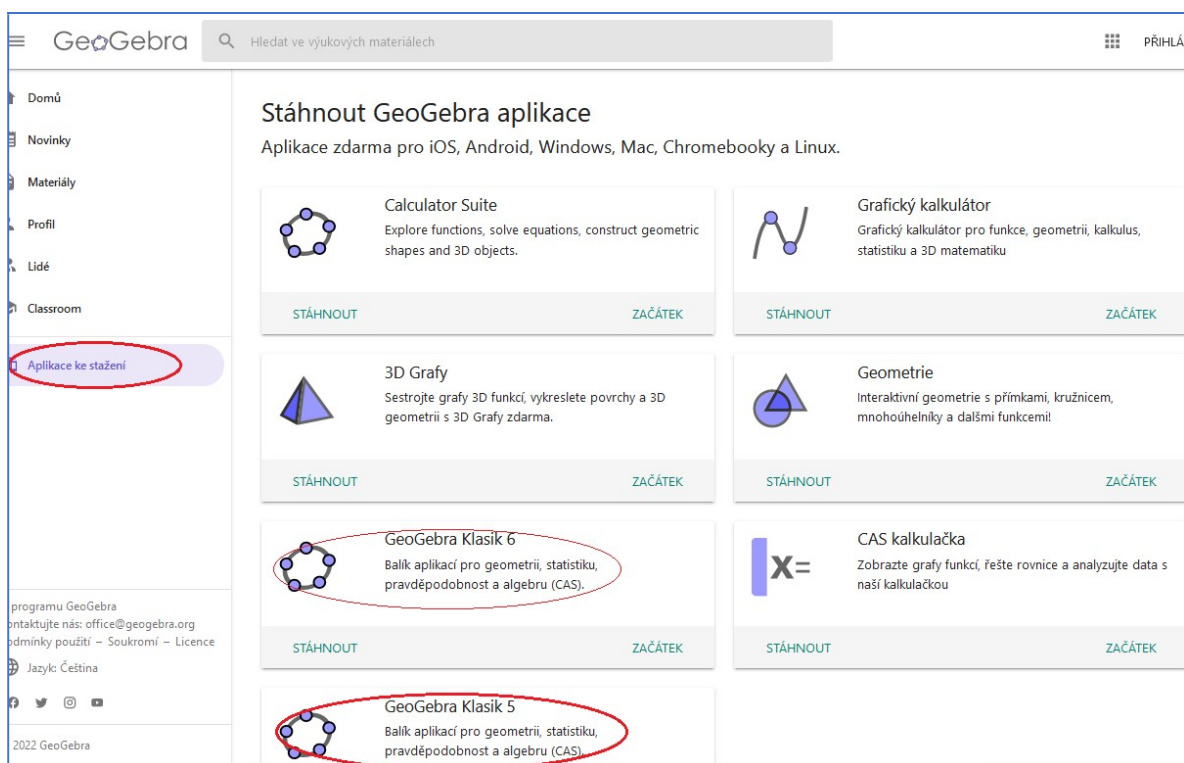


- **Program GeoGebra je dynamický matematický software** určený pro výuku na ZŠ a SŠ. Tento software patří v současné době k nejvíce používaným programům ve výuce matematiky od základní po střední školu.
- **Stahování software**
 - <http://www.geogebra.org>
 - svislé menu vlevo: **Aplikace ke stažení** (viz obr.)
 - **programy ke stažení GeoGebra Klasik 5** (nejvíce nástrojů a příkazů), který budeme používat; dále je k dispozici GeoGebra Klasik 6 (včetně verze pro mobilní telefony)
 - jednoduchý manuál, další výukové materiály



The screenshot shows the GeoGebra website interface. On the left, a vertical navigation menu includes 'Domů', 'Novinky', 'Materiály', 'Profil', 'Lidé', and 'Classroom'. The 'Aplikace ke stažení' option is highlighted and circled in red. The main content area is titled 'Stáhnout GeoGebra aplikace' and lists several applications with 'STÁHNOUT' and 'ZAČÁTEK' buttons. The 'GeoGebra Klasik 6' and 'GeoGebra Klasik 5' items are also circled in red.

- **Základní vlastnosti programu**
 - open source software (volně šiřitelný)
 - spojuje geometrické prostředky s algebraickými včetně prostředků diferenciálního a integrálního počtu, nově přidány i „symbolické výpočty“ (tzv. CAS – Computer Algebra System)

Základní nástroje a příkazy GeoGebry

- **Pracovní okna programu:** hlavní okna jsou **Algebraické okno**, **Nákresna**, **Vstup** (viz následující obr.); další okna (Tabulka, CAS, Nákresna 2, Grafický náhled 3D, Zápis konstrukce, Pravděpodobnostní kalkulačka, Klávesnice) jsou dostupná v menu *Zobrazit*.



- **Nabídky**

- **hlavní vodorovná lišta:** menu *Soubor*, *Úpravy*, *Zobrazit*, *Nastavení*, *Nástroje*, ...
- **tlačítka s ikonami:** obsahují nástroje pro základní geometrické konstrukce, grafické úpravy aj. (nápověda k jednotlivým nástrojům se zobrazuje po přiblížení ukazovátka k ikoně nástroje)
- **vstupní příkazový řádek:** slouží k vytváření a změně volných objektů v rysu a k výpočtům

- **Mazání již zobrazených objektů**

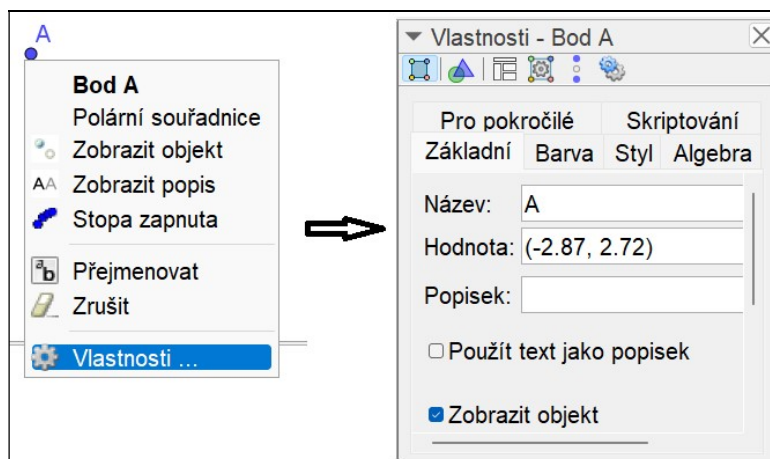
- klávesa **Esc** – mazání (zrušení) ještě nedokončeného objektu (příkazu)
- klávesy **Ctrl** a současně **A**, následně stisknout klávesu **Delete** – mazání celé nákresny
- po zvolení nástroje *Ukazovátka* (první ikona zleva) kliknout na konkrétní objekt, následně klávesa **Delete** – mazání konkrétního objektu
- klávesy **Ctrl** a současně **Z** – vrátí konstrukci o jeden krok zpět (lze opakovat)

- **Přemísťování objektů**

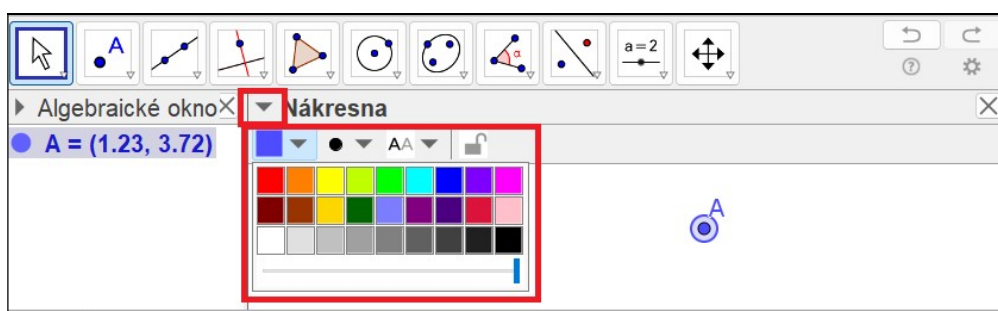
- Zvolíme nástroj *Ukazovátka*. Kurzor myši přesuneme k objektu, počkáme na jeho identifikaci (např. *Bod B*, ...), poté stlačíme levé tlačítko myši. Pohybem myši při stále stisknutém tlačítku přemísťujeme objekt po nákresně.

- **Vlastnosti geometrických objektů**

- vlastnosti objektů lze měnit v dialogovém okně *Vlastnosti* (v tzv. kontextovém menu ke každému objektu v Nákresně) nebo ve *formátovacím panelu* v horní liště geometrického okna (nákresny)
- okno *Vlastnosti* zpřístupníme po ukázání na objekt a následným stisknutím pravého tlačítka myši, či v menu *Úpravy*



- *formátovací panel objektu* zpřístupníme po kliknutí na šipku před slovem *Nákresna* v horní liště geometrického okna (viz obr. s formátovacím panelem pro bod *A*)



Příklad (přejmenování objektu, barva objektu)

V geometrickém okně sestrojte tři nekolineární body A, B, C . Dále nástrojem *Mnohoúhelník* sestrojte trojúhelník ABC . Pomocí kontextového menu a okna *Vlastnosti* přejmenujte body na K, L, M ; dále nastavte pro každou stranu různou barvu. Teprve nyní uzavřete dialogové okno kliknutím na křížek v pravém horním rohu (v otevřeném okně *Vlastnosti* lze přepínat mezi objekty, jejichž „grafické vlastnosti“ chceme měnit).

Příklad (indexy v názvech objektů)

Sestrojte dvě různé úsečky AB a CD . Nástrojem *Střed* (druhé menu zleva) sestrojte S_{AB} a S_{CD} . Dolní index v názvu bodu zapíšte tak, že pravým tlačítkem myši zobrazíte kontextové menu středu úsečky, zvolíte příkaz *Přejmenovat* a do zobrazeného okna zapíšete S_{A_B} , nebo $S_{\{AB\}}$, resp. $S_{\{CD\}}$. Dále nástrojem *Kružnice daná středem a bodem* sestrojte kružnici k_1 , kde $k_1(A, AB)$ a popište ji k_1 ; obdobně pro kružnici $k_2(C, CD)$. Nástrojem *Průsečík* sestrojte průsečíky kružnic k_1 a k_2 a pojmenujte je K_1 a K_2 .

Poznámka: Rychleji lze objekty přejmenovat tím, že ukazovátkem klikneme na daný objekt a přímo z klávesnice začneme psát nové jméno objektu. Automaticky se otevře okno pro přejmenování objektu.

