Lineární algebra II

Determinanty – praktický průvodce

- definice: strašná...
- motivace:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \sim$$

1ř. $\cdot a_{21}$

2ř. $\cdot a_{11}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}\cdot a_{21} & b_1\cdot a_{21} \\ a_{21}a_{11} & a_{22}\cdot a_{11} & b_2\cdot a_{11} \end{array}\right) \underset{2ř-1ř}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1\cdot a_{21} \\ \underset{0}{a_{21}a_{11}-a_{11}a_{21}} & a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21} & b_2a_{11}-b_1a_{21} \end{array}\right) \sim$$

$\exists$-li jediné řeš. $\Rightarrow$

2. řádek: $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$

$$y = \frac{a_{11}\cdot b_2 - b_1\cdot a_{21}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

1. řádek:

$$a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1a_{21}$$

$$a_{11}a_{21}x = b_1a_{21} - a_{12}a_{21}\frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad \Big/ : \underset{\neq 0}{a_{21}}$$

$$a_{11}x = \frac{b_1 a_{11}a_{22} - \cancel{b_1a_{12}a_{21}} - a_{12}a_{11}b_2 + \cancel{a_{12}b_1a_{21}}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$a_{11}x = \frac{a_{11}\cdot(b_1a_{22} - b_2a_{12})}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad \Big/ : a_{11} \quad a_{11}\neq 0$$

$$x = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $+$

číslo přiřazené matici

- u soustavy 3×3:

$$\cancel{x}\qquad x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

$$\left(A \,\middle|\, \vec{b}\right)$$

konec motivace ...

- vlastnosti determinantů $\Rightarrow$ def.

- ~~pro~~ „soustava" 1×1: $\det A = a_{11}$ $\qquad A = (a_{11})$

  soustava 2×2: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - \underbrace{a_{12}\ a_{21}}$$

1. řádek $\qquad$ 2. řádku

$$\sum_{P\in S_n} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)}\, a_{2P(2)} \cdot a_{3P(3)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = id \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn} = (-1)^{\operatorname{inv} P} = (-1)^0 = 1 \qquad \operatorname{sgn} = (-1)^1 = \underline{\underline{-1}}$$

- determinant matice 3×3 :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$S_3 = \Big\{ \overset{+}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}, \overset{(-1)^2 \; +}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{(-1)^2 \; +}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}},$$
$$\underset{(-1)^1 \; -}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}, \underset{(-1)^1 \; -}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{(-1)^3 \; -}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \Big\}$$

$3! = 6$ permutací

Sarrusovo pravidlo:

[sarysovo]

jen pro det řádu 2 a 3 !

2×2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $+$

~~4×4~~

~~5×5~~

⋮

3×3:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$-$ $+$

$-$ $+$

$-$ $+$

- výpočet determinantu

- c·

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{P\in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot (c\cdot a_{1P(1)}) \cdot a_{2P(2)}\, a_{3P(3)} =$$

$$= c \cdot \underbrace{\sum_{P\in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} \cdot a_{2P(2)}\, a_{3P(3)}}_{\det A}$$

$$= \underline{\underline{c \cdot \det A}}$$

„opatrná Gaussova eliminace"

- přičíst k řádku c-násobek jiného řádku

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{2ř+1ř}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{3ř-2ř}{=}$$

$$= 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{1ř - 3\cdot 3ř \\ 1ř - 4\cdot 2ř}}{=} 9 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{1} = \underline{\underline{18}}$$

$1 \leftrightarrow 3$ —
$2 \leftrightarrow 3$ —

$\operatorname{sgn} P \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

$1 \cdot 1 \cdot 1$

$\operatorname{sgn} P = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

! nemůžeme přehazovat řádky
musíme přidat sgn P

$\underbrace{\text{přehodit 2 řádky}}_{\text{změnit znaménko det.}} \longleftrightarrow$ aplikuji $\underbrace{\text{transpozici}}_{\text{je lichá}}$

<u>změnit znaménko det.</u> !

- výpočet det. – přehled:

  — vytknout c z řádku

  — přičíst c-nás. řádku k jinému řádku

  — při záměně 2 řádků změní det znaménko

- Proč chceme Gaussovu eliminaci?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\underline{a_{11}a_{22}a_{33}}}$$

det diagonální matice = součinu prvků na hl. diagonále

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\underline{a_{11}a_{22}a_{33}}}$$

totéž pro Δ matici

$$a_{12}a_{23}\cdot 0$$

Protože determinant trojúhelníkové matice spočteme snadno: je roven součinu prvků na hlavní diagonále.