- $\dfrac{\text{def.}}{\text{symetrická BLF}}$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n : \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$

  např. skal. součin : je symetrické BLF

- matice sym. BLF :

$$A_{f,B,C} = \left(f(\vec{b}_i, \vec{c}_j) \right) = \left(f(\vec{c}_j, \vec{b}_i) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

tj. $a_{ij} := f(\vec{b}_i, \vec{c}_j)$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

matice je symetrická

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{13} & \boxed{a_{23}} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T = A$$

- $\mathbb{B}(V_n)$ ... vektorový prostor všech BLF

$$\underbrace{f(\vec{x}, \vec{y})}_{\text{BLF}} + \underbrace{g(\vec{x}, \vec{y})}_{\text{BLF}} \quad \text{... i součet je BLF}$$

$$c \cdot f(\vec{x}, \vec{y}) \quad \text{... je také BLF}$$

BLF na V_n lze repezentovat maticí $n \times n$ $\Rightarrow \dim \mathbb{B}(V_n) = n^2$

- každou čtvercovou matici lze rozložit na symetrickou a antisym. část:

Př.: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A = A_s + A_A$ $\qquad A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $\quad A_A = \frac{1}{2}(A - A^T)$

$$A_s = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -1/2 & 3 & -1/2 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad A_A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

skutečně:

$$A = A_S + A_A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

Pozor: char $T = 2$: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ prvek opačný k 1 je 1

char $T \neq 2$

$$\boxed{\dim \mathbb{S}(V_n) = \frac{1}{2} n (n+1) \qquad \dim \mathbb{A}(V_n) = \frac{1}{2} n \cdot (n-1)}$$

$$\boxed{\mathbb{B}(V_n) = \mathbb{S}(V_n) \oplus \mathbb{A}(V_n)}$$

direktní součet

(průnik pouze nulová BLF)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n (n+1)$$

bez diag., tj. $-n$: $\frac{1}{2} n (n+1) - n = \frac{1}{2} n^2 + \underbrace{\frac{1}{2} n - n}_{-\frac{1}{2} n}$

tj.: $\frac{1}{2} n (n-1)$

$$\boxed{\dim \mathbb{B}(V_n) = \dim \mathbb{S}(V_n) + \dim \mathbb{A}(V_n)}$$

$$n^2 = \frac{1}{2} n (n+1) + \frac{1}{2} n (n-1)$$

Hledání polární báze vůči sym. BLF

hezká báze — škaredé analytické vyjádření / matice

hezká matice — škaredá báze

$\Downarrow$

„vidíme, co je ten objekt zač…"

- chceme: nalézt takovou bázi, aby $\underline{\underline{\text{SBLF}}}$ měla $\underbrace{\text{hezkou}}$ matici

  !symetrická!

  naz. polární báze

  diagonální

  naz. polární tvar

(můžeme: kdyby forma nebyla sym., tak bychom vzali jen její sym. část)

- uvažujme sym. BLF

  ta má sym. matici

  transformace při změně báze:

$$A_{f,C} = P_{CB}^{T} \, A_{f,B} \cdot P_{CB}$$

viz: (věta o součinu det.), $\underbrace{\text{matice elem. transformací}}_{\text{reg.}}$

součin reg. matic je regulární matice

každou reg. matici lze rozložit na součin matic elem. transformací

plyne z Gaussovy eliminace, která reg. matici převede na E

$$A_{f,C} = P^T A_{f,B} \cdot P$$

$$P = E_1 E_2 \cdot \ldots \cdot E_k$$

$$P^T = E_k^T \cdot \ldots \cdot E_2^T \cdot E_1^T$$

diag. polární tvar

polární báze

$$\boxed{A_{f,C} = E_k^T \cdot \ldots \cdot \left(E_2^T \left(E_1^T \cdot A_{f,B} \cdot E_1\right) \cdot E_2\right) \cdot \ldots \cdot E_k}$$

návod na nalezení polárního tvaru SBLF a $\underbrace{\text{báze}}_{C}$, která je vůči této formě f polární

- Př. najděme k f s maticí $A_{f,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (B kanon.) je SBLF

polární tvar a polární bázi

tj. $\underbrace{\text{bázi}}_{\text{polární báze}}$, vzhl. k níž bude $\underbrace{\text{matice } f \text{ diagonální}}_{\text{polární tvar}}$

$A_{f,B}$ | E ← zde se bude „střádat" součin E_i, nakonec tam bude P_{CB}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

v řádcích najdeme souřadnice vektorů polární báze

pomocí symetrických úprav (Gaussova elim. provedená s řádky a ihned také se sloupci) se snažíme matici diagonalizovat

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$2ř - 2 \cdot 1ř$ $\qquad 2s - 2 \cdot 1s$ $\qquad 3ř + 2ř$

opíšeme

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$3s + 2s$

opíšeme

v řádcích polární báze

můžeme pokračovat až k $(E|P)$.

$$A_{f,P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

polární tvar:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \cdot x_1 y_1 - x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$$

polární báze:

$$P = \{(1,0,0), (-2,1,0), (-2,1,1)\}$$