Příklad (ukázání/skrytí objektu)

Sestrojte přímku p určenou body A, B a dva různé body $C, D \notin p$. Sestrojte přímku $k, C \in k \wedge k \perp p$; přímku $q, D \in q \wedge q \parallel p$. Pomocí kontextového menu jednotlivých objektů skryjte přímku q a název bodu C . Všimněte si, co se děje v algebraickém okně.

Poznámka: Totéž (skrytí objektu) lze provést kliknutím na kolečka před názvy objektů v algebraickém okně.

Příklad (vliv definice objektu na funkčnost nástrojů)

Sestrojte na nákresně vlevo tři nekolineární body A, B, C a na nákresně vpravo tři nekolineární body K, L, M . Dále sestrojte pomocí úseček trojúhelník ABC , pomocí nástroje *Mnohoúhelník* sestrojte trojúhelník KLM . Pokuste se vybarvit oba trojúhelníky, každý jinou barvou. (V případě trojúhelníku ABC to nepůjde, neboť pro program se nejedná o trojúhelník, ale tři různé úsečky).

- **Pozor** na vztah závislosti objektů (volné, částečně vázané, vázané objekty).
- Vypnutí zobrazení souřadnicových os lze zařídit jednak v horní liště nad geometrickým oknem, jednak v kartě *Vlastnosti* pro nákresnu.

Konstrukční úlohy

- **Konstrukce trojúhelníku**

- konstrukce s využitím bodů a úseček (tři nekolineární body spojené úsečkami), pomocí nástroje *Mnohoúhelník*, resp. *Pravidelný mnohoúhelník*

Příklad (výšky, průsečík výšek v trojúhelníku)

1. Sestrojte obecný trojúhelník ABC .
2. Sestrojte výšky (využijte nástroj *Kolmice*).
3. Nástrojem *Průsečík* sestrojte průsečík O (ortocentrum) dvou výšek.
4. Nástrojem *Vztah mezi dvěma objekty* (čtvrté menu zleva) testujte, zda bod O leží na zbývajících výškách.
5. Pomocí ukazovátka pohybuje jedním vrcholem trojúhelníku a pozorujte, jak se mění poloha ortocentra O .

Příklad (těžiště, vztah mezi dvěma objekty)

1. Sestrojte obecný trojúhelník ABC .
2. Sestrojte těžnice (využijte nástroj *Střed*).
3. Nástrojem *Průsečík* sestrojte průsečík T (těžiště) dvou těžnic.
4. Nástrojem *Vztah mezi dvěma objekty* (čtvrté menu zleva) testujte, zda bod T leží na zbývajících těžnicích.

Příklad (osy úhlů, kružnice vepsaná, popis objektu řeckými písmeny)

1. Sestrojte obecný trojúhelník ABC .
2. Sestrojte osy úhlů pomocí nástroje *Osa úhlu*. Všimněte si dvou možností zadání objektů pro nástroj – dvě přímky, dva body. Osy zobrazte čerchovanou čarou pomocí karty *Vlastnosti*.
3. Sestrojte průsečík S dvou os.

4. Vyznačte úsečkou poloměr kružnice vepsané a sestrojte ji. Pohybem jednoho vrcholu ověřte správnost konstrukce.
5. Pomocí kontextového menu (příkaz *Přejmenovat*) pro úsečku-poloměr kružnice ji přejmenujte na ρ (řecká písmena jsou v zobrazené kartě vpravo na konci řádku pod symbolem α).

Příklad

Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , jestliže $c = 9$ cm, $v_c = 6$ cm, $\alpha = 30^\circ$.

„Pevné“ řešení

1. Zvolte nástroj *Úsečka dané délky z bodu* (třetí menu zleva), klikněte na nákresně na místo, kde chcete zadat první krajní bod úsečky a do následně zobrazeného okna запиšte číslo 9. Získáte vodorovnou úsečku AB .
2. Nástrojem *Úhel dané velikosti* (čtvrté menu zleva) zadejte s pomocí nápovědy k nástroji úhel α (do zobrazeného okna zadáte velikost úhlu). Program zobrazí symbol úhlu u vrcholu A a zobrazí také bod B' na rameni úhlu α . Narýsujte polopřímku AB' .
3. Sestrojte rovnoběžku p s přímkou (resp. úsečkou) c ve vzdálenosti v_c (využijte nástroj *Kružnice daná středem a poloměrem*). Nalezněte průnik polopřímky AB' a p .
4. Sestrojte trojúhelník ABC . Pomocí *Ukazovátka* změňte polohu vrcholů. Co pozorujete?

„Dynamické“ řešení

1. Zvolte nástroj *Posuvník* (druhé menu zprava) a klikněte na nákresnu vpravo nahoře. V zobrazeném okně přejmenujte posuvník na c , rozsah od 0 do 15. Obdobně sestrojte posuvníky v_c , α . Ukazovátkem nastavte hodnoty posuvníků na údaje ze zadání příkladu.
2. Při konstrukci AB pomocí nástroje *Úsečka dané délky z bodu*, zadejte do zobrazeného okna místo délky název posuvnému c , obdobně postupujte při dalších konstrukcích.

Krokování a zápis konstrukce

- V geometrickém okně na místě, kde není žádný objekt, klikněte pravým tlačítkem myši. Ze zobrazené nabídky zvolte možnost *Navigační panel* a pomocí zobrazených tlačítek nad vstupním příkazovým řádkem krokujte konstrukci.
- V hlavním menu zvolte možnost **Zobrazit** a v ní možnost *Zápis konstrukce* (klávesová zkratka CTRL+Shift+L). Objeví se zápis konstrukce.

The screenshot shows a geometry software interface with the following components:

- Algebraické okno:** Lists objects like $C = (9.05, 3.66)$, $C_1 = (-1.34, 3.66)$, $X = (6.45, 2.16)$, and equations for a circle, line, and triangle.
- Nákresna:** Shows a construction with sliders for $c = 9$, $v_c = 6$, and $\alpha = 30^\circ$. A triangle ABC is shown with side c_1 on the x-axis, height h , and angle α at vertex A .
- Zápis konstrukce:** A table recording the construction steps.

Č.	Název	Popis	Hodnota	Popi...
1	Číslo c		$c = 9$	
2	Číslo v_c		$v_c = 6$	
3	Úhel α		$\alpha = 3...$	
4	Bod A		$A = (-1...$	
5	Bod B	Bod na Kružnice($B = (7...$	
6	Úsečka f	Úsečka [A, B]	$f = 9$	
7	Přímka g	Přímka	$g: x = -...$	

Úlohy

- Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které platí: $c = 6$ cm, $v_a = 4$ cm, $t_c = 4$ cm.
- Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , je-li dáno: $t_a = 4,5$ cm, $t_c = 6$ cm, $c = 7$ cm.
- Sestrojte všechny trojúhelníky KLM , jestliže $m = 8$ cm, $v_m = 1,5$ cm, $\mu = 60^\circ$.
- Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají kružnice $k = (S, 4$ cm) a přímky p , pro kterou platí $|Sp| = 3$ cm.

• Konstrukce čtyřúhelníku

- konstrukce s využitím bodů a úseček (čtyři nekolineární body spojené úsečkami), pomocí nástroje *Mnohoúhelník*, resp. *Pravidelný mnohoúhelník* (pro čtverec)

Příklad

Sestrojte všechny čtyřúhelníky $ABCD$, jestliže $|CD| = 4$ cm, $|AD| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|\angle ASB| = 90^\circ$, $|\angle ABC| = 90^\circ$, kde S je průsečík úhlopříček.

(Návod: Zkonstruujte trojúhelník ACD , dále použijte Thaletovu kružnici.)

• Nástroj *Tečna z bodu*

- umístěn ve čtvrtém ikonovém menu zleva
- sestrojí tečnu z bodu ke kuželosečce (zadááme bod a kuželosečku)
- sestrojí tečnu kuželosečky rovnoběžnou s danou přímkou (zadááme přímkou a kuželosečku)

Příklad

1. Zobrazte na nákrese dva různé body A , S . Dále sestrojte kružnici $k = (S, 4$ cm). Nyní nástrojem *Tečna z bodu* sestrojte tečny kružnice k vedené z bodu A . Pomocí ukazovátka měňte polohu bodu A vzhledem ke k (vnější, vnitřní bod, bod na kružnici). Pozorujte, co se děje.
2. Nástrojem *Kuželosečka daná pěti body* (páté ikonové menu zprava) sestrojte libovolnou kuželosečku (elipsu, hyperbolu, ...). Nyní z bodu A veďte pomocí stejného nástroje tečny ke kuželosečce. Ukazovátkem měňte polohu určujících bodů kuželosečky a pozorujte, co se děje.

