Skalární součin

geometrická motivace: v předmětu Geometrie I

LA: na SŠ: skal. součin $\vec{u}\cdot\vec{v} = \underbrace{u_1 v_1 + u_2 v_2}_{\text{tohle je BLF}}$ $(+\, u_3 v_3 \ldots)$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

je to:
- bilineární forma
- symetrická
- pozitivně definitní, protože přísl. kvadr. forma je PD

def.:

(• je v normálním tvaru)

Def. skal. součin — S PD BLF

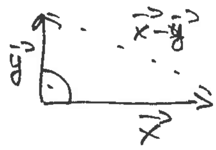
$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$$

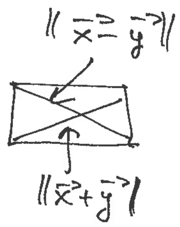
axiomatický přístup

$$f(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{o}$$

norma vektoru — $\|\vec{x}\| := \sqrt{f(\vec{x}, \vec{x})}$ … dobře definováno, výraz pod $\sqrt{\ }$ vždy kladný (či 0 pro $\vec{x} = \vec{o}$), protože f je PD

Pythagorova věta / $\vec{x} \perp \vec{y}$





$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = f(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{x}) + 2\underbrace{f(\vec{x}, \vec{y})}_{0} + f(\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

def. $\vec{u} \perp \vec{v}$ ... $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

a Geom. 1

SŠ: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \underbrace{\cos\varphi}_{\langle -1,1\rangle}}$

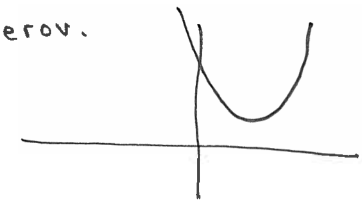
nerovnost: Cauchy – Schwarz

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

důk.

$$\underbrace{(\vec{x} - a\cdot\vec{y})\cdot(\vec{x} - a\vec{y})}_{PD \Rightarrow \ge 0} = \vec{x}\cdot\vec{x} - 2a\cdot\vec{x}\cdot\vec{y} + a^2\cdot\vec{y}\cdot\vec{y} =$$

$$= \underbrace{\|\vec{x}\|^2 - 2a\vec{x}\vec{y} + a^2\|\vec{y}\|^2}_{\text{kvadrat. nerov.}} \ge 0$$



$$D \le 0$$

$$(-2\cdot\vec{x}\vec{y})^2 - 4\|y\|^2\cdot\|\vec{x}\|^2 \le 0 \quad /:4$$

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \le \|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2 \quad /\sqrt{}$$

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

- $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

$\vdots$

- Počítání se skal. součinem

$\|\vec{o}\| = 0$ z def. skal. souč.

$\|\vec{x}\| > 0 \iff \vec{x} \neq \vec{o}$ } PD

$$\underline{\underline{\|a \cdot \vec{x}\|}} = ? \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{(a\cdot\vec{x})\cdot(a\cdot\vec{x})} = \sqrt{a^2\cdot(\vec{x}\cdot\vec{x})} = \sqrt{a^2\|\vec{x}\|^2} =$$

$$= \underline{\underline{|a|\cdot\|\vec{x}\|}}$$

- skalární součin a norma:

sk. součin lze vyjádřit pouze pomocí normy

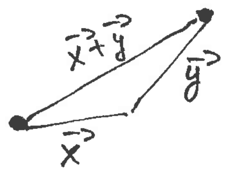
$$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right)}$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + 2\cdot\vec{x}\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

- trojúhelníková nerovnost

oklikou je to dále...

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$$



důk.: $$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\underbrace{\vec{x}\cdot\vec{y}}_{\leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 =$$

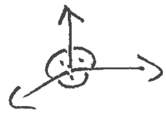
$$= \left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2 \implies \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

důsl.: integrály, sumy... viz Cauchy-Schwarz

- $\vec{x}, \vec{y}$ kolmé (ortogonální) : $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

- Pýthagorova věta : $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Pozor: platí i obrácená implikace



- ortogonální množina vektorů je LNZ

  (množina neobsahující $\vec{o}$)

důk:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k = \vec{o} \quad / \cdot \vec{v}_i$$

