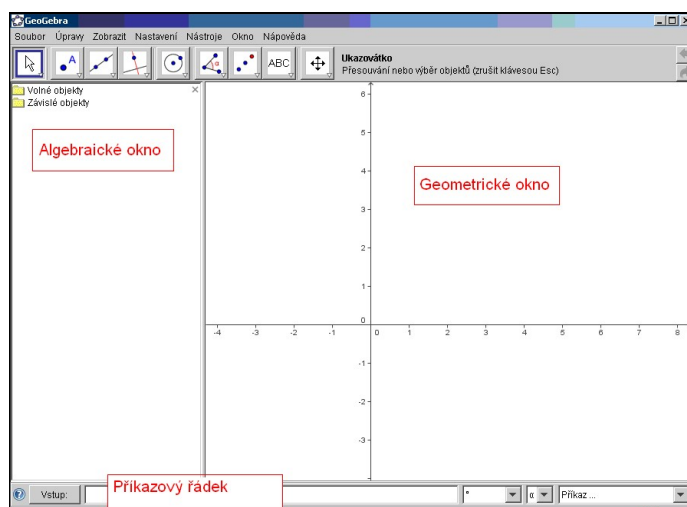


- **dynamický matematický software** určený pro výuku na ZŠ a SŠ
- **základní vlastnosti:**
 - open source software (volně šiřitelný)
 - spojuje geometrické prostředky s algebraickými včetně prostředků diferenciálního a integrálního počtu, nově přidány i „symbolické výpočty“
- <http://www.geogebra.org>
 - program ke stažení (používáme verzi GeoGebra Classic 5)
 - manuál, výukové materiály



Základní příkazy a nástroje GeoGebry

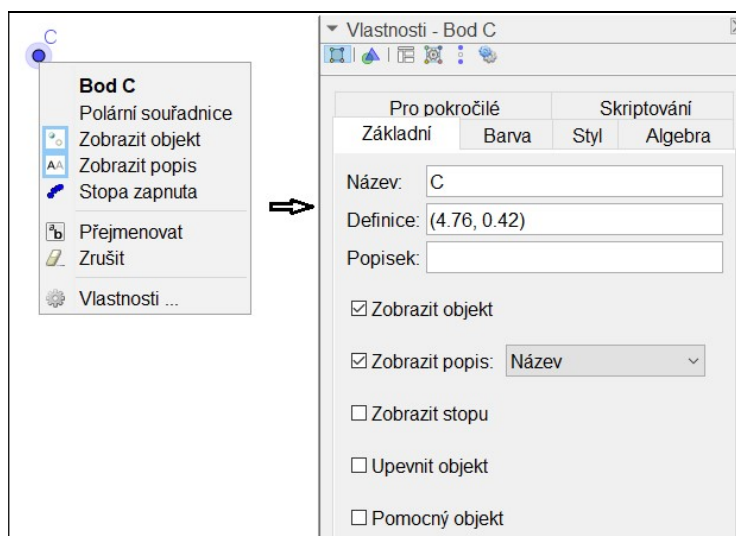
- **Nabídky**
 - **hlavní vodorovná lišta:** menu *Soubor, Úpravy, Zobrazit, Nastavení, Nástroje, ...*
 - **tlačítka s ikonami:** obsahují nástroje pro základní geometrické konstrukce aj. (nápověda k jednotlivým nástrojům se zobrazuje vpravo od poslední ikony)
 - **vstupní příkazový řádek:** slouží k vytváření a změně volných objektů v rýsu a k výpočtům
- **Mazání objektů**
 - Klávesa **Esc** – mazání (zrušení) ještě nedokončeného objektu (příkazu)
 - Klávesy **Ctrl** a současně **A**, následně stisknout klávesu **Delete** – mazání celé nákrasny
 - Po zvolení nástroje *Ukazovátka* (první ikona zleva) kliknout na konkrétní objekt, následně klávesa **Delete** – mazání konkrétního objektu
 - Klávesy **Ctrl** a současně **Z** – vrátí konstrukci o jeden krok zpět (lze opakovat)
 - Příkaz *Zápis konstrukce* v hlavním menu **Zobrazit** – zobrazí zápis konstrukce, ve kterém lze mazat či upravovat pořadí objektů (pozor na závislost objektů)

- **Přemísťování objektů**

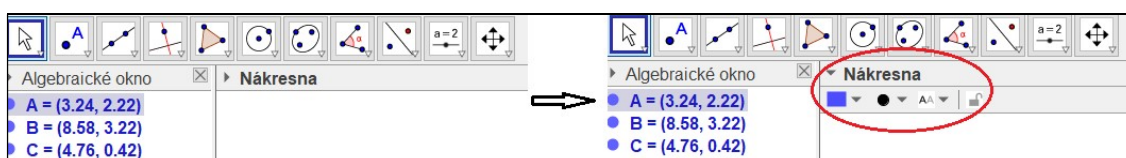
- Zvolíme nástroj *Ukazovátka*. Kurzor přesuneme k objektu, počkáme na jeho identifikaci (např. *Bod B*, ...), poté stlačíme levé tlačítko myši. Pohybem myši při stále stisknutém tlačítku přemísťujeme objekt po nákresně.

- **Vlastnosti geometrických objektů**

- vlastnosti objektů lze měnit v dialogovém okně *Vlastnosti* nebo ve formátovacím panelu v horní liště geometrického okna (nákresny)
- okno *Vlastnosti* zpřístupníme po ukázání na objekt a následným stisknutím pravého tlačítka myši, či v menu *Úpravy*



- formátovací panel objektu zpřístupníme po kliknutí na šipku před slovem *Nákresna* v horní liště geometrického okna



Příklad (přejmenování objektu, barva objektu)

V geometrickém okně sestrojte tři nekolineární body A , B , C . Dále nástrojem *Mnohoúhelník* sestrojte trojúhelník ABC . Pomocí kontextového menu a okna *Vlastnosti* přejmenujte body na K , L , M ; dále nastavte pro každou stranu různou barvu. Teprve nyní uzavřete dialogové okno kliknutím na křížek v pravém horním rohu.

Příklad (indexy ve jménech objektů)

Sestrojte dvě různé úsečky AB a CD . Nástrojem *Střed* (druhé menu zleva) sestrojte S_{AB} a S_{CD} . Dolní index запиšte tak, že pravým tlačítkem myši zobrazíte kontextové menu středu úsečky, zvolíte příkaz *Přejmenovat* a do zobrazeného okna запиšete $S_{\{AB\}}$, resp. $S_{\{CD\}}$. Dále nástrojem *Kružnice daná středem a bodem* sestrojte kružnici $k_1 = (A, AB)$ a popište ji k_1 ; obdobně pro kružnici $k_2 = (C, CD)$. Nástrojem *Průsečíky* sestrojte průsečíky kružnic k_1 a k_2 a pojmenujte je K_1 a K_2 .

Rychleji lze objekty přejmenovat tím, že ukazovátkem klikneme na daný objekt a přímo z klávesnice začneme psát nové jméno objektu. Automaticky se otevře okno pro přejmenování objektu.