• Konstrukce a vlastnosti tečnového čtyřúhelníku

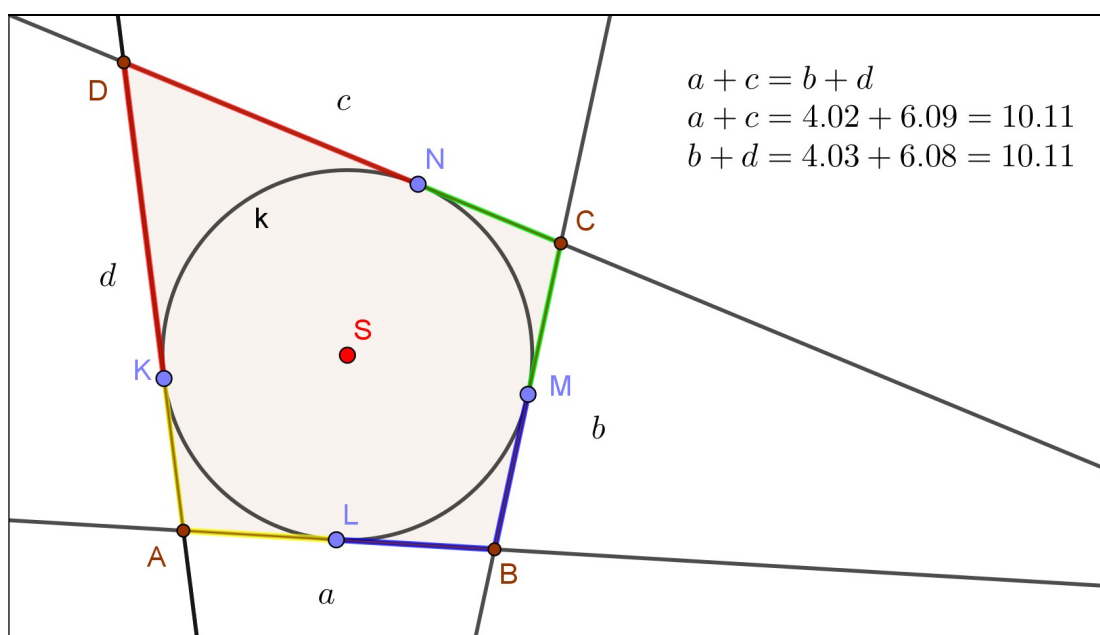
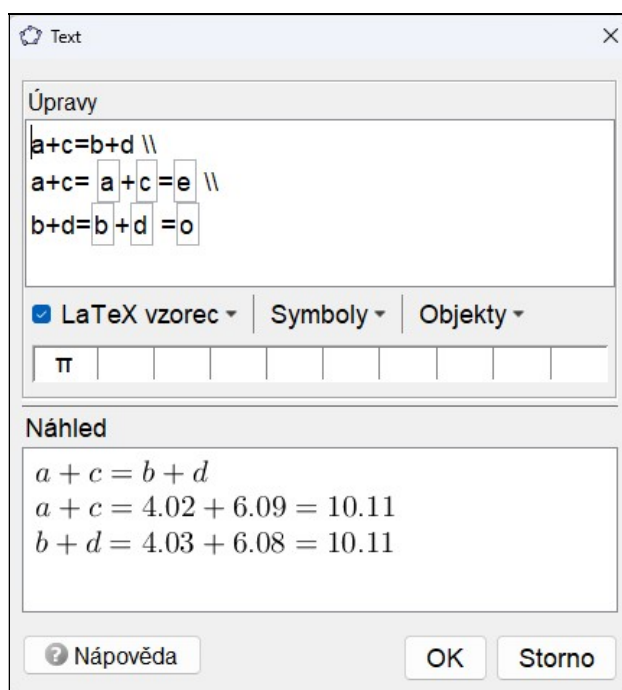
- **tečnový čtyřúhelník** je konvexní čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici (strany tohoto čtyřúhelníku jsou tečnami kružnice vepsané)
- **tvrzení:** konvexní čtyřúhelník je tečnový právě tehdy, jestliže součet délek jeho protějších stran je stejný

Příklad

1. Sestrojte libovolnou kružnici k a na ni zvolte čtyři různé body (nástrojem *Bod na objektu*).
2. Ve zvolených bodech sestrojte čtyři tečny kružnice pomocí nástroje *Tečny z bodu* (čtvrté menu zleva) a sestrojte také jejich průsečíky A , B , C , D . Dále sestrojte tečnový čtyřúhelník $ABCD$.
3. Narýsujte na stranách čtyřúhelníku úsečky, z nichž každá má krajní body ve vrcholu čtyřúhelníku a v bodě dotyku kružnice vepsané (tj. 8 úseček). Každou dvojici úseček,

keré vycházejí ze stejného vrcholu čtyřúhelníku obarvěte stejnou barvou (použijte postupně např. žlutou, červenou, modrou a zelenou barvu). Určete délky stran čtyřúhelníku a, b, c, d .

- Do vstupního řádku vložte zápis $a + c$ a stiskněte ENTER; po určení součtu délek úseček si všimněte v algebraickém okně, jakým symbolem je označen tento součet, např. e . Obdobně určete součet $b + d$, součet je v algebraickém okně např. označen f .
- Zvolte nástroj *Text* (druhé ikonové menu zprava) a klikněte na prázdné místo v nákresně. Sestavte dynamický text. Nejdříve zapište v zobrazeném okně $a + c$ (poté i pro $b + d$), na další řádek v okně *Text* vložte dynamický výpočet pro $a + c$, resp. $b + d$. Využijte v okně *Text* podmenu *Objekty*, viz následující obrázek.
- Následně měňte polohu bodů dotyku na kružnici k , pozorujte, co se děje v textovém okně.

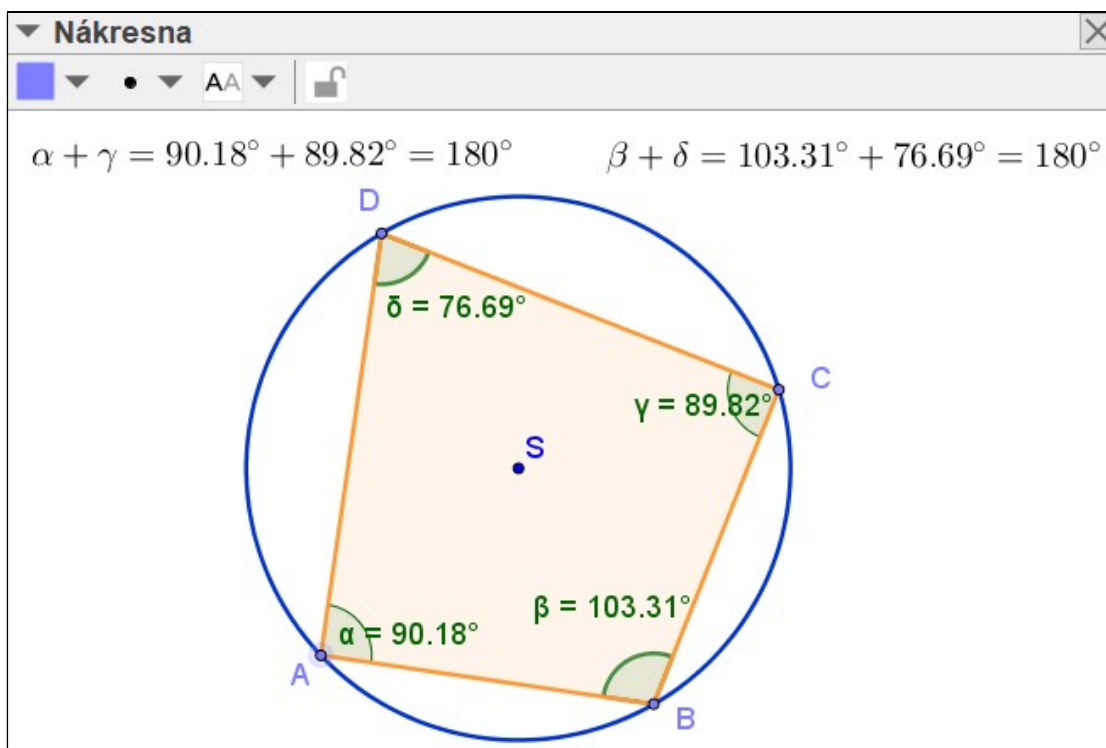


- **Konstrukce a vlastnosti tětívového čtyřúhelníku**

- **tětívový čtyřúhelník** je konvexní čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici (strany tohoto čtyřúhelníku jsou tětivami kružnice opsané)
- **tvrzení:** konvexní čtyřúhelník je tětívový právě tehdy, jestliže součet velikostí protějších vnitřních úhlů je 180°

Příklad

1. Sestrojte libovolnou kružnici k a na ni zvolte čtyři různé body A, B, C, D (nástrojem *Bod na objektu*).
2. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ (tětívový čtyřúhelník), kterému je opsána kružnice k .
3. Nástrojem *Velikost úhlu* určete velikost všech vnitřních úhlů čtyřúhelníku.
4. Zvolte nástroj *Text* a klikněte na prázdné místo v nákresně. Sestavte dynamický text na součet velikostí protějších vnitřních úhlů $\alpha + \gamma$ (poté i pro $\beta + \delta$). V textovém okně využijte podmenu *Objekty*. Zdůvodněte uvedené součty velikostí úhlů.



Úlohy

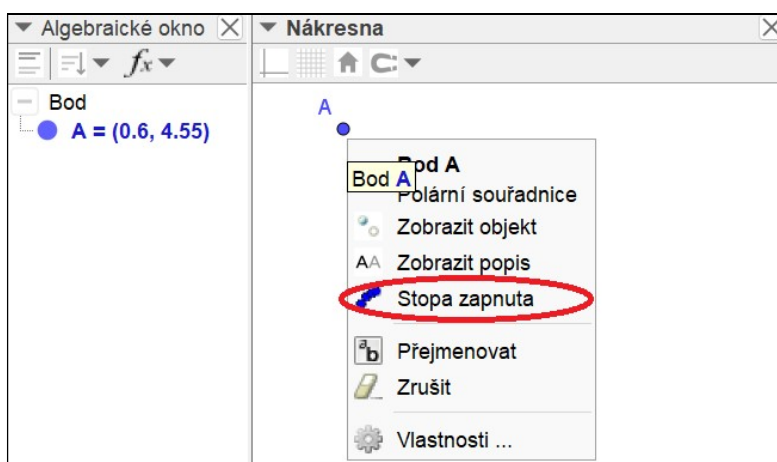
- Určete, které ze čtyřúhelníků čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník a deltoid patří mezi tečnové a tětívové.
(tětívové – čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník, deltoid s 2 protějšími pravými úhly; ty splňují podmínku o součtu velikostí protějších vnitřních úhlů;
tečnové – čtverec, rovnoramenný lichoběžník s délkou střední příčky rovnou délce ramen, každý deltoid;
dvojtředové – čtverec, deltoid s 2 protějšími pravými vnitřními úhly)

Množiny bodů dané vlastnosti

Při zkoumání či sestrojování množin bodů dané vlastnosti využíváme v prostředí GeoGebry nástroje *Stopa* a *Množina bodů*.

• Nástroj *Stopa*

- stopa objektu (bodu, přímky, kuželosečky, ...) se zapíná či vypíná pomocí kontextového menu (zpřístupníme ukázáním na objekt a následným stlačením pravého tlačítka myši)
- stopa se maže příkazem *Překreslit* (CTRL+ F) z menu **Zobrazit**, nebo změnou měřítka nákresny či posunem nákresny
- stopa je statický objekt, software s ní dále nepracuje a ani neidentifikuje



Příklad

Narýsujte úsečku AB a posuvník r , jehož rozsah hodnot bude od 0 do 15 (krok 0,1). Nyní sestrojte nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem* kružnice se středy v A i B a stejnými poloměry r . Sestrojte průsečíky X , Y obou kružnic a zapněte jejich stopu. Pohybuje posuvníkem r a pozorujte, co se děje. Jakou množinu bodů vykreslí stopy bodů X , Y ?