LNZ $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

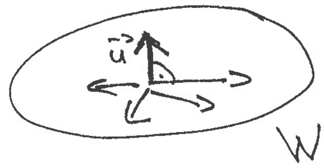
$$a_1\underbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_i}_{0} + a_2\underbrace{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_i}_{0} + \dots + a_i\underbrace{\vec{v}_i\,\vec{v}_i}_{\|\vec{v}_i\|^2} + \dots + a_k\underbrace{\vec{v}_k\cdot\vec{v}_i}_{0} = \underbrace{\vec{o}\cdot\vec{v}_i}_{0}$$

$$a_i \cdot \underbrace{\|\vec{v}_i\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\forall i = 1,\dots,k \quad a_i = 0}$$

pokud $\vec{v}_i \neq \vec{o}$

- ortogonální doplněk :

$W \subseteq V$ (vekt. podprostor) $\qquad W^\perp := \{\vec{u} \in V;\ \vec{u} \perp \vec{w}\ \forall \vec{w} \in W\}$



$W^\perp$ je podprostor ve V !

ověříme uzavřenost vzhl. k + a ·

$\vec{u}, \vec{v} \in W^\perp \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W^\perp$ ano, protože $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$ $\forall \vec{w} \in W$ tj. $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ $/+$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = 0$$

$a \cdot \vec{u} \perp \vec{w}$, tj. $(a\vec{u})\cdot\vec{w} = 0$

$$a\cdot\underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{w})}_{0} = 0 \ \checkmark$$

- dimenze $W^\perp$?

a) $W \cap W^\perp = \{\vec{o}\}$, protože: sporem: kdyby $\vec{u} \neq \vec{o}$

$\vec{u} \in W \cap W^\perp$

$\vec{u} \in W$

$\vec{u} \in W^\perp \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{u}$

$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$

pouze pro $\vec{u} = \vec{o}$

b) $W_k = [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k]$

$\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ ... báze W

Kdy $\vec{x} \in W^\perp$? $\Leftrightarrow$ $\vec{x} \cdot \vec{w}_1 = 0, \ \vec{x} \cdot \vec{w}_2 = 0, \dots, \vec{x} \cdot \vec{w}_k = 0$

$\vec{x} \in V \Rightarrow$ lze jej vyjádřit jako LK prvků $\underbrace{\text{báze } V}$

$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\}$

$$\vec{x} = c_1 \vec{w}_1 + c_2 \vec{w}_2 + \dots + c_k \vec{w}_k + c_{k+1} \vec{v}_{k+1} + \dots + c_n \vec{v}_n \quad / \cdot \vec{w}_1, \ \cdot \vec{w}_2, \ \dots, \ \cdot \vec{w}_k$$

$\underbrace{\vec{x} \cdot \vec{w}_1}_{0} = c_1 \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1$

$\vec{x} \perp \vec{w}_i \Rightarrow c_1, \dots, c_k = 0$

$$\underbrace{c_{k+1} \vec{v}_{k+1} + \dots + c_n \vec{v}_n}_{\text{prvky } \underbrace{\text{podprostoru}}_{W^\perp} \text{ dimenze } n-k} \perp \vec{w}_i$$

tj. $\dim W^\perp = n - \underbrace{k}_{\dim W}$

$$\boxed{\dim W + \dim W^\perp = \underbrace{\dim V}_{n}}$$

- Gramův – Schmidtův ortogonalizační proces

Báze ve V: $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, w_n\}$

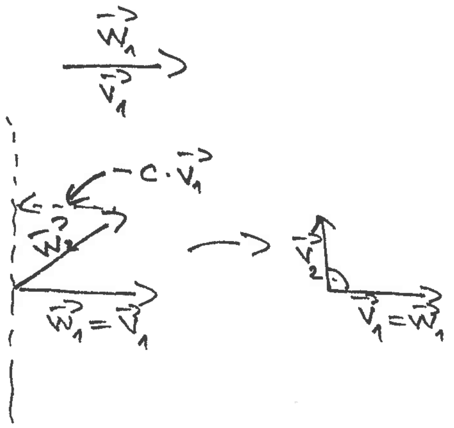
Jak ji zortogonalizovat?

budoucí ortogonální báze: $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

vytvořme ji:

- $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$
- $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - c \cdot \vec{v}_1$

tj. $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{v}_1\|^2}$



$$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - c\vec{v}_1 \quad / \cdot \vec{v}_1$$

$$\underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}_{0} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2 - c \cdot \vec{v}_1 \vec{v}_1$$

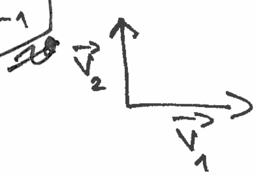
$$c = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{v}_1\|^2}$$