Příklad (ukázání/skrytí objektu)

Sestrojte přímku p určenou body A, B a dva různé body $C, D \notin p$. Sestrojte přímku $k, C \in k \wedge k \perp p$; přímku $q, D \in q \wedge q \parallel p$. Pomocí kontextového menu jednotlivých objektů skryjte přímku q a název bodu C . Všimněte si, co se děje v algebraickém okně. Totéž lze provést kliknutím na kolečka před názvy objektů v algebraickém okně.

Příklad (vliv definice objektu na funkčnost nástrojů)

Sestrojte tři nekolineární body A, B, C a tři nekolineární body K, L, M . Dále sestrojte pomocí úseček trojúhelník ABC , pomocí nástroje *Mnohoúhelník* sestrojte trojúhelník KLM . Pokuste se vybarvit oba trojúhelníky, každý jinou barvou. (V případě trojúhelníku ABC to nepůjde, neboť pro program se nejedná o trojúhelník, ale tři různé úsečky).

- Pozor na vztah závislosti objektů (volné, částečně vázané, vázané objekty).
- Vypnutí zobrazení souřadnicových os lze zařídit jednak v horní liště nad geometrickým oknem, jednak v kartě *Vlastnosti* pro náskresnu.

Konstrukční úlohy

- **Konstrukce trojúhelníku**
 - konstrukce s využitím bodů a úseček (tři nekolineární body spojené úsečkami), pomocí nástroje *Mnohoúhelník*, resp. *Pravidelný mnohoúhelník*

Příklad (výšky, průsečík výšek)

1. Sestrojte obecný trojúhelník ABC .
2. Sestrojte výšky (využijte nástroj *Kolmice*).
3. Nástrojem *Průsečíky* sestrojte průsečík O (ortocentrum) dvou výšek.
4. Nástrojem *Vztah mezi dvěma objekty* (druhé menu zleva) testujte, zda bod O leží na zbývajících výškách.
5. Pomocí ukazovátka pohybujte jedním vrcholem trojúhelníku a pozorujte, jak se mění poloha ortocentra O .

Příklad (těžiště, vztah mezi dvěma objekty)

1. Sestrojte obecný trojúhelník ABC .
2. Sestrojte těžnice (využijte nástroj *Střed*).
3. Nástrojem *Průsečíky* sestrojte průsečík T (těžiště) dvou těžnic.
4. Nástrojem *Vztah mezi dvěma objekty* (druhé menu zleva) testujte, zda bod T leží na zbývajících těžnicích.

Příklad (osy úhlů, kružnice vepsaná, popis objektu řeckými písmeny)

1. Sestrojte obecný trojúhelník ABC .
2. Sestrojte osy úhlů pomocí nástroje *Osa úhlu*. Všimněte si dvou možností zadání objektů pro nástroj – dvě přímky, dva body. Osy zobrazte čárkovaně pomocí karty *Vlastnosti*.
3. Sestrojte průsečík S dvou os.

4. Vyznačte úsečkou poloměr kružnice vepsané a sestrojte ji. Pohybem jednoho vrcholu ověřte správnost konstrukce.
5. Pomocí kontextového menu (příkaz *Přejmenovat*) pro úsečku-poloměr kružnice ji přejmenujte na ρ (řecká písmena jsou v zobrazené kartě vpravo).

Příklad

Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , jestliže $c = 9$ cm, $v_c = 6$ cm, $\alpha = 30^\circ$.

„Pevné“ řešení

1. Zvolte nástroj *Úsečka dané délky z bodu* (třetí menu zleva), klikněte na nákresně na místo, kde chcete zadat první krajní bod úsečky a do následně zobrazeného okna запиšte číslo 9. Získáte vodorovnou úsečku AB .
2. Nástrojem *Úhel dané velikosti* (čtvrté menu zleva) zadejte s pomocí nápovědy k nástroji úhel α (do zobrazeného okna zadáte velikost úhlu). Program zobrazí symbol úhlu u vrcholu A a zobrazí také bod B' na rameni úhlu α . Narýsujte polopřímku AB' .
3. Sestrojte rovnoběžku p s přímkou (resp. úsečkou) c ve vzdálenosti v_c (využijte nástroj *Kružnice daná středem a poloměrem*). Naleznete průnik polopřímky AB' a p .
4. Sestrojte trojúhelník ABC . Pomocí *Ukazovátka* změňte polohu vrcholů. Co pozorujete?

„Dynamické“ řešení

1. Zvolte nástroj *Posuvník* (druhé menu zprava) a klikněte na nákresnu vpravo nahoře. V zobrazeném okně přejmenujte posuvník na c , rozsah od 0 do 15. Obdobně sestrojte posuvníky v_c , α . Ukazovátkem nastavte hodnoty posuvníků na údaje ze zadání příkladu.
2. Při konstrukci AB pomocí nástroje *Úsečka dané délky z bodu*, zadejte do zobrazeného okna místo délky název posuvnému c , obdobně postupujte při dalších konstrukcích.

Krokování a zápis konstrukce

- V geometrickém okně na místě, kde není žádný objekt, klikněte pravým tlačítkem myši. Ze zobrazené nabídky zvolte možnost *Navigační panel* a pomocí zobrazených tlačítek nad vstupním příkazovým řádkem krokujte konstrukci.
- V hlavním menu zvolte možnost **Zobrazit** a v ní možnost *Zápis konstrukce* (klávesová zkratka CTRL+Shift+L). Objeví se zápis konstrukce.

The screenshot shows a geometry software interface with several panels:

- Algebraické okno:** Lists coordinates for points C (9.05, 3.66) and C₁ (-1.34, 3.66), and point X (6.45, 2.16). It also shows equations for a circle, a line, and a triangle.
- Nákresna:** Shows a construction with a horizontal segment AB of length c=9, an angle alpha=30 degrees at vertex A, and a dashed line p parallel to AB at a distance v_c=6. The intersection of the angle ray and line p is point X. A circle centered at X with radius AX intersects line p at point C. The resulting triangle ABC has sides a, b, and c.
- Zápis konstrukce:** A table listing the construction steps:

Č.	Název	Popis	Hodnota	Popi...
1	Číslo c		c = 9	
2	Číslo v _c		v _c = 6	
3	Úhel alfa		alfa = 3...	
4	Bod A		A = (-1...	
5	Bod B	Bod na Kružnice(B = (7...	
6	Úsečka f	Úsečka [A, B]	f = 9	
7	Přímka g	Přímka	g: x = -...	

Úlohy

- Sestrojte všechny trojúhelníky KLM , jestliže $m = 8$ cm, $v_m = 1,5$ cm, $\mu = 60^\circ$.
- Sestrojte všechny kružnice o poloměru 1,5 cm, které se dotýkají kružnice $k = (S, 4$ cm) a přímky p , pro kterou platí $|Sp| = 3$ cm.

• Konstrukce čtyřúhelníku

- konstrukce s využitím bodů a úseček (čtyři nekolineární body spojené úsečkami), pomocí nástroje *Mnohoúhelník*, resp. *Pravidelný mnohoúhelník* (pro čtverec)

Příklad

Sestrojte všechny čtyřúhelníky $ABCD$, jestliže $|CD| = 4$ cm, $|AD| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|\angle ASB| = 90^\circ$, $|\angle ABC| = 90^\circ$, kde S je průsečík úhlopříček.