• Nástroj *Množina bodů*

- umístěn ve čtvrtém ikonovém menu zleva
- používá se k vytvoření množiny objektů, která vznikne pohybem bodu po jiném objektu
- nejprve ve vytvořeném rysu klikneme na bod, např. X , jehož polohy/stopy vykreslí množinu dané vlastnosti a poté na bod na objektu (případně posuvník), který „řídí“ změnu polohy bodu X
- množinu smažeme stejným způsobem jako jiné objekty

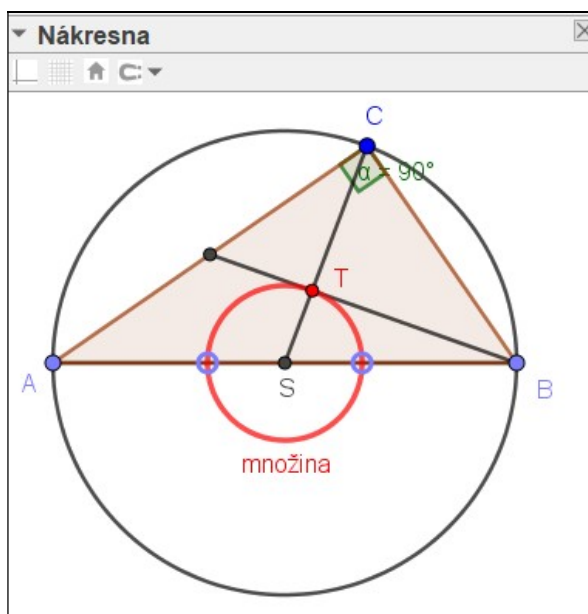
Příklad

Pokračujte v předchozím příkladu. Nyní v rysu aktivujte nástroj *Množina bodů* (nejdříve ukažte na průsečík X , potom na posuvník r). Co se děje? Totéž učiníme s druhým průsečíkem Y .

Úloha

Pomocí GeoGebry určete množinu všech těžišť pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou AB .

(Návod: Sestrojte kružnici nad průměrem AB , dále umístěte na kružnici bod C . Narýsujte dvě těžnice v trojúhelníku ABC , určete těžiště T a zapněte jeho stopu. Změnou polohy bodu C na kružnici získáváte různé pravoúhlé trojúhelníky; pozorujte, jakou množinu bodů vykreslují stopy bodu T . Poté využijte nástroj *Množina bodů*.)



Úlohy

- Vytvořte rys na demonstraci osy úhlu pomocí nástroje *Stopa*, poté pomocí nástroje *Množina bodů*.
- Sestrojte rys na demonstraci ekvidistanty přímky pomocí nástroje *Stopa*, resp. *Množina bodů*.
- Sestrojte rys na vizualizaci ekvidistanty kružnice, využijte nástroj *Stopa*, poté i nástroj *Množina bodů*.
- Sestrojte elipsu jako množinu všech bodů v rovině, která má konstantní součet vzdáleností od zadaných ohnisek.
- Sestrojte parabolu jako množinu všech bodů v rovině, která má stejnou vzdálenost od dané přímky a daného bodu, který neleží na dané přímce.

Hlavní rozdíly mezi stopou a množinou

- stopa je statický objekt (po vykreslení se nemění), který GeoGebra neidentifikuje (v algebraickém okně nemá přiřazené žádné algebraické vyjádření)
- množina je dynamický objekt (s měnícími parametry konstrukce se také mění)

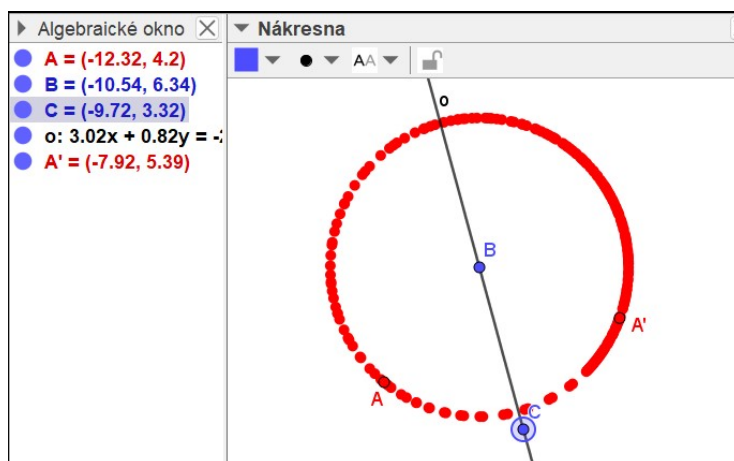
Zobrazení v rovině

- nástroje pro zobrazení umístěny ve třetím ikonovém menu zleva
- **Nástroj *Osová souměrnost, Středová souměrnost, Posunutí, Otočení, Stejnolehlost, Kruhová inverze***
 - nástroje pro zobrazení vyžadují, aby před jejich využitím v nákresně již existovaly objekty jednoznačně určující dané zobrazení (např. pro osovou souměrnost musí být sestrojena přímka, která bude osou souměrnosti)
 - pro sestrojení obrazu objektu v požadovaném zobrazení nejdříve klikneme na vzor, poté na objekty určující dané zobrazení (např. na přímku, která je osou souměrnosti)

Příklad (osová souměrnost)

Je dána úsečka AB libovolné nenulové délky. Určete množinu všech obrazů bodu A v osové souměrnosti podle všech přímek, procházejících bodem B .

(Návod: Sestrojte A , B , libovolnou přímku p , $B \in p$. Označte obraz bodu A v osové souměrnosti A' , zapněte stopu A' , rozpoehybuje přímku p .) Promyslete změnu rysu, pokud bychom množinu obrazů bodu A chtěli získat příkazem *Množina*.



Příklad - pokračování

Využijte předchozího rysu, smažte stopu. Dále sestrojte rovnoběžník určený body ABA' . Zbývající čtvrtý vrchol rovnoběžníku označte X . Zapněte také jeho stopu a pozorujte, jakou množinu bodů vytvoří stopy bodu X pokud budeme hýbat osou procházející bodem B .

Příklad (středová souměrnost)

Je dána úsečka CS délky 3 cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je CS těžnicí t_c , je-li dále dáno: $a = 3,5$ cm, $b = 5$ cm.

(Návod: Vpravo na nákresně sestrojte posuvníky t_c , a , b . Sestrojte úsečku CS a S zvolte za střed středové souměrnosti. Hledaný bod B leží na kružnici $l = (C, a)$ a na obrazu k' kružnice $k = (C, b)$.)

Příklad (posunutí)

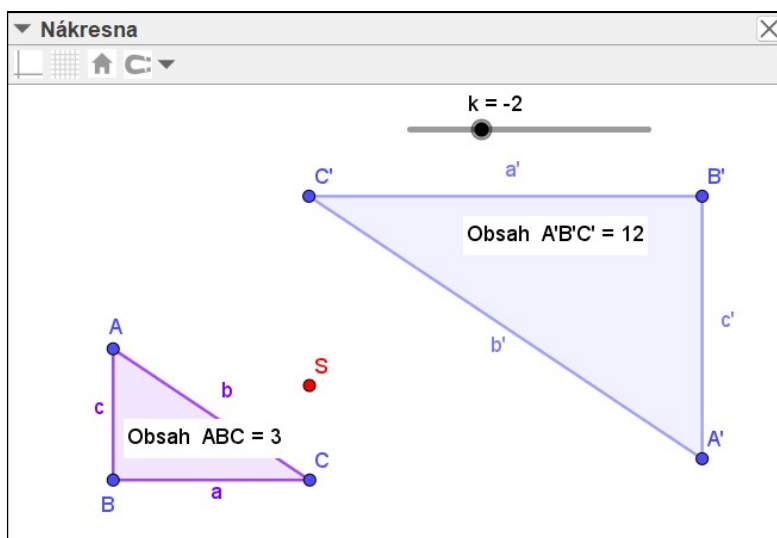
Je dán vektor u a také

- kružnice k ,
- přímka p .

Sestrojte nejdříve obraz jednoho bodu X kružnice k , resp. přímky p , v posunutí zadaném vektorem u . Zapněte stopu obrazu X' a pohybujte bodem X . Co je obrazem kružnice, resp. přímky v posunutí? Jaká je vzájemná poloha přímek p, p' ?

Příklad (stejnolehlost)

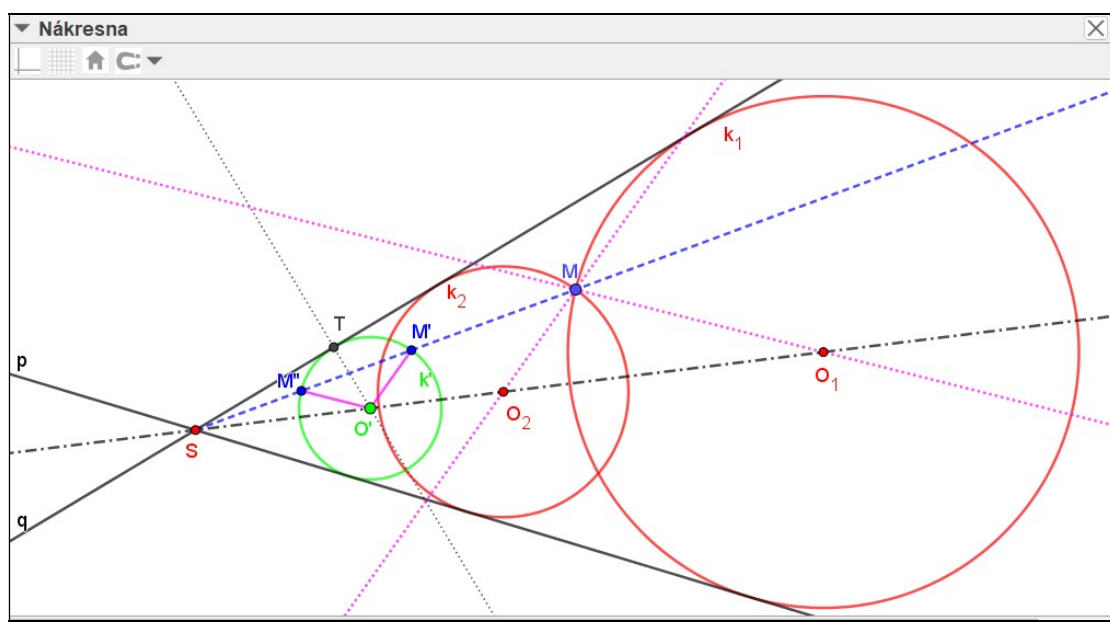
Sestrojte posuvník (reprezentující koeficient stejnohlosti) a nastavte ho na hodnotu -2 . Dále sestrojte bod S a mimo tento bod trojúhelník ABC . Sestrojte obraz trojúhelníku ve stejnohlosti se středem S a koeficientem -2 , správně popište vrcholy obrazu (stejnolehlost v rovině je přímá podobnost). Nástrojem *Obsah* změřte jejich obsahy. Určete podíl obsahů trojúhelníků. Jaký vztah platí mezi obsahem obrazu trojúhelníka a obsahem vzorového trojúhelníka? (Odpověď: Podíl obsahů je λ^2 .)



