- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

důk.: pomocí matic elementárních transformací:

a) vynásobme řádek matice B nenulovým c

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\text{řádek} \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \\ \vec{b}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ cb_{21} & cb_{22} & cb_{23} & cb_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ c \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \\ \vec{b}_4 \end{pmatrix}$$

je regulární

reprezentuje vynásobení 2. řádku matice B číslem c

b) k i-tému řádku přičteme k-tý řádek

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \\ \vec{b}_4 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{11}+b_{31} & b_{12}+b_{32} & b_{13}+b_{33} & b_{14}+b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 + \vec{b}_1 \\ \vec{b}_4 \end{pmatrix}$$

je regulární

reprezentuje přičtení 1. řádku k 3. řádku

konec pozorování matic elem. transformací

---

dokažme tedy: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

1) A singulární $\Rightarrow \det A = 0$

$A \cdot B$ ... singulární $\Rightarrow \det(AB) = 0$

tj. triv.: $\underbrace{\det(AB)}_{0} = \underbrace{\det A}_{0} \cdot \underbrace{\det B}_{\text{cokoli}}$

2) A regulární $\Rightarrow$ ~~po~~ Gaussovou eliminací lze dojít až k E

$$A\cdot B = \underbrace{E_k \cdot \ldots \cdot E_3 E_2 E_1 E}_{A} \cdot B$$

součin matic elementárních transformací

a) $\det E_{c,i} \overset{\text{např.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot c\cdot 1\cdot 1 = \underline{\underline{c}}$

b) $\det E_{ij} \overset{\text{např.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$

- $\det(E_{c,i}\cdot B) \overset{\text{např.}}{=} \begin{vmatrix} \vec{b}_1 \\ c\cdot\vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \\ \vec{b}_4 \end{vmatrix} = \underbrace{c}_{\det E_{c,i}}\cdot \det B = \underline{\underline{\det E_{c,i}\cdot \det B}}$

- $\det(E_{ij}\cdot B) \overset{\text{např.}}{=} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right| = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 + \vec{b}_1 \\ \vec{b}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \\ \vec{b}_4 \end{vmatrix} =$

$= \det B = 1\cdot \det B = \underline{\underline{\det E_{ij}\cdot \det B}}$

tj. pro matice elem. transf. platí: $\det E_{i\ldots}\cdot \det B = \det(E_{i\ldots}\cdot B)$

indukcí:

$\det(E_1 B) = \det E_1 \cdot \det B$

$\det(E_2\cdot E_1 B) = \det E_2 \cdot (\det E_1 \cdot \det B)$

$\det(E_3\cdot E_2 E_1 B) = \det E_3 \cdot \det(E_2 E_1 B) = \overbrace{\det E_3\cdot \det E_2 \cdot \det E_1}^{\det(E_3\cdot E_2\cdot E_1)}\cdot \det B$

tj.:

$$\det(AB) = \det(\underbrace{E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1}_{A} \cdot B) =$$

$$= \det(E_k \cdot E_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1) \cdot \det B = \underline{\det A \cdot \det B}$$

Výpočet inverzní matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

def.

$$\boxed{A \cdot \underbrace{A^{-1}}_{\text{sloupce ozn. } \vec{b}_j} = E} = A^{-1} \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_3 \vec{b}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A \cdot \vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & A\vec{b}_3 \end{pmatrix} =$$

doma:

$$A \cdot \vec{b}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

takže: ozn. $B = A^{-1}$ $\quad \underline{A \cdot A^{-1}} = A \cdot B = \begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & A\vec{b}_3 \end{pmatrix} = \underline{E}$

$$A\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tyto 3 soustavy zapišme maticově

$$\underbrace{\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right)} \qquad \underbrace{\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right)} \qquad \underbrace{\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right)}$$

soustava, řešením je $\vec{b}_1$, tj. 1. sloupec inv. mat. $(E \mid \vec{b}_1)$

řešením soust. je $\vec{b}_2$, tj. 2. sloupec A^{-1} $(E \mid \vec{b}_2)$

řešením 3. sloupec A^{-1} $(E \mid \vec{b}_3)$

stejná matice soustavy!

řešme zároveň se všemi 3 pravými stranami, tj.

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{matrix}\right) \sim \dots \sim \left(E \,\middle|\, \vec{b}_1 \ \ \vec{b}_2 \ \ \vec{b}_3\right) =$$

$$= \underline{\underline{\left(E \mid A^{-1}\right)}}$$

- $\exists$ vzorec, který by nám umožnil přímo napsat konkrétní prvek A^{-1} ?

$$A^{-1} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

náhled na základě motivace determinantů pomocí řešení soustav

$$b_{ij} = ? \qquad \left(A \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{matrix}\right)$$

na j-té pozici je 1

j-tý sloupec matice E

$$\underbrace{x_i}_{b_{ij}} = \frac{\det A_i}{\det A}$$

... to je první náhled

- Odvození vztahu pro výpočet A^{-1}

def.
$$A_{rec} = \Big(\underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{znaménko}} \underbrace{\det A_{ij}}_{\text{subdeterminant vzniklý vypuštěním } i\text{-tého řádku a } j\text{-tého sloupce}} \Big)^{T}_{i,j=1,\dots,n}$$

pozor!: transponovat!

A_{rec} … naz. matice reciproká k matici A

znaménko

subdeterminant vzniklý vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce

tento subdet opatřený znaménkem … naz. algebraický doplněk prvku a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{rec}^{T} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_{rec} = \text{tohle } \underline{\text{transponované}}\,!}$$

Příště: dokážeme:
$$\boxed{A \cdot A_{rec} = (\det A) \cdot E}$$