(Návod: Zkonstruujte trojúhelník ACD , dále použijte Thaletovu kružnici.)

• Nástroj Tečna z bodu

- umístěn ve čtvrtém ikonovém menu zleva
- sestrojí tečnu z bodu ke kuželosečce (zadááme bod a kuželosečku)
- sestrojí tečnu kuželosečky rovnoběžnou s danou přímkou (zadááme přímkou a kuželosečku)

Příklad

1. Zobrazte na nákresně dva různé body A , S . Dále sestrojte kružnici $k = (S, 4$ cm). Nyní nástrojem *Tečna z bodu* sestrojte tečny kružnice k vedené z bodu A . Pomocí ukazovátka měňte polohu bodu A vzhledem ke k (vnější, vnitřní bod, bod na kružnici). Pozorujte, co se děje.
2. Nástrojem *Kuželosečka daná pěti body* (páté ikonové menu zprava) sestrojte libovolnou kuželosečku (elipsu, hyperbolu, ...). Nyní z bodu A veďte pomocí stejného nástroje tečny ke kuželosečce. Ukazovátkem měňte polohu určujících bodů kuželosečky a pozorujte, co se děje.

• Tečnový čtyřúhelník

Příklad

1. Sestrojte libovolnou kružnici k a na ni zvolte čtyři různé body (nástrojem *Bod na objektu*).
2. Ve zvolených bodech sestrojte tečny kružnice pomocí nástroje *Tečny z bodu* (čtvrté menu zleva) a sestrojte také jejich průsečíky A , B , C , D . Obarvěte úseky na tečnách tak, aby vytvořily strany čtyřúhelníku $ABCD$ (tečnového čtyřúhelníku), kterému je vepsána daná kružnice.
3. Narýsujte úsečky, které mají krajní body ve vrcholu čtyřúhelníku a v bodě dotyku (tj. 8 úseček). Každou dvojici úseček, které vycházejí ze stejného vrcholu čtyřúhelníku obarvěte stejnou barvou (použijte postupně např. žlutou, červenou, modrou a zelenou barvu). Určete délky stran čtyřúhelníku a , b , c , d .
4. Zvolte nástroj *Vložit text* a klikněte na prázdné místo v geometrickém okně. Sestavte dynamický text na součet délek protějších stran $a + c$ (poté i pro $b + d$). V kartě nástroje využijte podmenu *Objekty*.

- **Nástroj Polára**

- umístěn ve čtvrtém ikonovém menu zleva
- sestrojí poláru daného bodu dané regulární kuželosečky

Příklad

- Sestrojte kružnici $k = (S, 4 \text{ cm})$ a její vnější bod A . Dále nástrojem *Tečna z bodu* sestrojte tečny kružnice k z bodu A . S využitím nástroje *Průsečíky* zobrazte body dotyku T_1 a T_2 . Nyní nástrojem *Polára* sestrojte poláru p bodu A vzhledem ke k . Otestujte nástrojem *Vztah mezi dvěma objekty*, zda body T_1 a T_2 leží na poláře p .

(Tečny z bodu A k regulární kuželosečce procházejí (pokud existují) průsečíky poláry bodu A s kuželosečkou.)

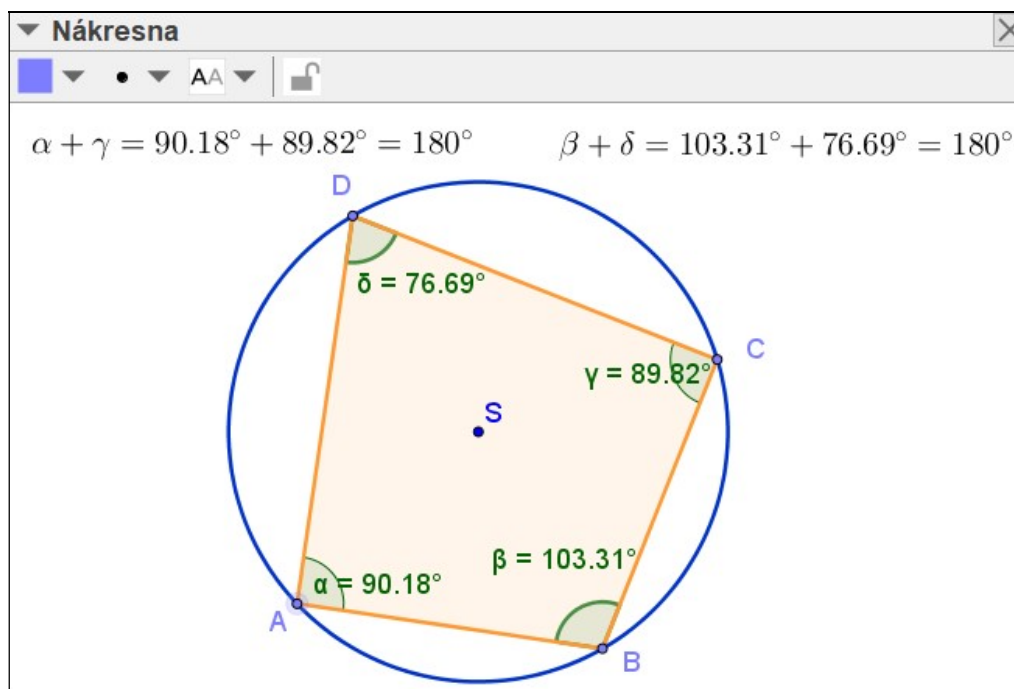
- Nástrojem *Připojit/Oddělit bod* v ikonovém menu pro body předdefinujte bod A tak, aby $A \in k$. Co pozorujete? Svě pozorování ověřte pomocí nástroje *Vztah mezi dvěma objekty* v druhém menu zprava.

(Polára bodu A regulární kuželosečky prochází bodem A a je tečnou kuželosečky.)

- **Tětivový čtyřúhelník**

Příklad

1. Sestrojte libovolnou kružnici k a na ni zvolte čtyři různé body A, B, C, D (nástrojem *Bod na objektu*).
2. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$ (tětivový čtyřúhelník), kterému je opsána kružnice k .
3. Nástrojem *Velikost úhlu* určete velikost všech vnitřních úhlů čtyřúhelníku.
4. Zvolte nástroj *Vložit text* a klikněte na prázdné místo v geometrickém okně. Sestavte dynamický text na součet velikostí protějších vnitřních úhlů $\alpha + \gamma$ (poté i pro $\beta + \delta$). V kartě nástroje využijte podmenu *Objekty*. Zdůvodněte uvedené součty velikostí úhlů.



6

Úlohy

- Určete, které ze čtyřúhelníků čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník a deltoid patří mezi tečnové a tětivové.

Nástroje metriky

- Nástroje metriky
 - umístěny ve čtvrtém ikonovém menu zprava (*Úhel, Úhel dané velikosti, Vzdálenost, Obsah, Spád*)
 - a dále *Úsečka dané délky, Kružnice daná bodem a poloměrem, Kružítko*
- Nástroj Spád
 - umístěn v pátém ikonovém menu zprava
 - určí směrnici přímky a zobrazí ji v algebraickém okně jak dynamický text

Příklad

Sestrojte na nákrešně dvě různé přímky p a q . Nástrojem *Spád* zobrazte směrnici každé přímky. Ukazovátkem měňte polohu bodů, kterými jsou přímky zadány. Pozorujte, co se děje. Aktivujte pro zobrazenou směrnici její kontextové menu, měňte vlastnosti (styl).