Příklad (stejnolehlost; Apolloniova úloha)

Jsou dány dvě různoběžky p a q a bod M ležící mimo ně. Sestrojte kružnici k takovou, že se dotýká obou přímek a prochází bodem M .

(Návod: zkonstruujte nejprve pomocnou kružnici k' , která se dotýká přímek p a q , ale bodem M nemusí procházet, dále využijte stejnohlosti se středem v průsečíku různoběžek, ve které je obrazem hledané kružnice k pomocná kružnice k' .)



Makrokonstrukce

- **menu Nástroje** – hlavní páte menu zleva
 - obsahuje nástroje **Vytvořit nový nástroj** (v něm vnořeny *Vstupní objekty*, *Výstupní objekty*, *Název a ikona*), dále **Správa nástrojů**, **Nastavit panel nástrojů**
- **vytvoření makrokonstrukce**
 - nejdříve provedeme konstrukci, tj. vyhotovíme rys
 - dále zvolíme menu **Nástroje**, zde pak nástroj **Vytvořit nový nástroj**
 - v zobrazeném okně postupně zadáme *Vstupní objekty* (objekty vybíráme buď z nabídky v řádku označeném šipkou, nebo klepnutím na objekt v rysu), dále zvolíme v okně *Výstupní objekty* a zadáme je obdobným způsobem; nakonec zvolíme možnost *Název a ikona* – zde lze zadat název nástroje, ikonu, název příkazu včetně nápovědy k makrokonstrukci (nový nástroj se objeví v ikonovém menu, název příkazu lze zadávat ve vstupním řádku; ikonu lze vybrat z libovolných obrázků uložených v PC, či vytvořit v nějakém software); zadání makrokonstrukce ukončíme tlačítkem „Dokončit“ (nápověda k makrokonstrukci se také vytvoří automaticky, či ji lze upravit ve **Správě nástrojů** – viz dále)
- **uložení makrokonstrukce** – pro uložení makrokonstrukce do paměti je třeba zvolit v hlavním menu možnost **Nástroje** a zde možnost **Správa nástrojů** – v zobrazené kartě pak zadáme „Uložit jako“; makrokonstrukce mají příponu *.ggt; makrokonstrukce lze uložit do libovolného adresáře
- **použití makrokonstrukce** – ikona vytvořené makrokonstrukce se připojí do ikonového menu Geogebry za poslední ikonu a s touto makrokonstrukcí pracujeme stejně jako s ostatními nástroji Geogebry; makrokonstrukce je přístupna pouze do skončení práce s Geogebrou, před ukončením práce je třeba otevřít menu **Nástroje**, podmenu **Správa nástrojů** a zde v zobrazeném okně kliknout na každou nově vytvořenou makrokonstrukci a dát „Uložit jako“ včetně vybrání adresáře, kam se makrokonstrukce uloží
- **otevření již vytvořené makrokonstrukce** - při novém spuštění programu GeoGebra musíme načíst požadované hotové makrokonstrukce - zvolíme příkaz *Otevřít* z hlavního menu **Soubor**; dále je potřeba ještě zařadit makrokonstrukci mezi nástroje – zvolíme menu **Nástroj**, zde podmenu **Nastavit panel nástrojů**, kde v zobrazené kartě vpravo uvidíme makrokonstrukci, kterou přesuneme do levé části karty do panelu nástrojů

Příklad

Vytvořte postupně tři makrokonstrukce, které v daném trojúhelníku sestojí:

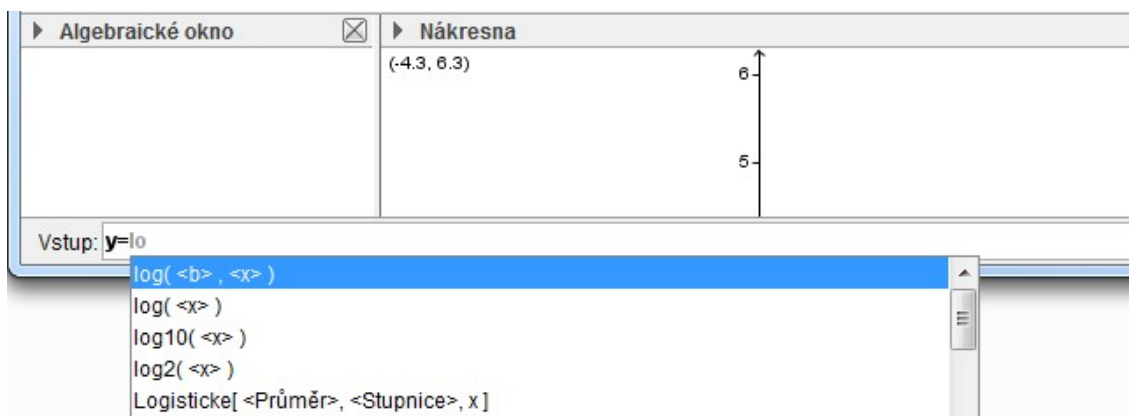
- a) všechny střední příčky,
- b) výšky a ortocentrum,
- c) těžnice a těžiště.

(Návod: Sestrojte obecný trojúhelník, pak požadované objekty. Aktivujte **Nástroje–Vytvořit nový nástroj** a postupujte podle výše napsaného návodu.)

Grafy funkcí a vlastnosti funkcí

• Zadávání funkcí

- předpis funkce zadáváme ve vstupním poli (nezávislá proměnná vždy značena x , místo desetinné čárky píšeme tečku), v algebraickém okně se objeví daný předpis, v nákrešně se zobrazí graf funkce
- při zadávání předpisů funkcí lze využívat „našeptávač“ ve vstupním poli (tj. při zápisu předpisu funkce či příkazu do vstupního pole se nabízí u vstupního pole možnosti):



Příklad (zadání předpisu funkce a zobrazení grafu funkce)

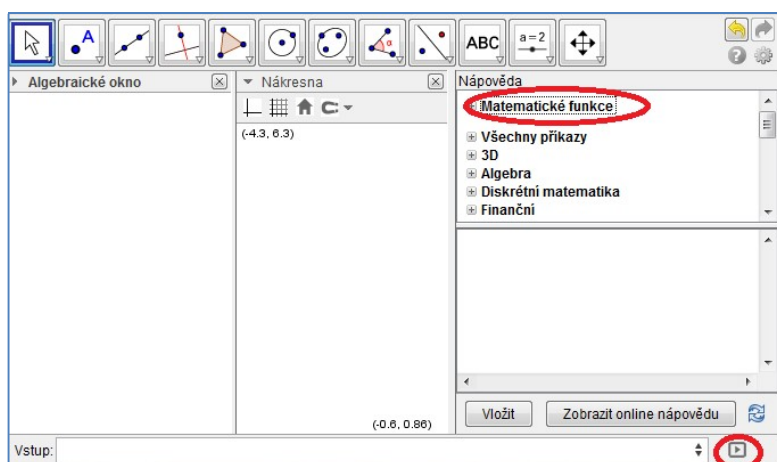
Do vstupního pole postupně zadejte tyto předpisy, po vložení každého předpisu stiskněte klávesu ENTER:

$$y = -2x + 1, k: y = -x^2 + 1, f(x) = 3x^2 - 4x, g: y = (x+1)/(x-1), h: y = (x+4)(x-1)$$

Všimněte si zápisu těchto funkcí v algebraickém okně (funkce-kuželosečka).

Shrnutí: Při zadávání předpisů lineárních a kvadratických funkcí musíme používat zápis $f(x) = \dots$, $g(x) = \dots$, jinak program GeoGebra interpretuje vložený předpis jako rovnici kuželosečky (přímky, nebo paraboly).

- speciální symboly v předpisu funkce (mocnina ², odmocnina, základ e , číslo π) lze vkládat pomocí virtuální klávesnice (dostupné přes menu *Zobrazit*)
- nabídka předpisů různých funkcí se zobrazí po kliknutí na šipku, která je vpravo vedle vstupního pole (dojde k vyvolání okna *Nápověda*, zde volba podmenu *Matematické funkce*)



Příklad (zadání předpisu funkcí absolutní hodnota, n -tá odmocnina, signum ...)

Do vstupního pole postupně zadejte tyto předpisy, po vložení každého předpisu stiskněte klávesu ENTER. Využijte nabídku funkcí v okně *Nápověda*:

$$y = |2x - 4|, y = \sqrt[n]{x}, y = \text{sgn}(x)$$

Matematické funkce	Vstup
umocňování	^
absolutní hodnota	abs()
signum	sgn()
druhá odmocnina	sqrt()
třetí odmocnina	cbirt()
n -tá odmocnina	ntaOdmocnina(x,n)
exponenciální funkce	exp() nebo e^x
logaritmus (přirozený, se základem e)	ln() nebo log()
logaritmus se základem 2, se základem b	ld(), log(b , ...)
logaritmus se základem 10	lg(), log10()
kosinus, sinus, tangens, kotangens	cos(), sin(), tan() či tg(), cot()

- změnu předpisu funkce lze provést v algebraickém okně (dvojitým kliknutím na předpis funkce se otevře editační okno, kde můžeme předpis změnit), případně tažením grafu po nákrese
- barvu i styl čáry grafu funkce lze měnit v menu *Vlastnosti* pro daný graf

