Bilineární formy

• Co to je: forma: zobr. struktury do F $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$

bilineární: 2 složky, lineární v obou složkách

$$f: V_n \times V_n \longrightarrow T \quad (\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$z = f(\vec{x}, \vec{y})$

$\in T$

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$: $\forall \vec{u} \in V_n$:

$$f(\vec{x}+\vec{u}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{u}, \vec{y})$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}+\vec{u}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}, \vec{u})$$

$\forall c \in T$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$: $f(c \cdot \vec{x}, \vec{y}) = c \cdot f(\vec{x}, \vec{y})$

$$f(\vec{x}, c \cdot \vec{y}) = c \cdot f(\vec{x}, \vec{y})$$

• Př. standardní skalární součin: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

$$f(\vec{u}, \vec{v}) := u_1 v_1 + u_2 v_2$$

je opravdu BLF:

$$f(c \cdot \vec{u}, \vec{v}) = c u_1 \cdot v_1 + c u_2 \cdot v_2 = c \cdot (u_1 v_1 + u_2 v_2) = c \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$$

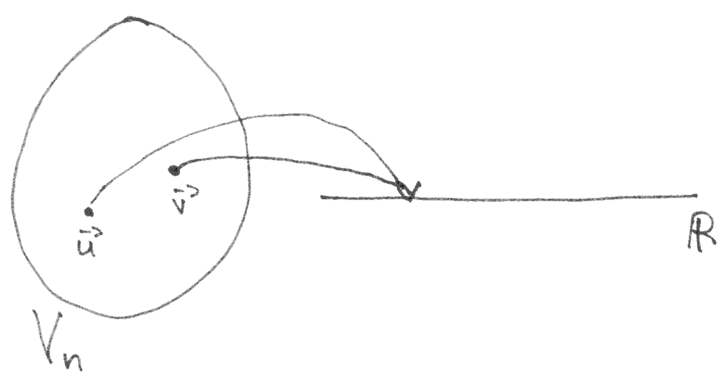
$$(c \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = c \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$f(\vec{u}+\vec{w}, \vec{v}) = (u_1 + w_1) \cdot v_1 + (u_2 + w_2) \cdot v_2 = \underline{u_1 v_1} + \underline{w_1 v_1} + \underline{u_2 v_2} + \underline{w_2 v_2} =$$

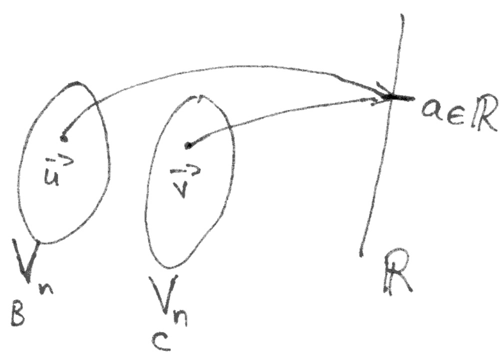
$$= f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{w}, \vec{v})$$

v 2. složkách analogicky ...

• „obrázek:"



nebo:



- Jak bilin. formy vypadají: <u>analytické vyjádření</u>

$$\mathbb{R} \xleftarrow{\ f\ } \underset{B}{V_n} \times \underset{C}{V_n}$$

triviální: kdybychom chtěli určit f, tak by stačilo zadat $\overset{\text{všechny}}{\vee}$ hodnoty $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$

$$\boxed{f(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n}$$

(jako u každého jiného zobrazení)

ale není nutné zadat hodnoty $\underline{\underline{\forall}}\ \vec{x}, \vec{y} \in V_n$, stačí vzít vektory <u>báze</u>

Tj.:

ozn. $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ $\quad \vec{x} \in V_n \quad \vec{x} = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n$

$C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$ $\quad \vec{y} \in V_n' \quad \vec{y} = y_1 \vec{c}_1 + \dots + y_n \vec{c}_n$

$f(\vec{x}, \vec{y}) = ?$ snadno jej dopočítáme:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n,\ y_1 \vec{c}_1 + \dots + y_n \vec{c}_n) \overset{\text{lin. v 1. složce:}}{=}$$

$$= x_1 f(\vec{b}_1, y_1 \vec{c}_1 + \dots + y_n \vec{c}_n) + \dots + x_n f(\vec{b}_n, y_1 \vec{c}_1 + \dots + y_n \vec{c}_n) =$$

$$\overset{f \text{ lin. ve 2. složce:}}{=} x_1 \cdot \big(y_1 f(\vec{b}_1, \vec{c}_1) + y_2 f(\vec{b}_1, \vec{c}_2) + \dots + y_n f(\vec{b}_1, \vec{c}_n)\big) +$$

$$+ x_2 \big(y_1 f(\vec{b}_2, \vec{c}_1) + y_2 f(\vec{b}_2, \vec{c}_2) + \dots + y_n f(\vec{b}_2, \vec{c}_n)\big) +$$