Příklad

Na nákrešně sestrojte dva posuvníky a , b . Do vstupního příkazového řádku запиšte směrnice tvar přímky – p : $y = a \cdot x + b$. Nyní zobrazte nástrojem *Spád* směrnici přímky p . Pomocí posuvníků měňte polohu přímky p . Všimněte si souvislosti mezi parametrem a zobrazenou směrnici.

Množiny bodů dané vlastnosti

- Nástroj Stopa
 - stopa se zapíná či vypíná pomocí kontextového menu (zpřístupníme ukázáním na objekt a následným stlačením pravého tlačítka myši)
 - stopa se maže příkazem *Překreslit* (CTRL + F) z menu **Zobrazit**, nebo změnou měřítka nákrešny či posunem nákrešny
 - stopa je statický objekt, software s ní dále nepracuje

Příklad

Narýsujte úsečku AB a posuvník r , jehož rozsah hodnot bude od 0 do 15. Nyní sestrojte nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem* kružnice se středy v A i B a stejnými poloměry r . Sestrojte průsečíky X , Y obou kružnic a zapněte jejich stopu. Pohybujte posuvníkem r a pozorujte, co se děje. Jakou množinu bodů tvoří stopy bodů X , Y ?

- Nástroj Množina bodů
 - umístěn ve čtvrtém ikonovém menu zleva
 - používá se k vytvoření množiny objektů, která vznikne pohybem bodu po jiném objektu
 - nejprve klikneme na objekt, jehož polohy vykreslí množinu a poté na bod, jehož pohyb množinu určí – tento řídicí bod musí ležet na nějakém objektu (přímce, úsečce, kružnici, resp. jde o bod posuvníku)
 - množinu mažeme stejným způsobem jako jiné objekty

Příklad

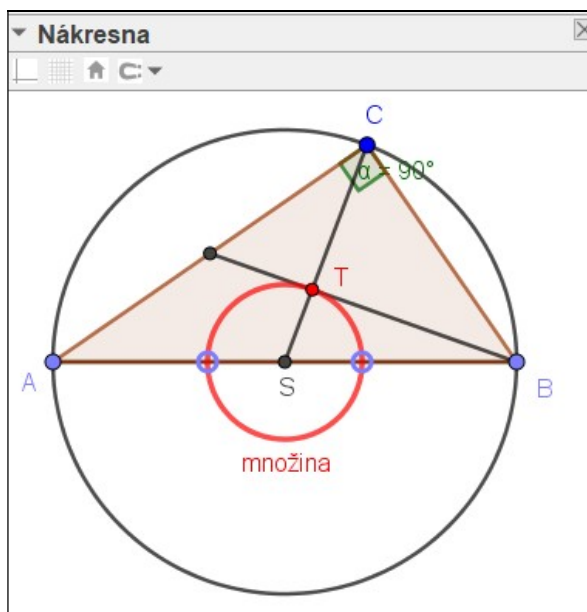
Pokračujte v předchozím rysu. Nyní aktivujte nástroj *Množina bodů* (nejdříve ukažte na průsečík *X*, potom na posuvník *r*). Co se děje? Totéž učiníme s druhým průsečíkem *Y*.

Úloha

Vytvořte rys na demonstraci osy úhlu pomocí množiny bodů.

Úloha

Pomocí Geogebry určete množinu všech těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou *AB*.



Hlavní rozdíly mezi stopou a množinou

– stopa je statická (po vykreslení se nemění), množina je dynamická (s měněními se parametry konstrukce se také mění)

Zobrazení v rovině

- nástroje pro zobrazení umístěny ve třetím ikonovém menu zleva
- **Nástroj *Osová souměrnost, Středová souměrnost, Posunutí, Otočení, Stejnolehlost, Kruhová inverze***

Příklad

Je dána úsečka AB libovolné nenulové délky. Určete množinu všech obrazů bodu A v osově souměrnosti podle všech přímek, procházejících bodem B .

(Návod: Sestrojte A, B , libovolnou přímkou $p, B \in p$. Označte obraz bodu A v osově souměrnosti A' , zapněte stopu A' , rozpohybujte přímkou p .) Promyslete změnu rysu, pokud bychom množinu obrazů bodu A chtěli získat příkazem *Množina*.

Příklad - pokračování

Využijte předchozího rysu, smažte stopu. Dále sestrojte rovnoběžník určený body ABA' . Zbývající čtvrtý vrchol rovnoběžníku označte X . Zapněte také jeho stopu a pozorujte, jakou množinu bodů vytvoří stopy bodu X pokud budeme hýbat osou procházející bodem B .

Příklad (středová souměrnost)

Je dána úsečka CS délky 3 cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je CS těžnicí t_c , je-li dále dáno: $a = 3,5$ cm, $b = 5$ cm.

(Návod: Vpravo na nákrese sestrojte posuvníky t_c, a, b . Sestrojte úsečku CS a S zvolte za střed středové souměrnosti. Hledaný bod B leží na kružnici $l = (C, a)$ a na obrazu k' kružnice $k = (C, b)$.)

Příklad (stejnolehlost)

Je dán bod S , posuvník λ (reprezentující koeficient stejnohlosti), kružnice k se středem O a bod $X \in k$. Sestrojte obraz X' bodu X ve stejnohlosti se středem S a daným koeficientem. Zapněte stopu bodu X' a zkoumejte, jak vypadá obraz k' kružnice k ve stejnohlosti se středem S . (Pohybuje bodem X po celé kružnici k . Tím se odpovídajícím způsobem pohybuje i bod X' . Po jaké dráze se pohybuje bod X' ?)

Příklad (stejnolehlost)

Sestrojte posuvník λ (reprezentující koeficient stejnohlosti) a nastavte ho na hodnotu -2 . Dále sestrojte bod S a mimo tento bod trojúhelník ABC . Sestrojte obraz trojúhelníku ve stejnohlosti se středem S a koeficientem -2 , správně popište vrcholy obrazu (stejnolehlost v rovině je přímá podobnost). Nástrojem *Obsah* změřte jejich obsahy. Určete podíl obsahů trojúhelníků. Jaký vztah platí mezi obsahem vzoru a obrazu?

Příklad (stejnolehlost)

Jsou dány dvě různoběžky p a q a bod M ležící mimo ně. Sestrojte kružnici k takovou, že se dotýká obou přímek a prochází bodem M .

(Návod: zkonstruujte nejprve pomocnou kružnici k' , která se dotýká přímek p a q , ale bodem M nemusí procházet, dále využijte stejnohlosti se středem v průsečíku různoběžek, ve které je obrazem hledané kružnice k pomocná kružnice k' .)