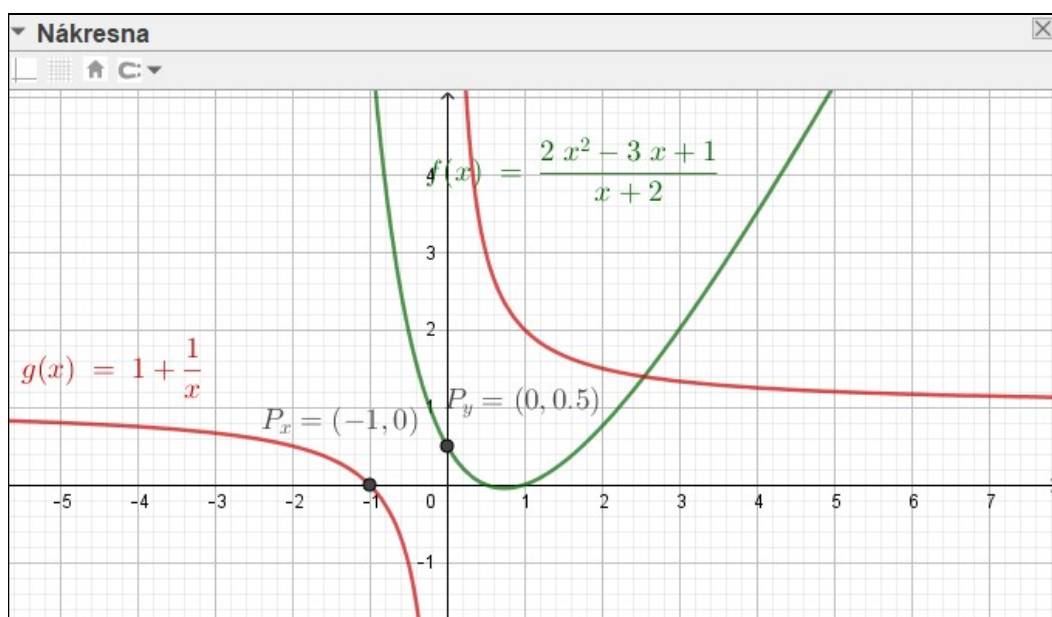
Příklad (popis grafu funkce a bodů na grafu)

Do vstupního pole zadejte předpisy následujících funkcí, grafy obarvete modře a červeně, zvolte silnější čáry:

$$f: y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}, \quad g: y = 1 + \frac{1}{x}$$

Otevřete pro graf f menu *Vlastnosti* a v kartě *Základní* v poličku *Zobrazit popis* volte jednotlivé možnosti, kterou jsou u popisu k dispozici (např. *Název*, *Hodnota*,...). Pozorujte, jak se mění popis grafu v nákresně.

- Sestrojte průsečíky obou grafů (použijte nástroj *Průsečík*).
- Obdobně sestrojte průsečík grafu g s osou x a grafu f s osou y , pojmenujte je P_x a P_y .
- Nyní otevřete menu *Vlastnosti* pro bod P_y a zvolte kartu *Základní*. V této kartě do pole *Popisek* zapište výraz $\$%n = \%v\$$ a následně v poli *Zobrazit popis* zvolte z rozbalovacího menu *Popisek*. Nyní porovnejte značení obou průsečíků v rysu.



Příklad (znázornění $D(f)$ a $H(f)$)

- Do vstupního pole zadejte předpis funkce $y = \sqrt{2x + 8}$ a na zobrazeném grafu zadejte bod A . Z bodu A spusťte kolmice na osu x a osu y , sestrojte paty těchto kolmic P_x (barva červená) a P_y (barva modrá). Nyní skryjte kolmice a sestrojte úsečku AP_x (barva červená, styl čárkovaný), úsečku AP_y (barva modrá, styl čárkovaný). U osy x umístěte nástrojem *Text* červený text $D(f)$ a u osy y modrý text $H(f)$. Zapněte stopy bodů P_x , P_y a pohybujte bodem A po grafu funkce.
- Zobrazte mřížové body v grafickém okně. Obdobně jako v a) nyní zobrazte $D(f)$ a $H(f)$ pro graf funkce $y = -|x + 2| + 6$, která je definována na intervalu $\langle -4, 6 \rangle$.

• dynamické grafy

pro zobrazení dynamického grafu je vhodné využívat posuvníky, které představují parametry v předpisu funkce

Příklad (zobrazení grafu kvadratické funkce s obecným předpisem)

Sestrojte graf obecné kvadratické funkce. Na nákrese nejprve zadejte tři posuvníky nazvané a , b , c , jejich hodnoty nastavte od -10 do 10 (krok pro změnu hodnot posuvníku volte $0,1$). Do vstupního pole запиšte $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ a stiskněte ENTER. Pomocí ukazovátka měňte hodnoty posuvníků.

Příklad (zobrazení grafu mocninné funkce pro přirozený, celý a racionální exponent)

Sestrojte graf mocninné funkce pro případy, kdy exponent je přirozené, celé či racionální číslo. Na nákrese nejprve zadejte posuvník n (rozsah 1 až 10 s krokem 1) – přirozený exponent, dále posuvník c (rozsah od -10 do 10 s krokem 1) – celý exponent, nakonec posuvník q (rozsah od -10 do 10 s krokem $0,1$) – racionální exponent. Postupně sestrojte grafy funkcí $f(x) = x^n$, $g(x) = x^c$, $h(x) = x^q$ a každý graf obarvěte jinou barvou a zapněte v kartě vlastností možnost *Zobrazit popis: Název&Hodnota*. Nyní sestrojte pro každou funkci nástrojem *Zaškrťovací políčko* možnost pro skrývání/zobrazování grafu funkce a příslušného posuvníku.

- **tabulka hodnot**

- tabulku zobrazíme jako další pracovní okno v hlavním menu *Zobrazit*, nástroj *Tabulka* (klávesová zkratka CTRL+SHIFT+S)
- po umístění kurzoru do okna tabulky se změní nástrojová lišta (nyní obsahuje několik příkazů pro práci s tabulkou)
- do tabulky lze zaznamenávat souřadnice bodu pohybujícího se po grafu funkce (v kontextovém menu bodu možnost *Zaznamenat do tabulky*), či sestavit tabulku funkčních hodnot obdobně jako v Excelu

Příklad (vytvoření tabulky funkčních hodnot)

- Sestrojte posuvníky a , b (oba rozsah od -10 do 10). Do vstupního pole zadejte předpis polynomicke funkce $f(x) = ax + b$, zobrazte její graf a popis. Zobrazte tabulku. Do buňky A1 запиšte v uvozovkách symbol x , do buňky A2 v uvozovkách symbol $f(x)$. Dále do buňky B1 vložte hodnotu -2 , do C1 hodnotu -1 (tím jsme nastavili krok pro hodnoty x). Označte buňky B1 a C1 a roztáhněte ohraničení až do buňky J. Do buňky B2 vložte výraz $f(B1)$ a opět roztáhněte ohraničení ve druhém řádku až do J. Nyní označte kurzorem všechna pole tabulky a pomocí pravého tlačítka myši zobrazte kontextové menu a zvolte možnost *Vytvořit tabulku* (zobrazenou tabulku zvýrazněte modrou barvou).

- Nyní zadejte do vstupního pole funkci $g(x) = \frac{1}{x+a}$. Sestavte a zobrazte tabulku hodnot pro x od -4 s krokem $0,5$.

- **Grafické řešení rovnic a nerovnic**

- nejprve zobrazíme grafy funkcí, jejichž předpisy jsou dány levou, resp. pravou stranou rovnice

- pokud má rovnice jednu stranu nulovou, použijeme pro řešení průsečíky (resp. nástroj *Nulové body*) s osou x , v opačném případě sestrojíme průsečíky obou grafů funkcí z levé a pravé strany rovnice

Úloha (grafické řešení rovnice)

Graficky řešte rovnici $|x - 2| + |x + 2| = 2x + 2$ s reálnou neznámou x .

Úloha (grafické řešení rovnice s parametrem)

Graficky řešte rovnici $|x - 2| + |x + 2| = p$ s reálnou neznámou x a reálným parametrem p .

• Diferenciální a integrální počet

- v programu GeoGebra je k dispozici řada příkazů pro zkoumání vlastností funkce, příkazy lze najít v *Nápovědě* v podmenu *Funkce&Kalkulus* (např. příkaz *Asymptota*, *Derivace*, *Extrem*, *Inflexní bod*, *Integral*, *Limita*, *NuloveBody*)
- při určování funkčních hodnot, nulových bodů či extrémů s pomocí programu GeoGebra je třeba si uvědomit, že v případě iracionálních číselných hodnot, nebo racionálních čísel s periodou program výsledky zaokrouhlí (tj. nejsou přesné)

Příklad (vlastnosti funkce I)

Zobrazte graf funkce $f: y = x^3 + x^2 - 2x$ a zobrazte její graf. Určete:

- asymptoty grafu, nulové body
- první derivaci a druhou derivaci
- extrémy (označte je jako body D , E , do vstupního pole zapište *ZlomekText[D]*, resp. *IracionalniText[D]*)
- inflexní body (označte ho jako F , do vstupního pole zapište *IracionalniText[F]*)
- neurčitý integrál, určitý integrál od -2 do 1
- na grafu f sestrojte bod X a skryjte ostatní grafy a body, dále sestrojte tečnu ke grafu f v bodě X (v kartě základních vlastností tečny zapište do pole *Popisek* výraz $\$%v\$$, zapněte zobrazení popisku), pohybuje bodem X a pozorujte, jak se mění rovnice tečny

Příklad (vlastnosti funkce II)

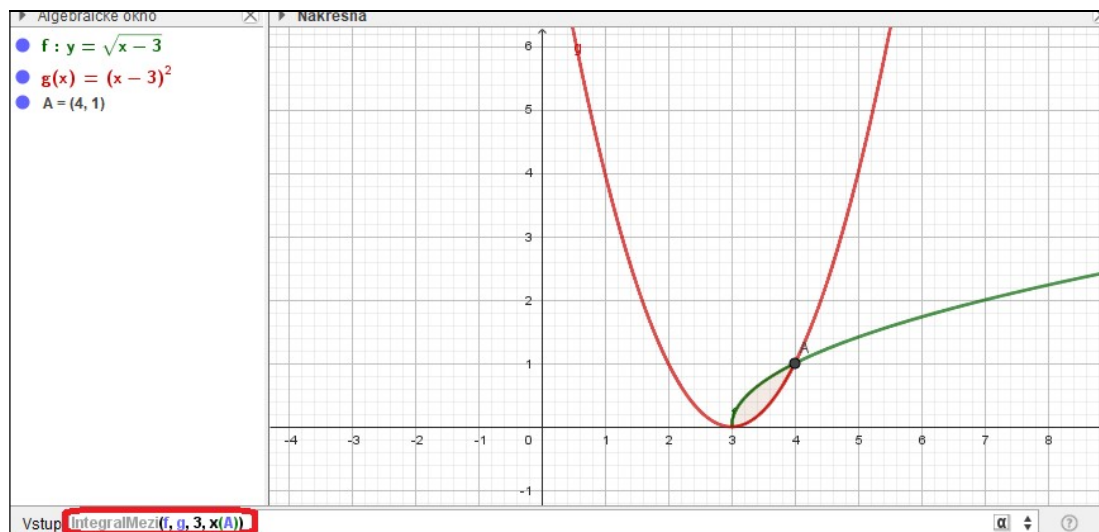
Zobrazte graf funkce $g: y = \frac{x^2}{x+1}$ a zobrazte její graf. Pomocí příkazů z menu

