Symetrické bilineární formy

výhody:

- její matice (vzhl. k lib. bázi) je symetrické $\left(a_{ij} = f(\vec{b}_i, \vec{c}_j)\right)$

$f(\vec{b}_i, \vec{c}_j) = f(\vec{c}_j, \vec{b}_i)$

$\Downarrow$

$a_{ij} = a_{ji}$

proto ji lze transformovat na diag. tvar:

- polární tvar, polární báze

  báze B se naz. polární vůči f, je-li $A_{f,B}$ diagonální

- $A_f = A_f^T \Rightarrow L(f) = R(f)$

- samozřejmě: $f = f_S$, $f_A \equiv 0$

  f je rovna své symetrické části

Symetrické BLF na <u>reálném</u> vektorovém prostoru

f: def.:

pozitivně definitní

~~Symetrické BLF~~

- ~~polární tvar, polární báze~~
- ~~nad $\mathbb{R}$: Sylvestrův zákon o setrvačnosti $\Rightarrow$ signatura~~
- ~~$L(f) = R(f)$, protože $A = A^T$~~
- ~~$f = f_S$, $f_A = 0$~~

- normální tvar:

  speciální případ polárního tvaru,

  kdy na diagonále připouštíme $1, -1, 0$

známe-li signaturu, pak můžeme napsat samotnou formu:

např. $(2, 1, 1)$ ... signatura $\Rightarrow$ mat. v norm. tvaru: $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 + 0\, x_4 y_4}$$

- z polárního tvaru (a ještě lépe z normálního tvaru)

  dobře vidíme, jakých hodnot může $\underbrace{\text{forma}}_{}$ nabývat

  $\underline{\underline{\text{SBLF}}}$ f $\to$ kvadratická forma q $\underline{\underline{V_n}}$

  kvadratická forma $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$

  Říkáme, že forma je pozitivně definitní, je-li signatura $(n, 0, 0)$

  negativně definitní $(0, n, 0)$

  pozitivně semidefinitní $(p, 0, k)$

  negativně semidefinitní $(0, z, k)$

  indefinitní (p, z, k)

  $k = 0$

  $k > 0$

$f: V_n \times V_n \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}\, A_f\, \vec{y}^{\,T}}$$

- hodnost BLF:

$$r(f) = h(A_f)$$

↖ lib. mat. formy f

hodnost A_f nezávisí na tom, vzhl. k jaké bázi tato matice formy f je

- nulita / defekt BLF:

$$d(f) = \dim V_n - r(f)$$

- zdef.: $d(f) + r(f) = n$

- regulární forma — A_f reg. ... (tj. $d(f) = 0$, $r(f) = n$)
  singulární — sing.

- levý vrchol: $L(f) = \{\vec{x} \in V_n;\ \forall y \in V_n: f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$

  pravý vrchol: $R(f) = \{\vec{y} \in V_n;\ \forall \vec{x} \in V_n: f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$

$$\boxed{\dim L(f) = \dim R(f) = d(f)}$$

protože $h(A^T) = h(A)$

- najděme $L(f)$:

  hledáme $\vec{x} \in V_n$ taková, že $\forall \vec{y} \in V_n$: $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

$$\underbrace{\vec{x}\, A_f}_{\underbrace{(\dots)}_{\vec{o}}}\ \underbrace{\vec{y}^{\,T}}_{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}} = 0$$

tj. $\vec{x} \cdot A_f = \vec{o}\ \ /^T$

homog. soustava: $\boxed{A_f^T \cdot \vec{x}^{\,T} = \vec{o}^{\,T}}$

dimenze mn. všech řešení:

$$d(f) = n - \underbrace{h}_{r(f)}$$

pravý vrchol:
hledáme $\vec{y} \in V_n$; $\forall \vec{x} \in V_n$:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

$$\vec{x}\, \underbrace{A_f \cdot \vec{y}^{\,T}}_{\vec{o}^{\,T}} = 0$$

$$\boxed{A_f\, \vec{y}^{\,T} = \vec{o}^{\,T}}$$

- snadné kritérium, jak poznat, že je kvadr. forma PD, ND, ID

polární tvar:

PD: $\begin{pmatrix} + & & & 0 \\ & + & & \\ & & + & \\ 0 & & & + \end{pmatrix}$

~~sub~~ subdeterminanty:

$+$

$+ \cdot +$

$+ \cdot + \cdot +$

$+ \cdot + \cdot + \cdot +$

kv. forma je PD $\Leftrightarrow$ posloupnost znamének hlavních minorů je tvořena výhradně kladnými čísly

$$A = P^T A' P \quad / \det$$

$$\det A = \det P^T \cdot \det A' \cdot \det P$$

$$\det A = \underbrace{(\det P)^2}_{>0} \cdot \det A'$$

nemění znaménko

- matice kvadr. formy A vzhl. k lib. bázi

forma je PD $\Leftrightarrow$ posl. znamének hl. minorů je posl. kladných čísel

- **ND:** $\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$ posl. znamének hlavních minorů:

$- \quad = \quad -$

$- \cdot - \quad = \quad +$

$- \cdot - \cdot - \quad = \quad -$

forma je ND $\Leftrightarrow$ posl. znam. hl. minorů začíná záp. prvkem a pak se znaménka pravidelně střídají

Proč?

• např. pozitivně definitní kvadratická forma :

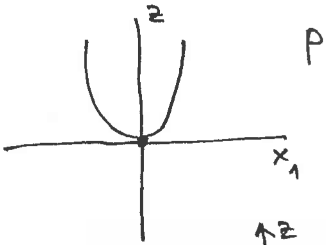
$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = E$$ ... matice SPDBLF v normálním tvaru

SBLF: $f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$

$$\boxed{\underbrace{q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})}_{\text{kvadratická forma}} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > 0 \text{ pro } \vec{x} \neq \vec{o}}$$

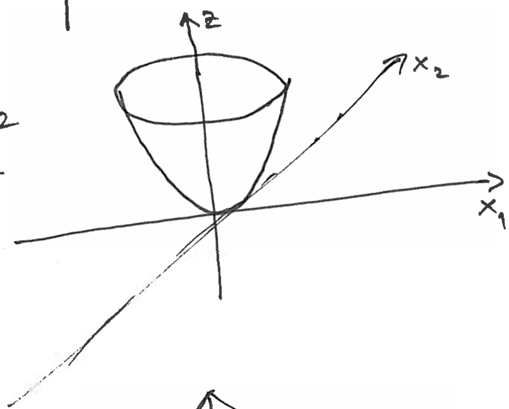
MA!

• Př. $z = x_1^2$



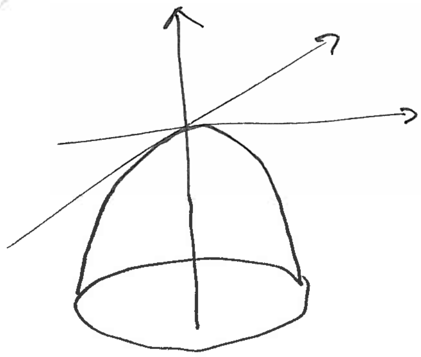
PD => minimum

• Př. $z = x_1^2 + x_2^2$



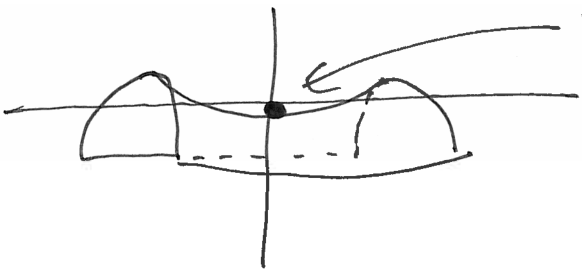
PD => minimum

• Př. $z = -x_1^2 - x_2^2$



ND => max.

• $z = x_1^2 - x_2^2$



není ani min, ani max

sedlový bod

indefinitní