Makrokonstrukce

- **menu Nástroje** – hlavní páte menu zleva
 - obsahuje nástroje **Vytvořit nový nástroj** (v něm vnořeny *Vstupní objekty*, *Výstupní objekty*, *Jméno a ikona*), dále **Správa nástrojů**, **Nastavit panel nástrojů**
- **vytvoření makrokonstrukce**
 - nejdříve provedeme konstrukci, tj. vyhotovíme rys
 - dále zvolíme menu **Nástroje**, zde pak nástroj **Vytvořit nový nástroj**
 - v zobrazeném okně postupně zadáme *Vstupní objekty* (objekty vybíráme buď z nabídky v řádku označeném šipkou, nebo klepnutím na objekt v rysu), dále zvolíme v okně *Výstupní objekty* a zadáme je obdobným způsobem; nakonec zvolíme možnost *Název a ikona* (Jméno nástroje se objeví v ikonovém menu, Název příkazu lze zadávat v příkazovém řádku; ikonu lze vybrat z libovolných obrázků uložených v PC, či vytvořit v nějakém software) – zde lze zadat nápovědu k makrokonstrukci; zadání makrokonstrukce ukončíme tlačítkem „Dokončit“ (nápověda k makrokonstrukci se také vytvoří automaticky, či ji lze upravit ve **Správě nástrojů** – viz dále)
- **uložení makrokonstrukce** – pro uložení makrokonstrukce do paměti je třeba zvolit v hlavním menu možnost **Nástroje** a zde možnost **Správa nástrojů** – v zobrazené kartě pak zadáme „Uložit jako“; makrokonstrukce mají příponu *.ggt; makrokonstrukce lze uložit do libovolného adresáře
- **použití makrokonstrukce** – ikona vytvořené makrokonstrukce se připojí do ikonového menu Geogebry za poslední ikonu a s touto makrokonstrukcí pracujeme stejně jako s ostatními nástroji Geogebry; makrokonstrukce je přístupná pouze do skončení práce s Geogebrou, při novém otevření musíme načíst požadované hotové makrokonstrukce příkazem *Otevřít* z hlavního menu **Soubor**

Příklad

Vytvořte postupně tři makrokonstrukce, které v daném trojúhelníku sestojí:

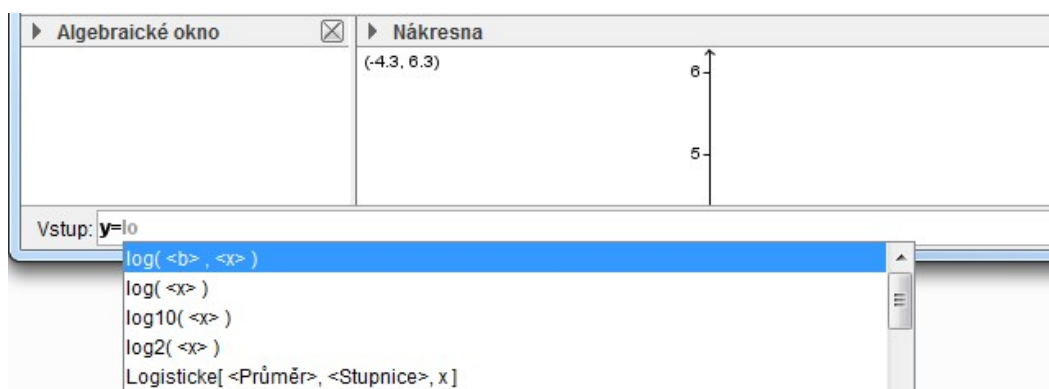
- a) všechny střední příčky,
- b) výšky a ortocentrum,
- c) těžnice a těžiště.

(Návod: Sestrojte obecný trojúhelník, pak požadované objekty. Aktivujte **Nástroje–Vytvořit nový nástroj** a postupujte podle výše napsaného návodu.)

Grafy funkcí a vlastnosti funkcí

• Zadávání funkcí

- předpis funkce zadáváme ve vstupním poli (nezávislá proměnná vždy značena x , místo desetinné čárky píšeme tečku), v algebraickém okně se objeví daný předpis, v grafickém okně se zobrazí graf funkce
- při zadávání předpisu lze využívat „našeptávač“ ve vstupním poli (tj. při zápisu předpisu funkce či příkazu do vstupního pole se nabízí u vstupního pole možnosti):



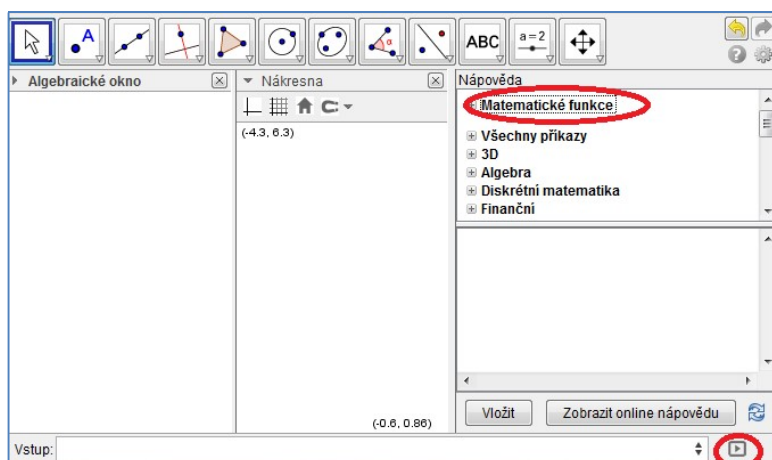
Příklad – zadání předpisu funkce a zobrazení grafu funkce

Do vstupního pole postupně zadejte tyto předpisy, po vložení každého předpisu stiskněte klávesu ENTER:

$$y = -2x + 1, k: y = -x^2 + 1 \quad f(x) = 3x^2 - 4x, g: y = (x+1)/(x-1), h: y = (x+4)(x-1)$$

Všimněte si zápisu těchto funkcí v algebraickém okně (funkce-kuželosečka).

- speciální symboly v předpisu funkce (mocnina 2 , odmocnina, základ e , číslo π) lze vkládat pomocí virtuální klávesnice (dostupné přes menu *Zobrazit*)
- nabídka předpisů různých funkcí se zobrazí po kliknutí na šipku, která je vpravo vedle vstupního pole (dojde k vyvolání okna *Nápověda*, zde volba podmenu *Matematické funkce*)



Příklad – zadání předpisu funkcí absolutní hodnota, n -tá odmocnina, signum ...

Do vstupního pole postupně zadejte tyto předpisy, po vložení každého předpisu stiskněte klávesu ENTER. Využijte nabídku funkcí v okně *Nápověda*:

$$y = |2x - 4|, y = \sqrt[5]{x}, y = \operatorname{sgn}(x)$$

Matematické funkce	Vstup
umocňování	^
absolutní hodnota	abs()
signum	sgn()
druhá odmocnina	sqrt()
třetí odmocnina	cbrt()
n -tá odmocnina	ntaOdmocnina(x,n)
exponenciální funkce	exp() nebo e^x
logaritmus (přirozený, se základem e)	ln() nebo log()
logaritmus se základem 2, se základem b	ld(), log(b, ...)
logaritmus se základem 10	lg(), log10()
kosinus, sinus, tangens, kotangens	cos(), sin(), tan() či tg(), cot()

- změnu předpisu funkce lze provést v algebraickém okně (dvojitým kliknutím na předpis funkce se otevře editační okno, kde můžeme předpis změnit), případně tažením grafu po nákresně
- barvu i styl čáry grafu funkce lze měnit v menu *Vlastnosti* pro daný graf

