- $\det A = \det A_1 + \det A_2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\sum\limits_{P\in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} b_{2P(2)} a_{3P(3)}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\sum\limits_{P\in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} c_{2P(2)} a_{3P(3)}}$$

$$\underbrace{\sum_{P\in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} b_{2P(2)} a_{3P(3)} + \sum_{P\in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} c_{2P(2)} a_{3P(3)}}_{\sum\limits_{P\in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} \left(b_{2P(2)} + c_{2P(2)}\right) a_{3P(3)}}$$

- jeden řádek nulový $\Rightarrow \det A = 0$

vybíráme vždy z <u>každého</u> řádku $\quad a_{1P(1)} \cdot \underbrace{a_{2P(2)}}_{=0} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)}$

tj. každý součin $=0 \Rightarrow \underbrace{\sum \text{součinů}}_{\sum 0 \,=\, 0} = 0$

- 2 stejné řádky $\Rightarrow \det A = 0$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$- \qquad +$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{21}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{21} - a_{23}a_{22}a_{11} - a_{23}a_{12}a_{21} = 0$$

<u>Princip:</u> sudé permutace

liché permutace $=$ transpozice* $\cdot$ sudé permutace

(i,j)

- k řádku přičteme c-násobek jiného řádku ... hodnota det se nezmění

$$\begin{vmatrix} \bar r_1 \\ \bar r_2 \\ \bar r_3 \\ \bar r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar r_1 \\ \bar r_2 \\ \bar r_3 \\ \bar r_4 \end{vmatrix} + c \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \bar r_1 \\ \bar r_1 \\ \bar r_3 \\ \bar r_4 \end{vmatrix}}_{0} = \begin{vmatrix} \bar r_1 \\ \bar r_2 \\ \bar r_3 \\ \bar r_4 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \bar r_1 \\ c\cdot\bar r_1 \\ \bar r_3 \\ \bar r_4 \end{vmatrix}}_{0} = \begin{vmatrix} \bar r_1 \\ \bar r_2 + c\cdot\bar r_1 \\ \bar r_3 \\ \bar r_4 \end{vmatrix}$$

např. k 2. řádku přičteme c-násobek 1. řádku

- prohodíme 2 řádky => det změní znaménko

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 - (r_3 + r_2) \\ r_3 + r_2 \\ r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ -r_3 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ -r_3 \\ r_2 \\ r_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r_1 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_4 \end{vmatrix}$$

$r_2 \longleftrightarrow r_3$

aplikací transpozice na řádky dostaneme det s opačným znaménkem

- aplikací permutace P na řádky dostaneme $\underline{\underline{\operatorname{sgn} P \cdot \det A}}$

sudá permutace = složení sudého počtu transpozic

lichá permutace = lichého

- $\det A^T = \det A$

$$\det A = \sum_{P \in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{1P(1)} \cdot a_{2P(2)} \cdot a_{3P(3)} = \sum_{P \in S_3} \operatorname{sgn} P^{-1} \cdot a_{P^{-1}(1)1}\, a_{P^{-1}(2)2}\, a_{P^{-1}(3)3} =$$

$$= \sum_{P \in S_3} \operatorname{sgn} P \cdot a_{P(1)1} \cdot a_{P(2)2} \cdot a_{P(3)3}$$

množina všech P^{-1}, $P \in S_3$

= množině všech P, $P \in S_3$

$= S_3$

$$\operatorname{sgn} P^{-1} = \operatorname{sgn} P$$

- $\det A = \det A^T$ $\Rightarrow$ tvrzení pro řádky platí i pro sloupce

def.: (čtvercové matice:)

- A singulární — $h(A) < n$ ← řád matice, počet řádků

  A regulární — $h(A) = n$

V/ A je singulární $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

A je regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$$\sim \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n$$

$c_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

---

z toho všeho plyne „opatrná Gaussova eliminace"

- Laplaceova věta

věta o rozvoji determinantu podle prvků nějakého řádku či sloupce

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det \underbrace{A_{ij}}$$

← rozvoj podle prvků j-tého sloupce

matice A, z níž je vypuštěn i-tý řádek a j-tý sloupec } tzv. algebraický doplněk

---

důk.

1.sloupec

rozvoj podle prvků 2.sloupce: $\Rightarrow$ $\underbrace{j=2}$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}}_{\det A} = \begin{vmatrix} s_1 & \underbrace{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}}_{s_2} & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & \begin{matrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & s_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & \begin{matrix} 0 \\ a_{22} \\ 0 \end{matrix} & s_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ a_{32} \end{matrix} & s_3 \end{vmatrix}$$

a_{12} na pozici 11: $\boxed{j-1 \text{ posunů}}$, $i=1$

a_{22} na pozici 11: $\boxed{(i-1)+(j-1) \text{ posunů}}$, $i=2$

a_{32} na pozici 11: $\boxed{(i-1)+(j-1) \text{ posunů}}$, $i=3$

$$= (-1)^{(i-1)+(j-1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ 0 & & \\ 0 & A_{12} & \end{vmatrix} +$$

každý posun $\approx$ 1 transpozici

$$= (-1)^{(i-1)+(j-1)}_{\substack{\uparrow \\ i=1}} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_{12}}} \\ 0 & & \end{vmatrix} + (-1)^{(i-1)+(j-1)}_{\substack{\uparrow \\ i=2}} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_{22}}} \\ 0 & & \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{(i-1)+(j-1)}_{\substack{\uparrow \\ i=3}} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_{32}}} \\ 0 & & \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j-2}_{\substack{\uparrow \\ i=1}} a_{12} \cdot \det A_{12} + (-1)^{i+j-2}_{\substack{\uparrow \\ i=2}} \cdot a_{22} \cdot \det A_{22} +$$

$$(-1)^{i+j-2}_{\substack{\uparrow \\ i=3}} a_{32} \cdot \det A_{32} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+\underset{\substack{\uparrow \\ j=2}}{2}} a_{i2} \det A_{i2}$$

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$