

def. symetrická BLF : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n : f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$

např. skal. součin : je symetrické BLF

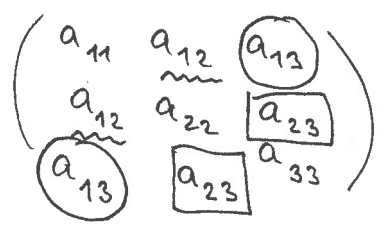
matice sym. BLF :

$$A_{f, B, C} = \left(f(\vec{b}_i, \vec{c}_j) \right) = \left(f(\vec{c}_j, \vec{b}_i) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

tj. $a_{ij} := f(\vec{b}_i, \vec{c}_j)$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

matice je symetrické



$$A^T = A$$

$B(V_n)$... vektorový prostor všech BLF

$$\underbrace{f(\vec{x}, \vec{y})}_{BLF} + \underbrace{g(\vec{x}, \vec{y})}_{BLF} \dots \text{i součet je BLF}$$

$$c \cdot f(\vec{x}, \vec{y}) \dots \text{je také BLF}$$

BLF na V_n lze reprezentovat maticí $n \times n \Rightarrow \dim B(V_n) = n^2$

každou čtvercovou maticí lze rozložit na symetrickou a antisym. část:

Př.: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = A_s + A_A$$

$$A_s = \frac{1}{2} (A + A^T)$$

$$A_A = \frac{1}{2} (A - A^T)$$

$$A_s = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

skutečně:

$$A = A_s + A_A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \quad \checkmark$$

Pozor: char $T = 2$: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ prvek opačný k 1 je 1

char $T \neq 2$

$$\dim \mathcal{S}(V_n) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \dim \mathcal{A}(V_n) = \frac{1}{2}n \cdot (n-1)$$

$$\mathcal{B}(V_n) = \mathcal{S}(V_n) \oplus \mathcal{A}(V_n)$$

↑
direktní součet

(průnik pouze nulová BLF)

•
•
•

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\text{bez diag., tj. } -n : \frac{1}{2}n(n+1) - n = \frac{1}{2}n^2 + \underbrace{\frac{1}{2}n - n}_{-\frac{1}{2}n}$$

$$\text{tj. : } \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\dim \mathcal{B}(V_n) = \dim \mathcal{S}(V_n) + \dim \mathcal{A}(V_n)$$

$$\overset{2}{n} = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1)$$

Hledání polární báze vůči sym. BLF

hezka báze — škaredé analytické vyjádření / matice

hezka matice — škaredá báze

↓
"vidíme, co je ten objekt zač..."

!symetrické!

• chceme: nalézt takovou bázi, aby SBLF měla hezkou matici

↑
naz. polární báze

↑
diagonální
↑
naz. polární tvar

(můžeme: kdyby forma nebyla sym., tak bychom vzali jen její sym. část)

• uvažujme sym. BLF

ta má sym. matici

transformace při změně báze:

$$A_{f,C} = P_{CB}^T A_{f,B} P_{CB}$$

viz: (věta o součinu det.), matice elem. transformací

reg.

součin reg. matic je regulární matice

každou reg. matici lze rozložit na součin matic elem. transformací

$$A_{f,C} = P^T A_{f,B} P$$

plyne z Gaussovy eliminace, která reg. matici převede na E

$$P = E_1 E_2 \dots E_k$$

$$P^T = E_k^T \dots E_2^T E_1^T$$

diag. polární tvar
↑
polární báze

$$A_{f,C} = E_k^T \dots \left(E_2^T \left(E_1^T A_{f,B} E_1 \right) E_2 \right) \dots E_k$$

návod na nalezení polárního tvaru SBLF a báze, která je vůči této formě f polární