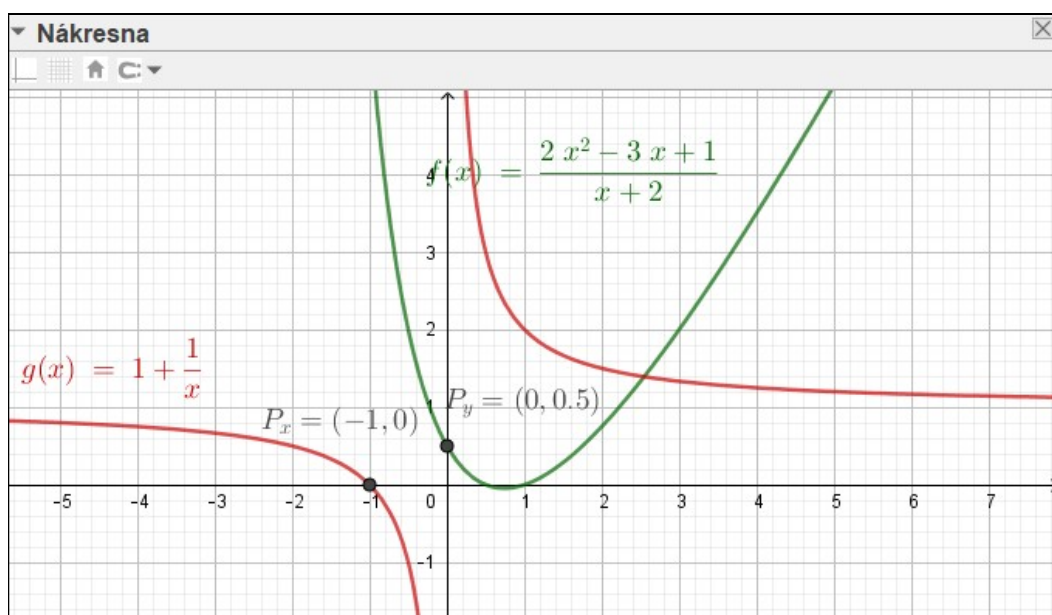
Příklad – popis grafu funkce a bodů na grafu

Do vstupního pole zadejte předpisy následujících funkcí, grafy obarvte modře a červeně, zvolte silnější čáry:

$$f: y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}, g: y = 1 + \frac{1}{x}$$

Otevřete pro graf f menu *Vlastnosti* a v kartě *Základní* v políčku *Zobrazit popis* volte jednotlivé možnosti, kterou jsou u popisu k dispozici (např. *Název*, *Hodnota*,...). Pozorujte, jak se mění popis grafu v nákresně.

- Sestrojte průsečíky obou grafů (použijte nástroj *Průsečík*).
- Obdobně sestrojte průsečík grafu g s osou x a grafu f s osou y , pojmenujte je P_x a P_y .
- Nyní otevřete menu *Vlastnosti* pro bod P_y a zvolte kartu *Základní*. V této kartě do pole *Popisek* zapište výraz $\$ \% n = \% v \$$ a následně v poli *Zobrazit popis* zvolte z rozbalovacího menu *Popisek*. Nyní porovnejte značení obou průsečíků v rysu.



Příklad – znázornění $D(f)$ a $H(f)$

- Do vstupního pole zadejte předpis funkce $y = \sqrt{2x + 8}$ a na zobrazeném grafu zadejte bod A . Z bodu A spusťte kolmice na osu x a osu y , sestrojte paty těchto kolmic P_x (barva červená) a P_y (barva modrá). Nyní skryjte kolmice a sestrojte úsečku AP_x (barva červená, styl čárkovaný), úsečku AP_y (barva modrá, styl čárkovaný). U osy x umístěte nástrojem *Text* červený text $D(f)$ a u osy y modrý text $H(f)$. Zapněte stopy bodů P_x , P_y a pohybujte bodem A po grafu funkce.
- Zobrazte mřížové body v grafickém okně. Obdobně jako v a) nyní zobrazte $D(f)$ a $H(f)$ pro graf funkce $y = -|x + 2| + 6$, která je definována na intervalu $\langle -4, 6 \rangle$.

- **dynamické grafy**

- pro zobrazení dynamického grafu je vhodné využívat posuvníky, které představují parametry v předpisu funkce

Příklad – zobrazení grafu kvadratické funkce s obecným předpisem

Sestrojte graf obecné kvadratické funkce. Na nákresně nejdříve zadejte tři posuvníky nazvané a , b , c , jejich hodnoty nastavte od -10 do 10 . Do vstupního pole запиšte $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ a stiskněte ENTER. Pomocí ukazovátka měňte hodnoty posuvníků.

Příklad – zobrazení grafu mocninné funkce pro přirozený, celý a racionální exponent

Sestrojte graf mocninné funkce pro případy, kdy exponent je přirozené, celé či racionální číslo. Na nákresně nejdříve zadejte posuvník n (rozsah 1 až 10 s krokem 1) – přirozený exponent, dále posuvník c (rozsah od -10 do 10 s krokem 1) – celý exponent, nakonec posuvník q (rozsah od -10 do 10 s krokem $0,1$) – racionální exponent. Postupně sestrojte grafy funkcí $f(x) = x^n$, $g(x) = x^c$, $h(x) = x^q$ a každý graf obarvěte jinou barvou a zapněte v kartě vlastností možnost *Zobrazit popis: Název&Hodnota*. Nyní sestrojte pro každou funkci nástrojem *Zaškrtávací políčko* možnost pro skrývání/zobrazování grafu funkce a příslušného posuvníku.

- **tabulka hodnot**

- tabulku zobrazíme jako další pracovní okno v hlavním menu *Zobrazit*, nástroj *Tabulka* (klávesová zkratka CTRL+SHIFT+S)
- po umístění kurzoru do okna tabulky se změní nástrojová lišta (nyní obsahuje několik příkazů pro práci s tabulkou)
- do tabulky lze zaznamenávat souřadnice bodu pohybujícího se po grafu funkce (v kontextovém menu bodu možnost *Zaznamenat do tabulky*), či sestavit tabulku funkčních hodnot obdobně jako v Excelu

Příklad – vytvoření tabulky funkčních hodnot

a) Sestrojte posuvníky a , b (oba rozsah od -10 do 10). Do vstupního pole zadejte předpis polynomicke funkce $f(x) = ax + b$, zobrazte její graf a popis. Zobrazte tabulku. Do buňky A1 запиšte v uvozovkách symbol x , do buňky A2 v uvozovkách symbol $f(x)$. Dále do buňky B1 vložte hodnotu -2 , do C1 hodnotu -1 (tím jsme nastavili krok pro hodnoty x). Označte buňky B1 a C1 a roztáhněte ohraničení až do buňky J. Do buňky B2 vložte výraz $f(B1)$ a opět roztáhněte ohraničení ve druhém řádku až do J. Nyní označte kurzorem všechna pole tabulky a pomocí pravého tlačítka myši zobrazte kontextové menu a zvolte možnost *Vytvořit tabulku* (zobrazenou tabulku zvýrazněte modrou barvou).

b) Nyní zadejte do vstupního pole funkci $g(x) = \frac{1}{x+a}$. Sestavte a zobrazte tabulku hodnot pro x od -4 s krokem 0.5 .