- $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - c_1 \vec{v}_1 - c_2 \vec{v}_2$

tj. $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \dfrac{\vec{w}_3 \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \dfrac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \cdot \vec{v}_2$

- ⋮

- $\vec{v}_n = \vec{w}_n - \underbrace{\dfrac{\vec{w}_n \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}}\vec{v}_1 - \underbrace{\dfrac{\vec{w}_n \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}}\vec{v}_2 - \dots - \underbrace{\dfrac{\vec{w}_n \vec{v}_{n-1}}{\|w_{n-1}\|^2}}\vec{v}_{n-1}$



Fourierovy koeficienty

$$\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - c_1 \vec{v}_1 - c_2 \vec{v}_2 \quad / \cdot \vec{v}_1,\ \cdot \vec{v}_2$$

$$\underbrace{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1}_{0} = \vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1 - c_1 \|\vec{v}_1\|^2 - \underbrace{c_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}_{0}$$

$$\underbrace{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2}_{0} = \vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2 - \underbrace{c_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}_{0} - c_2 \|\vec{v}_2\|^2$$

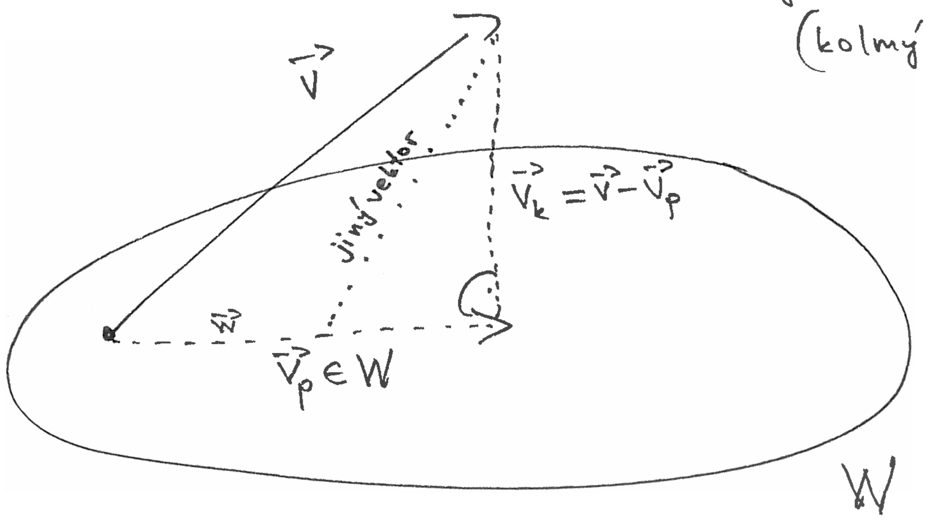
$$0 = \vec{w}_3 \vec{v}_1 - c_1 \|\vec{v}_1\|^2$$

$$0 = \vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2 - c_2 \|\vec{v}_2\|^2$$

Věta o aproximaci

„nejblíže" vektoru $\vec{v}$ je v W

ortogonální projekce $\vec{v}$ do W
(kolmý průmět)



$\vec{v}_p$ ... ortog. projekce

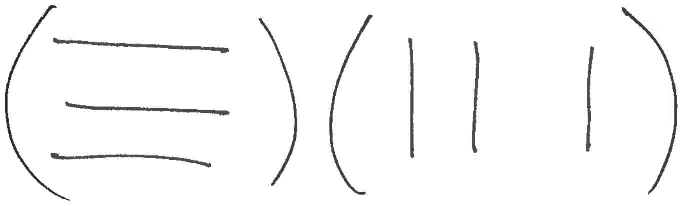
$$\underbrace{\|\vec{v} - \vec{v}_p\|}_{\|\vec{v}_k\|} < \|\vec{v} - \vec{w}\| \quad \forall \vec{w} \in W$$

důk. „po kolmici je to nejblíže"

Pýth. věta:

$$\underbrace{\|\vec{v} - \vec{w}\|^2}_{\text{„jiný vektor"}} = \|\vec{v} - \vec{v}_p\|^2 + \underbrace{\|\vec{v}_p - \vec{w}\|^2}_{\substack{>0 \\ \text{pokud } \vec{v}_p \neq \vec{w}}} > \|\vec{v} - \vec{v}_p\|^2$$

$A \cdot A^T = E$ (OG matice)



$\vec{a}_i$ ... i-tý řádek A

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix} = \left(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j \right)_{i,j=1,\dots,}$$

vektory jsou /jednotkové
\ na sebe kolmé

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = \|\vec{a}_1\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{a}_1\| = 1$$