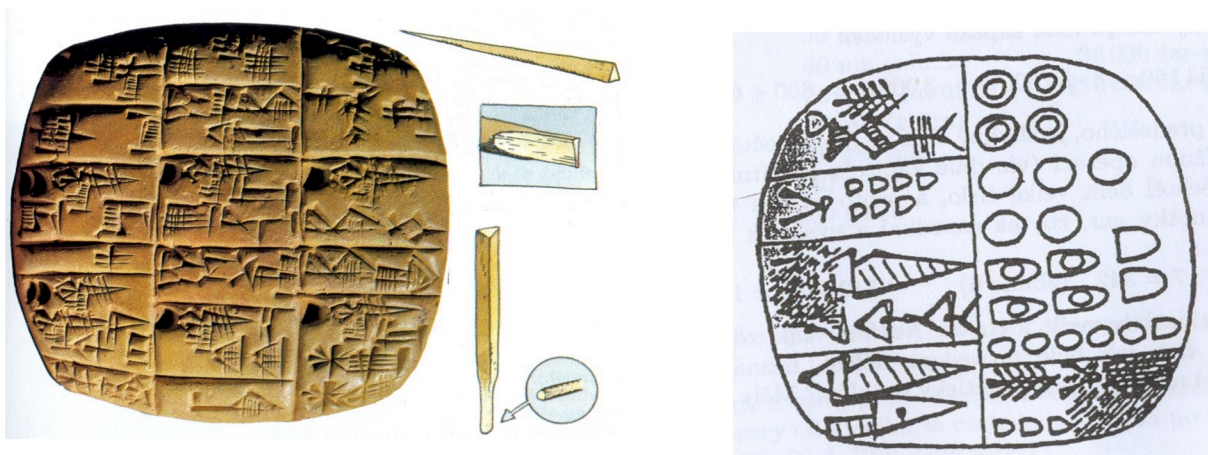
Označení některých zlomků

Zajímavostí je tzv. Horovo oko, které bylo používáno při označování zlomků mocnin jedné poloviny. Tyto mocniny byly označovány pomocí jednotlivými částmi stylizovaného oka boha Hora:



Starověká Mezopotámie

U starověké Mezopotámie je situace s doklady výjimečná – prakticky všechny dochované tabulky jsou autografy, nejsme tedy odkázáni na opisy z pozdějších dob, jak je tomu u kultur, kde bylo zvykem psát na organické materiály, např. papyrus či později pergamen (Egypt, Řecko, Řím, ...). Navíc máme dochováno poměrně velké množství tabulek s matematickým obsahem a veliké množství hospodářských záznamů.



Tabulky z počátku 3. tis. př. Kr.

Na druhé tabulce (přesněji jejím překreslení) jsou velmi dobře patrná čísla, která byla vytvářena vtláčováním různě seříznutého písátka, čímž vznikaly důlky dvou typů. Jejich kombinací se vytvářely znaky pro čísla. Tento způsob zápisu čísel je jeden z nejstarších vůbec. Používal se v Uruku ve 3. tisíciletí př. Kr. Číselné záznamy lze snadno rozluštit s pomocí následující tabulky.

1	10	60	600	3600	36000
D	o	D	D	O	⊗ ⊙

Starší způsob označování čísel

V průběhu 3. tisíciletí byl tento zápis nahrazen klínopisnými znaky.

1	D	┐	◁
10	o		
60	D	┐	◁
60·10	⊙		
60 ²	O	☆	
60 ² ·10	⊙	☆	☆
60 ³		☆	☆

Vývoj klínopisného zápisu čísel ze starší „důlkové“ notace

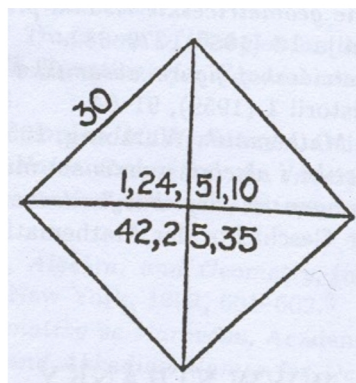
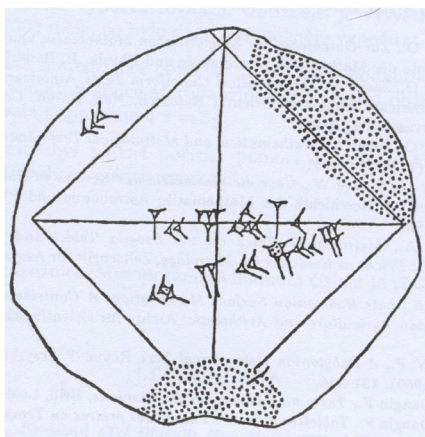
Z následujícího obrázku je vidět zápis čísel od 1 do 59. Zápis opět vychází z desítkové soustavy a je kumulativní. Shluky znaků jsou však již formalizovány a je třeba je psát ve stanovených obrazcích.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16		
17	18	19	20	22	30	30		
38	45	50	59					

Novější způsob označování čísel – zápis prvních 59 „číslic“ pomocí klínopisných znaků

Zápis čísel větších je zde však už *poziční* – číslo 60 se zapíše jako pouhá jednička. Velikou nevýhodou mezopotámské numerace však byla absence nuly jakožto znaku pro neobsazený řád. V hospodářských záznamech se tento nedostatek příliš neprojevoval, a tak prvními texty, v nichž nacházíme první náznaky nuly pro označení prázdné pozice (nikoli však nuly jako samostatného čísla) jsou texty astronomické. Nesmělé a velmi nejednotné označení takovéto nuly se začíná objevovat v 8. až 6. stol. př. Kr.

Poziční soustava umožňovala snadný zápis některých čísel menších než jedna, jak je patrné z unikátní tabulky obsahující hodnotu $\sqrt{2}$ zapsanou s přesností na 4 šedesátková místa. Zápis $1; 24, 51, 10$ znamená $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$.



Tabulka obsahující čtverec a délku jeho přepony s přesností na 4 šedesátková místa a její přepis

Literatura

- Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Edice Dějiny matematiky, sv. 23. Prometheus, Praha, 2003.
- Chrisomalis S. *Numerical Notation. A Comparative History*. CUP, Cambridge, 2010.
- Vidman L. *Psáno do kamene. Antická epigrafie*. Edice Nové obzory vědy. Academia, Praha, 1975.