- **Grafické řešení rovnic a nerovnic**

- nejdříve zobrazíme grafy funkcí, jejichž předpisy jsou dány levou, resp. pravou stranou rovnice
- pokud má rovnice jednu stranu nulovou, použijeme pro řešení průsečíky (resp. nástroj *Nulové body*) s osou x , v opačném případě sestojíme průsečíky obou grafů funkcí z levé a pravé strany rovnice

Příklad – grafické řešení rovnice

Graficky řešte rovnici $|x - 2| + |x + 2| = 2x + 2$ s reálnou neznámou x .

Příklad – grafické řešení rovnice s parametrem

Graficky řešte rovnici $|x - 2| + |x + 2| = p$ s reálnou neznámou x a reálným parametrem p .

- **Diferenciální a integrální počet**

- v programu GeoGebra je k dispozici řada příkazů pro zkoumání vlastností funkce, příkazy lze najít v *Nápovědě* v podmenu *Funkce&Kalkulus* (např. příkaz *Asymptota*, *Derivace*, *Extrem*, *Inflexní bod*, *Integral*, *Limita*, *NuloveBody*)

Příklad – vlastnosti funkce I

Zobrazte graf funkce $f : y = x^3 + x^2 - 2x$ a zobrazte její graf. Určete:

a) asymptoty grafu, nulové body

- b) první derivaci a druhou derivaci
- c) extrémy (označte je jako body D, E , do vstupního pole zapište $ZlomekText[D]$, resp. $IracionalniText[D]$)
- d) inflexní body (označte ho jako F , do vstupního pole zapište $IracionalniText[F]$)
- e) neurčitý integrál, určitý integrál od -2 do 1
- f) na grafu f sestrojte bod X a skryjte ostatní grafy a body, dále sestrojte tečnu ke grafu f v bodě X (v kartě základních vlastností tečny zapište do pole $Popisek$ výraz $\$%v\$,$ zapněte zobrazení popisku), pohybujte bodem X a pozorujte, jak se mění rovnice tečny

Příklad – vlastnosti funkce II

Zobrazte graf funkce $g: y = \frac{x^2}{x+1}$ a zobrazte její graf. Pomocí příkazů z menu

Funkce&Kalkulus určete:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} g$
- b) asymptoty grafu, extrémy (přes meze intervalu)
- c) první derivaci
- d) neurčitý integrál

Příklad – výpočet obsahu

Určete obsah obrazce omezeného grafy funkcí $f: y = \sqrt{x-3}$, $g: y = (x-3)^2$. (Návod: využijte příkaz *IntegralMezi* v menu *Nápověda*).

Stereometrie

- **Zobrazování těles v nákresně (2D)**

- v nákresně lze zobrazovat tělesa ve volném rovnoběžném promítání; rys konstruujeme v podstatě stejným způsobem jako pravítkem a tužkou na papír; využíváme přitom zobrazení jako otočení a posunutí

Příklad – sestrojení pravidelného čtyřbokého jehlanu v rovnoběžném promítání

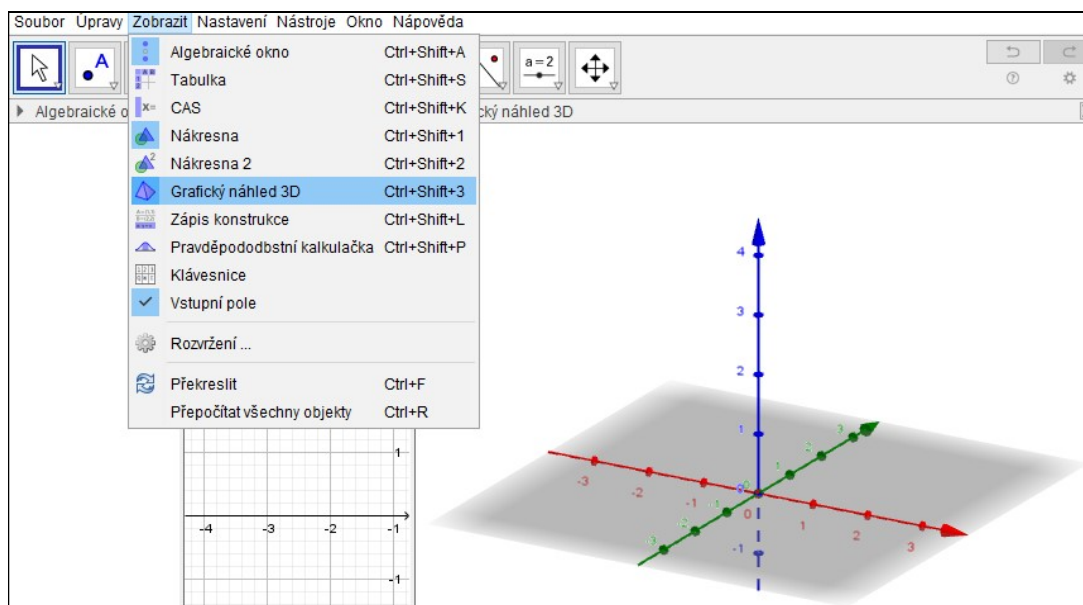
Sestrojte dynamický rys pro pravidelný čtyřboký jehlan ve volném rovnoběžném promítání. Pro rozměry jehlanu použijte posuvníky a, v (výška jehlanu), pro promítání použijte posuvníky $alfa, q$ (zkrácení).

Příklad – sestrojení pravidelného šestibokého hranolu v rovnoběžném promítání

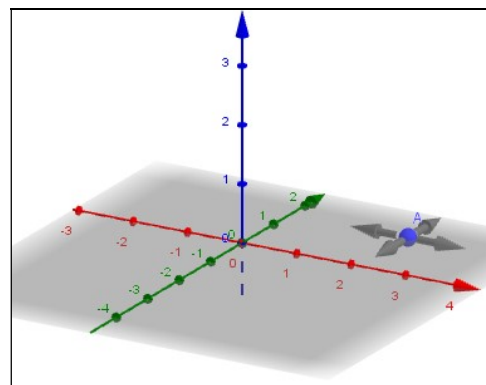
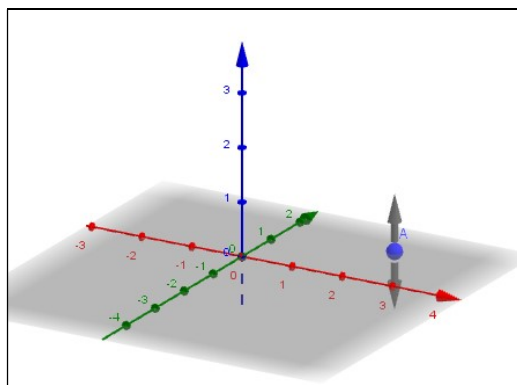
Sestrojte totéž jako v předchozím příkladu pro pravidelný šestiboký hranol. Zadejte na hranolu tři body určující rovinu a sestrojte řez hranolu rovinou. Pohybujte danými třemi body a pozorujte, co se děje.