Funkce&Kalkulus určete:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} g$
- asymptoty grafu, extrémy (přes meze intervalu)
- první derivaci
- neurčitý integrál

Úloha (výpočet obsahu obrazce vymezeného grafy funkcí)

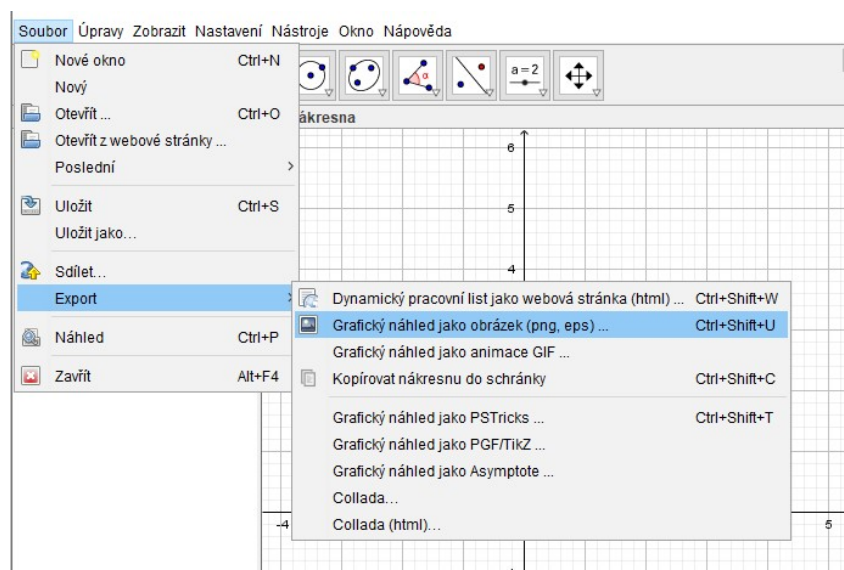
Určete obsah obrazce omezeného grafy funkcí $f: y = \sqrt{x-3}$, $g: y = (x-3)^2$. (Návod: využijte příkaz *IntegralMezi* v menu *Nápověda*).



Export obrázků nákresny

Postup exportování obrázků z GeoGebry (při otevřeném poli Nákresna se exportuje to, co je vidět v okně Nákresna)

1. Sestrojíme v nákresně požadovaný obrázek, schéma či graf.
2. Upravíme velikost okna Nákresny (tažením za hranice oblasti) tak, aby nákresna obsahovala přesně to, co má být na obrázku (neponecháváme zbytečně volné místo okolo objektů).
3. V menu **Soubor** zvolíme možnost **Export** a zde možnost **Grafický náhled jako obrázek**.
4. V následně zobrazené kartě zvolíme typ soubor (obvykle *.png), upravíme velikost obrázku a uložíme ho do konkrétního adresáře.



Stereometrie

- **Zobrazování těles v nákresně (2D)**

- v nákresně lze zobrazovat tělesa ve volném rovnoběžném promítání; rys konstruujeme v podstatě stejným způsobem jako pravítkem a tužkou na papír; využíváme přitom zobrazení jako otočení a posunutí

Příklad – sestrojení pravidelného čtyřbokého jehlanu v rovnoběžném promítání

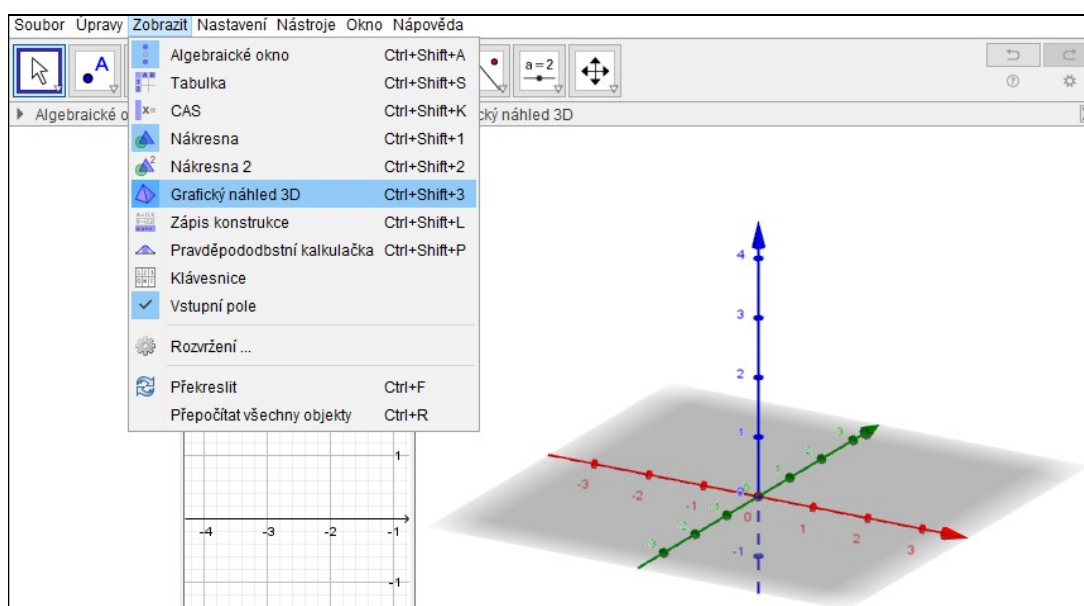
Sestrojte dynamický rys pro pravidelný čtyřboký jehlan ve volném rovnoběžném promítání. Pro rozměry jehlanu použijte posuvníky a , v (výška jehlanu), pro promítání použijte posuvníky α , q (zkrácení).

Úloha (sestrojení pravidelného šestibokého hranolu v rovnoběžném promítání)

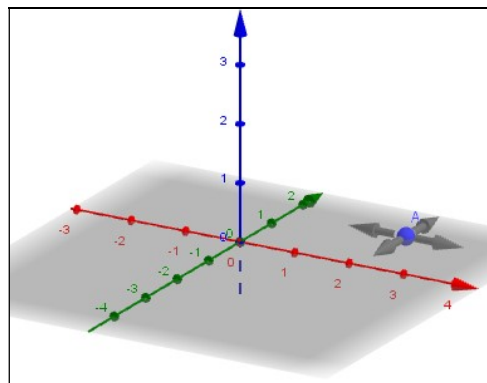
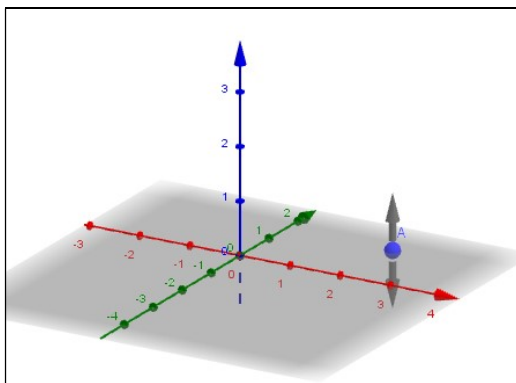
Sestrojte totéž jako v předchozím příkladu pro pravidelný šestiboký hranol. Zadejte na hranolu tři body určující rovinu a sestrojte řez hranolu rovinou. Pohybuje danými třemi body a pozorujte, co se děje.

- **Zobrazování těles v GeoGebře 3D**

- okno GeoGebry 3D aktivujeme v menu **Zobrazit**, zde zvolíme **Grafický náhled 3D**



- ikonové menu v horním řádku se mění dle toho, zda pracujeme v nákresně 2D, či v grafickém náhledu 3D
- nástroje 3D zahrnují navíc konstrukci kolmice k rovině, průnik dvou ploch, konstrukci rovin (dané 3 nekolineárními body, roviny kolmé k přímce, roviny rovnoběžné s jinou rovinou), konstrukce základních těles; z metrických nástrojů je navíc k dispozici měření objemu těles, dále jsou k dispozici základní shodná zobrazení v prostoru



- **Konstrukce bodu ve 3D okně**

- bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...);
- po kliknutí na volný bod se zobrazí u tohoto bodu šipky ve svislém směru (obr. vlevo; lze měnit polohu bodu ve svislém směru), či po dalším kliknutí se zobrazí šipky rovnoběžné se základní rovinou (obr. vpravo; lze měnit polohu rovnoběžně se základní rovinou); každým kliknutím na bod přepínáme mezi uvedenými směry pohybu
- využití posuvníku pro konstrukci pohyblivého bodu - v nákrešně sestrojíme posuvník (význam souřadnice z), poté v příkazovém řádku zadáme **Bod(seznam)** a do množinových závorek napíšeme souřadnice bodu s tím, že na poslední souřadnice napíšeme název posuvníku

- **Konstrukce těles ve 3D okně**

- aktivujte postupně různé nástroje (*Jehlan, Hranol, Kužel, Válec, ...*) pro konstrukci těles v šestém ikonovém menu zleva (musí být aktivní okno 3D); bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...); postupujte dle nápovědy nástroje
- v menu pro konstrukci těles je k dispozici nástroj **Sít'**, který zobrazí síť daného tělesa (nástroj zobrazuje stále stejný typ, i když existují další typy sítí daného tělesa)