$$+ \quad \dots \quad +$$

$$+ x_n \big(y_1 f(\vec{b}_n, \vec{c}_1) + y_2 f(\vec{b}_n, \vec{c}_2) + \dots + y_n f(\vec{b}_n, \vec{c}_n)\big)$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 f(\vec{b}_1, \vec{c}_1) + \ldots + x_1 y_n f(\vec{b}_1, \vec{c}_n) +$$

$$- - - - \qquad + x_n y_n f(\vec{b}_n, \vec{c}_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(x_i y_k \cdot \underbrace{f(\vec{b}_i, \vec{c}_k)}_{\text{„číslo" (prvek tělesa } T)} \Big)$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(x_i y_k \cdot \underbrace{f(\vec{b}_i, \vec{c}_k)}_{\text{ozn. } a_{ik}} \Big)$$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i y_k \cdot a_{ik}$$

matice BLF: $A = (a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$

• Př.: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 1 \cdot u_1 v_1 + 0 \cdot u_1 v_2 + 0 \cdot u_2 v_1 + 1 \cdot u_2 v_2$

tj. matice: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

• matice BLF vzhledem k bázím B a C:

def.: $$A_{f,B,C} := \left(f(\vec{b}_i, \vec{c}_k) \right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}}$$

$$= \begin{pmatrix} f(\vec{b}_1, \vec{c}_1) & f(\vec{b}_1, \vec{c}_2) & \ldots & f(\vec{b}_1, \vec{c}_n) \\ f(\vec{b}_2, \vec{c}_1) & f(\vec{b}_2, \vec{c}_2) & \ldots & f(\vec{b}_2, \vec{c}_n) \\ - & - & - & - \\ f(\vec{b}_n, \vec{c}_1) & f(\vec{b}_n, \vec{c}_2) & \ldots & f(\vec{b}_n, \vec{c}_n) \end{pmatrix}$$

- zápis analytického vyjádření BLF pomocí matice:

porovnejme:
(vlnkované)

$$\underbrace{f(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot x_i y_k}$$

$$\underset{f,B,C}{A} = \left(a_{ik}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ k=1,\dots,n}} \qquad \langle\vec{x}\rangle_B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\langle\vec{y}\rangle_C = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

tj.:

$$\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \dots + x_n\vec{b}_n$$

$$\vec{y} = y_1\vec{c}_1 + y_2\vec{c}_2 + \dots + y_n\vec{c}_n$$

$$\underbrace{\underset{1\times n}{\langle\vec{x}\rangle_B}\cdot \underset{n\times n}{A_{f,B,C}}\cdot \underset{n\times 1}{\langle\vec{y}\rangle_C^T}} = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} =$$

$$= \left(a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n,\ a_{12}x_1 + \dots + a_{n2}x_n,\ \dots,\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n\right)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1y_1 + \dots + a_{n1}x_ny_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{n2}x_ny_2 + \dots +$$

$$+ a_{1n}x_1y_n + \dots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_i\,y_k = f(\vec{x},\vec{y})$$

tj. opravdu se sobě rovná:

$$\boxed{f(\vec{x},\vec{y}) = \langle\vec{x}\rangle_B\cdot A_{f,B,C}\cdot\langle\vec{y}\rangle_C^T}$$

↑

předpis bilineární formy zapsaný pomocí matice

- změna bází:

pouze pomocí matic přechodu:

zadáno: $f(\vec{x},\vec{y}) = \langle\vec{x}\rangle_B \cdot A_{f,B,C} \cdot \langle\vec{y}\rangle_C^T$

chceme: $f(\vec{x},\vec{y}) = \langle\vec{x}\rangle_G \underbrace{A_{f,G,H}}_{=?} \cdot \langle\vec{y}\rangle_H^T$

najděme $A_{f,G,H}$:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \langle\vec{x}\rangle_B \cdot A_{f,B,C} \cdot \langle\vec{y}\rangle_C^T = \langle\vec{x}\rangle_G \cdot \underbrace{P_{GB}^T \cdot A_{f,B,C} \cdot P_{HC}}_{A_{f,GH}} \langle\vec{y}\rangle_H^T$$

$$\langle\vec{y}\rangle_C^T = P_{HC} \cdot \langle\vec{y}\rangle_H^T$$

$$\langle\vec{x}\rangle_B^T = P_{GB} \cdot \langle\vec{x}\rangle_G^T \quad /^T$$

$$\langle\vec{x}\rangle_B = \langle\vec{x}\rangle_G \cdot P_{GB}^T$$

tj. $$\boxed{A_{f,G,H} = P_{GB}^T \cdot A_{f,B,C} \cdot P_{HC}}$$

- $\underline{\text{def.}}$ symetrická BLF : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n : \; f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$

  např. skal. součin : je symetrické BLF

- matice sym. BLF :

$$A_{f,B,C} = \left(f(\vec{b}_i, \vec{c}_j) \right) = \left(f(\vec{c}_j, \vec{b}_i) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

tj. $a_{ij} := f(\vec{b}_i, \vec{c}_j)$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

matice je symetrická

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{13} & \boxed{a_{23}} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T = A$$