- **Zobrazování těles v GeoGebře 3D**

- okno GeoGebry 3D aktivujeme v menu **Zobrazit**, zde zvolíme **Grafický náhled 3D**



- ikonové menu v horním řádku se mění dle toho, zda pracujeme v nákresně 2D, či v grafickém náhledu 3D
- nástroje 3D zahrnují navíc konstrukci kolmice k rovině, průnik dvou ploch, konstrukci rovin (dané 3 nekolineárními body, roviny kolmé k přímce, roviny rovnoběžné s jinou rovinou), konstrukce základních těles; z metrických nástrojů je navíc k dispozici měření objemu těles, dále jsou k dispozici základní shodná zobrazení v prostoru



- **Konstrukce bodu ve 3D okně**

- bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...);
- po kliknutí na volný bod se zobrazí u tohoto bodu šipky ve svislém směru (obr. vlevo; lze měnit polohu bodu ve svislém směru), či po dalším kliknutí se zobrazí šipky rovnoběžné se základní rovinou (obr. vpravo; lze měnit polohu rovnoběžně se základní rovinou); každým kliknutím na bod přepínáte mezi uvedenými směry pohybu
- využití posuvníku pro konstrukci pohyblivého bodu - v nákresně sestrojíme posuvník (význam souřadnice z), poté v příkazovém řádku zadáme **Bod(seznam)**

a do množinových závorek napíšeme souřadnice bodu s tím, že na poslední souřadnice napíšeme název posuvníku

- **Konstrukce těles ve 3D okně**

- aktivujte postupně různé nástroje (**Jehlan, Hranol, Kužel, Válec, ...**) pro konstrukci těles v šestém ikonovém menu zleva (musí být aktivní okno 3D) bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...); postupujte dle nápovědy nástroje
- v menu pro konstrukci těles je k dispozici nástroj **Sít'**, který zobrazí síť daného tělesa (stále stejný typ, i když existují další typy sítí daného tělesa)

- **Polohové úlohy 3D**

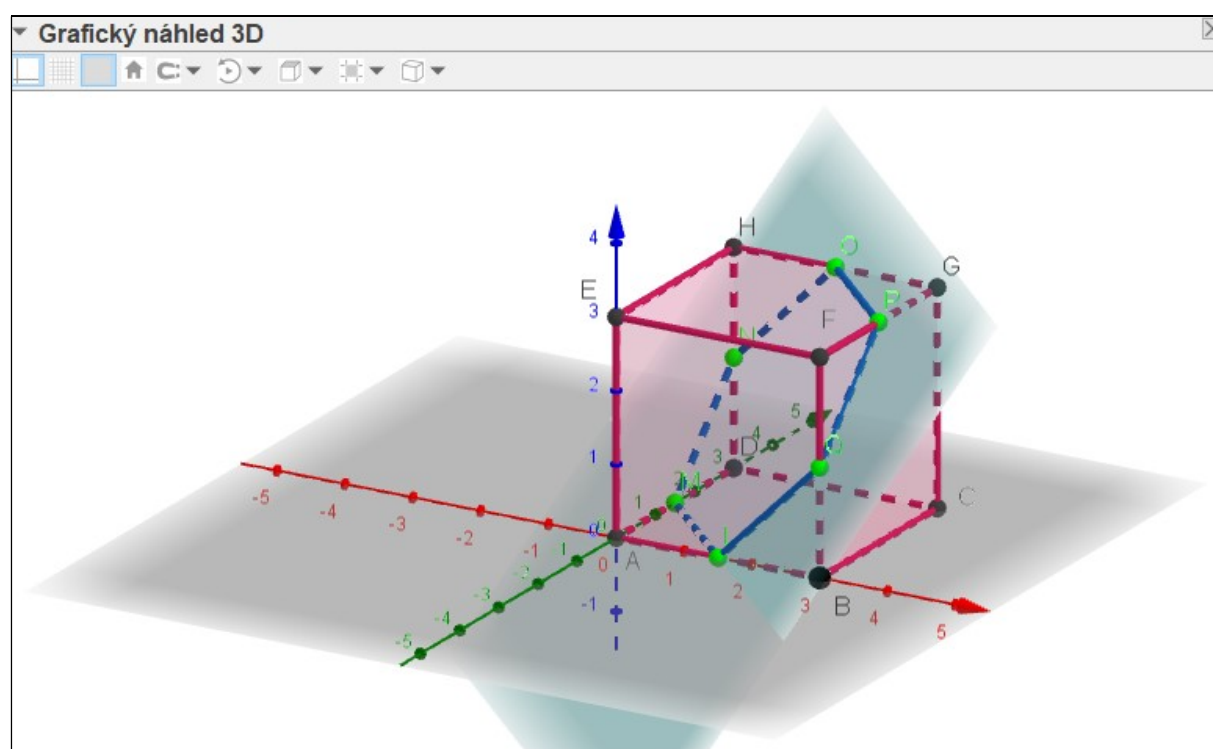
- aktivujte postupně různé nástroje (**Jehlan, Hranol, Kužel, Válec, ...**) pro konstrukci těles v šestém ikonovém menu zleva (musí být aktivní okno 3D) bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...); postupujte dle nápovědy nástroje

Příklad – vzájemná poloha tří rovin v prostoru

Sestrojte rys na vzájemnou polohu tří rovnoběžných různých rovin, využijte pohyblivého bodu, kterým povedete druhou rovinu, případně i nový pohyblivý bod pro třetí rovinu.

Příklad – řez tělesa rovinou

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou a) $S_{FG}S_{GH}S_{AD}$, b) $S_{AE}S_{AB}S_{EG}$.



Příklad – průsečnice dvou rovin

Sestrojte v pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ průsečnice dvou rovin a) ACV , BDS_{CV} , b) BDV , $S_{BCS_{CV}K}$, kde K je bod hrany AD a leží v jedné čtvrtině hrany blíže k vrcholu A .

Příklad

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zkoumejte, jak vypadá řez této krychle rovinou, která je kolmá na tělesovou úhlopříčku (tj. rovina řezu je pohyblivá).

Návod: Sestrojte krychli a označte její vrcholy. Dále sestrojte přímku AG . Na této přímce sestrojte bod K , který leží vně krychle (nejlépe „nad“ bodem G). Nyní narýsujte rovinu, která prochází bodem K a je kolmá na přímku AG . Ukazovátkem uchopte bod K a posuňte rovinu řezu tak, aby protínala krychli. Nástrojem *Průnik dvou ploch* vytvořte řez a pomocí pravého tlačítka myši upravte pohled na rys tak, aby byl vidět řez. Nyní pohybujte bodem K směrem k bodu A a pozorujte, jak se mění tvar řezu.

• **Metrické úlohy 3D**

- aktivujte postupně různé metrické nástroje (**Úhel, Vzdálenost, Obsah, Objem** pro měření těles (délky hran, tělesové stěnové výšky; povrchy a objemy těles)
- konstrukci těles v šestém ikonovém menu zleva (musí být aktivní okno 3D) bod lze přichytit na objekt (přímku, rovinu, kružnici ...); postupujte dle nápovědy nástroje

Příklad

Určete poměr objemů koule opsané a vepsané libovolné krychli. Využijte nástroj *Objem*. Měňte polohu některého z vrcholů krychle a pozorujte, jak se mění objemy obou koulí i jejich poměr. Zdůvodněte ($V_1 : V_2 = 3\sqrt{3}$).