- **Polohové úlohy 3D**

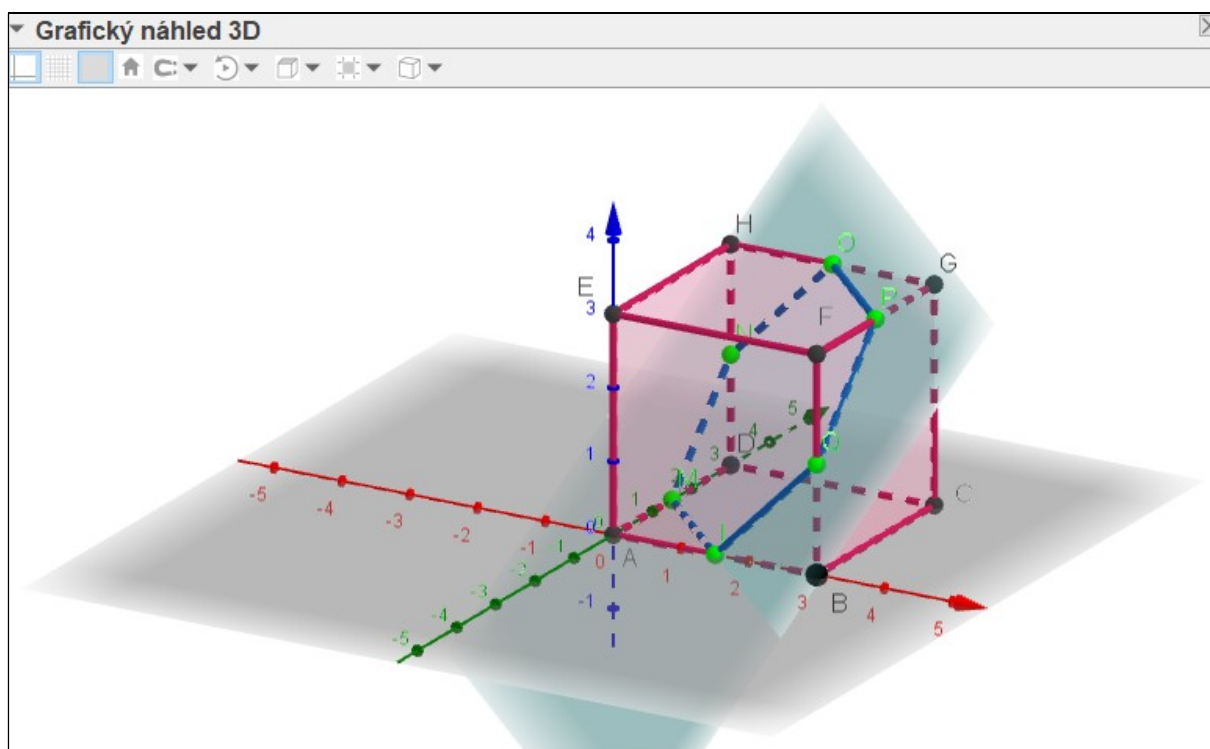
- aktivujte postupně různé nástroje (**Jehlan, Hranol, Kužel, Válec, ...**) pro konstrukci těles v šestém ikonovém menu zleva (musí být aktivní okno 3D); bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...); postupujte dle nápovědy nástroje

Příklad – vzájemná poloha tří rovin v prostoru

Sestrojte rys na vzájemnou polohu tří rovnoběžných různých rovin, využijte pohyblivého bodu, kterým povedete druhou rovinu, případně i nový pohyblivý bod pro třetí rovinu.

Příklad – řez tělesa rovinou

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou a) $S_{FGS_{GH}S_{AD}}$, b) $S_{AES_{AB}S_{EG}}$.



Příklad – průsečnice dvou rovin

Sestrojte v pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ průsečnice dvou rovin a) ACV , BDS_{CV} , b) BDV , $S_{BCS_{CV}K}$, kde K je bod hrany AD a leží v jedné čtvrtině hrany blíže k vrcholu A .

Příklad

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zkoumejte, jak vypadá řez této krychle rovinou, která je kolmá na tělesovou úhlopříčku (tj. rovina řezu je pohyblivá).

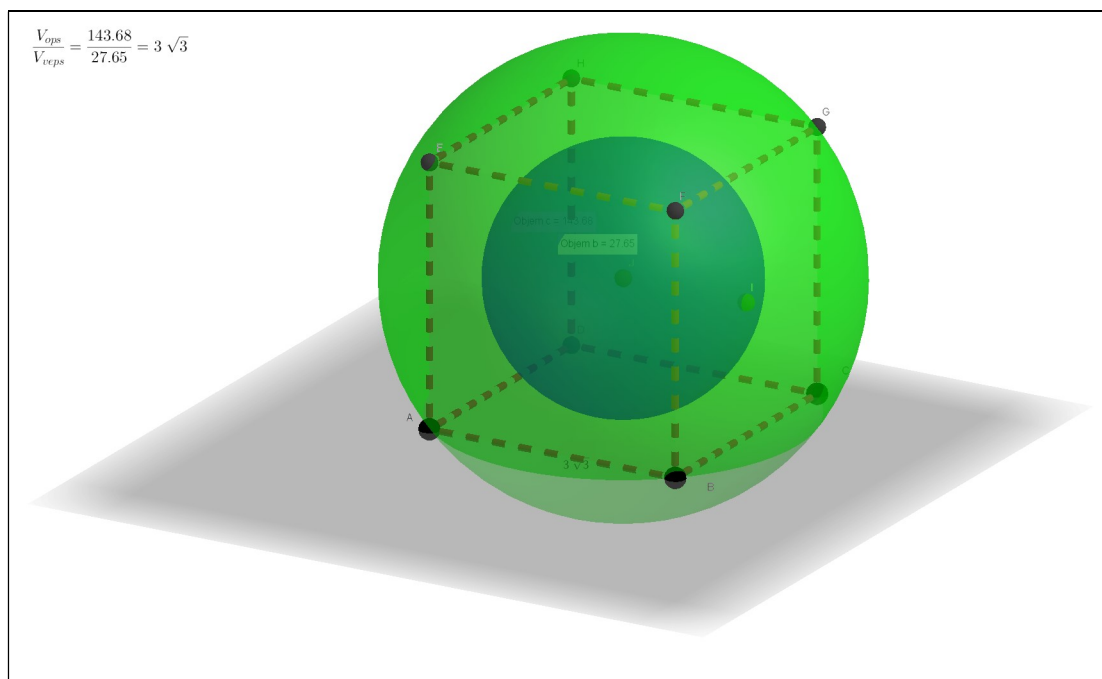
Návod: Sestrojte krychli a označte její vrcholy. Dále sestrojte přímku AG . Na této přímce sestrojte bod K , který leží vně krychle (nejlépe „nad“ bodem G). Nyní narýsujte rovinu, která prochází bodem K a je kolmá na přímkou AG . Ukazovátkem uchopte bod K a posuňte rovinu řezu tak, aby protínala krychli. Nástrojem *Průnik dvou ploch* vytvořte řez a pomocí pravého tlačítka myši upravte pohled na rys tak, aby byl vidět řez. Nyní pohybujte bodem K směrem k bodu A a pozorujte, jak se mění tvar řezu.

- **Metrické úlohy 3D**

- aktivujte postupně různé metrické nástroje (**Úhel**, **Vzdálenost**, **Obsah**, **Objem** pro měření těles (délky hran, tělesové stěnové výšky; povrchy a objemy těles)
- konstrukci těles v šestém ikonovém menu zleva (musí být aktivní okno 3D) bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...); postupujte dle nápovědy nástroje

Příklad

Určete poměr objemů koule opsané a vepsané libovolné krychli. Využijte nástroj *Objem*. Měňte polohu některého z vrcholů krychle a pozorujte, jak se mění objemy obou koulí i jejich poměr. Zdůvodněte ($V_1 : V_2 = 3\sqrt{3}$).



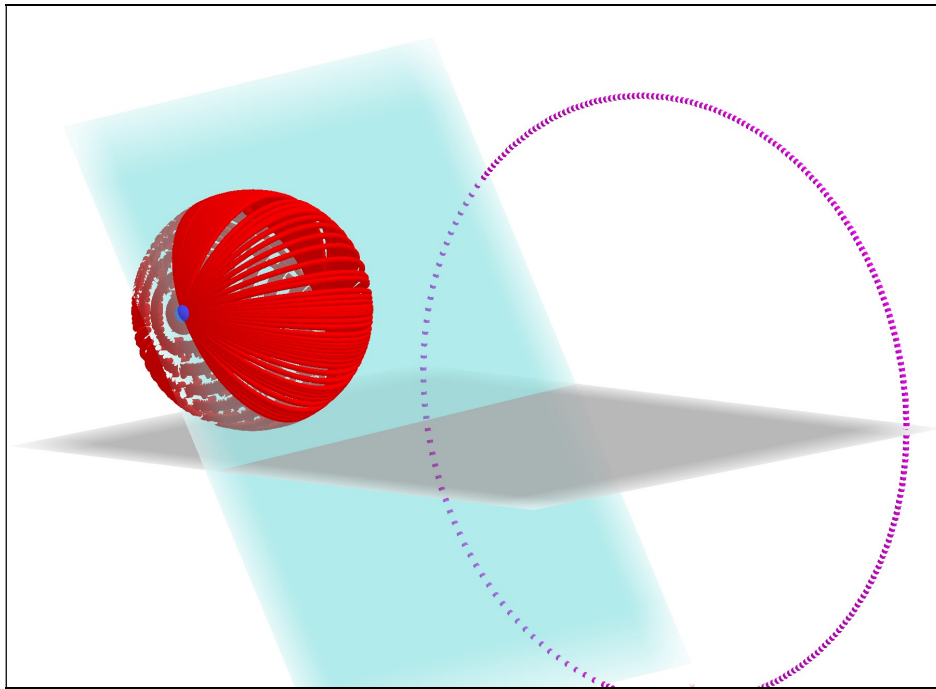
• Množiny bodů v prostoru

- obdobně jako v Nákresně i ve 3D okně lze využít nástroj *Množina bodů*
- nástroj *Množina bodů* je umístěn ve čtvrtém ikonovém menu zleva
- používá se k vytvoření množiny objektů, která vznikne pohybem bodu po jiném objektu
- nejprve ve vytvořeném rysu klikneme na bod, např. X , jehož polohy/stopy vykreslí množinu dané vlastnosti a poté na bod na objektu (případně posuvník), který „řídí“ změnu polohy bodu X
- množinu smažeme stejným způsobem jako jiné objekty
- při hledání množin bodů používáme často posuvník; ten je třeba zadat v Nákresně

Úloha

Určete množinu všech bodů v prostoru, z nichž je vidět danou nenulovou úsečku AB pod pravým úhlem (tzv. *prostorovou analogii Thaletovy věty*).

(Návod: Sestrojte pomocnou kružnici k , jejíž osou je osa y ; na této kružnici zvolte bod R . Nad základní rovinou sestrojte úsečku AB , body A, B, R proložte pomocnou rovinu. V této rovině splňuje požadavek Thaletova kružnice nad průměrem AB , sestrojte ji, obarvěte načerveno a zapněte její stopu. Nyní pohybujte bodem R po kružnici k – tím se mění poloha pomocné roviny procházející úsečkou AB , vykreslují se další Thaletovy kružnice nad průměrem AB pomocí stopy. Řešením je kulová sféra s průměrem AB bez bodů A, B .)



Úloha

Určete množinu všech bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od tří daných bodů A , B , C , které neleží na jedné přímce.

(Návod: Použijte posuvník r s kladnými hodnotami-poloměry kulových ploch; dále sestrojte kulové plochy se středy v daných bodech A , B , C o poloměru r . Sestrojte společný bod těchto ploch a zapněte jeho stopu. Nyní pohybně posuvníkem r . Poté použijte nástroj *Množina bodů*. Řešením je kolmice k rovině určené body A , B , C , která prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC .)

