důkaz: $A \cdot A_{rec} = (\det A) \cdot E = A_{rec} \cdot A$

$$A_{rec} = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)^T_{i,j=1,\dots,n} = \left((-1)^{i+j} \det A_{ji} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

$$A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$$

$$\boxed{\underset{(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}}{A} \cdot \underset{(b_{jk})_{j,k=1,\dots,n}}{B} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{i,k=1,\dots,n} = C = (c_{ik})_{i,k=1,\dots,n}}$$

součin matic

$$\boxed{A \cdot B = C} \qquad \boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}}$$

- takže vypočteme součin: $A \cdot A_{rec}$

$$A \cdot A_{rec} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \cdot \underbrace{\left((-1)^{j+k} \cdot \det A_{kj} \right)_{j,k=1,\dots,n}}_{b_{jk}} =$$

$$= \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det A_{kj}}_{} \right)_{i,k=1,\dots,n} \overset{?}{=} \underbrace{\det A \cdot E}_{\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}}$$

- $i = k \Rightarrow \det A$
- $i \neq k \Rightarrow 0$

a) $i = k$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j+i} \det A_{ij} \underset{\text{rozvoj det.}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \underline{\underline{\det A}}$

b) $i \neq k$:

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}} (-1)^{j+k} \det A_{kj} \overset{?}{=} 0 \checkmark$$

← zde by „mělo být a_{kj}", pak by to byl rozvoj det.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots \\ & \dots & & \\ \cancel{a_{k1}} & \cancel{a_{k2}} & \cancel{a_{k3}} & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots \end{vmatrix}$$

tj.: $\boxed{\text{místo } a_{kj} \text{ tu jsou } a_{ij}}$

k-tý řádek je nahrazen i-tým řádkem

det se 2 stejnými řádky $= 0$

tj.: $\boxed{A \cdot A_{rec} = (\det A) \cdot E}$ $\square$

- det definovány nad $\underbrace{\text{okruhem}}_{\text{nemáme garantovánu } \exists a^{-1}}$

pokud pracujeme s prvky pole $\Rightarrow$ můžeme dělit:

$$A \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\det A} \cdot A_{rec}\right)} = E$$

tj. $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{rec}}$

Cramerovo pravidlo

- ? jsou skutečně v čitatelích a jmenovatelích řešení soustav $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ determinanty ?

  U soustav 2×2, 3×3 jsme to pozorovali, u větších jsou však výpočty dlouhé…

- mějme soustavu $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \mid \vec{b} \right)$$

- dokažme: $\boxed{(\det A)\cdot x_j = \det A_j}$

  j-tý sloupec nahrazen $\vec{b}$

$$A\cdot X_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & \overbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}^{b_1}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, & a_{23} \\ a_{31}, & \underbrace{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}_{b_3}, & a_{33} \end{pmatrix}$$

j-tý sloupec nahrazen $\vec{x}$

tj. $\boxed{A\cdot X_j = A_j}$ ✓ / det

$$\det(A\cdot X_j) = \det A \cdot \underbrace{\det X_j} = (\det A)\cdot x_j$$

dle definice determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \vdots & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & x_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 \cdot \ldots \cdot x_j \cdot \ldots 1 = x_j$$

j-tý sloupec

identická perm.
sgn = +1

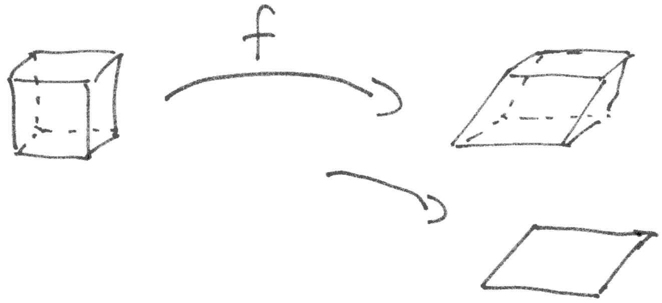
$$\det A \cdot x_j = \det A_j$$

! pole: $\boxed{x_j = \frac{\det A_j}{\det A}}$

Podobnost matic

- změna báze ... vynásobení $\underbrace{\text{matice přechodu}}_{\text{matice identického automorfismu}}$

obecněji:



$f : V \longrightarrow V$

homomorfismus

endomorfismus

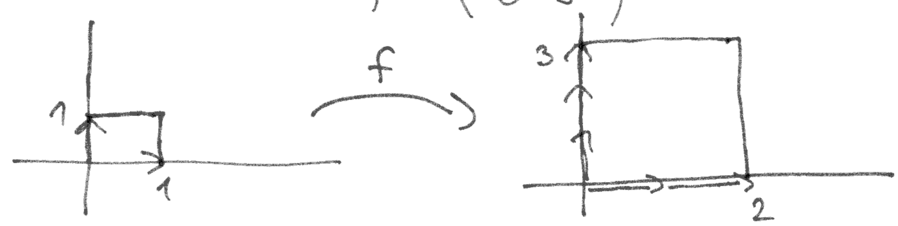
- idea: abychom viděli, jak daný endomorfismus f transformuje vektorový prostor V, tak bude pomocí, napíšeme-li matici f vzhledem k vhodné bázi — tj. aby A_f byla „hezká"

- Př. $f : V_2 \to V_2$ $\qquad A_f = E$ ... endomorfismus ~~jedn~~ mající za matici E

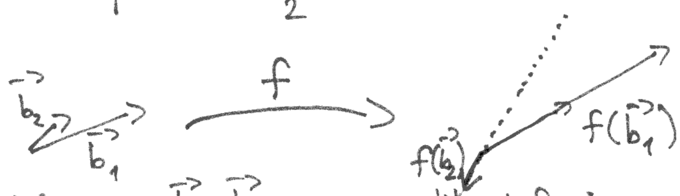
transformuje V_2 přehledně:

nedělá $\underline{\underline{\text{nic}}}$:-) $\qquad f = id$

- Př. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$



Př. $f : \mathbb{R}^2_B \to \mathbb{R}^2$



$A_{f,B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B ... taková báze, že $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ se po aplikaci f jen „natáhnou"

- tj.: aby byla A_f „přehledná“, chceme:

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{b}_1) &= \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 \\ f(\vec{b}_2) &= \lambda_2 \vec{b}_2 \end{aligned}}$$

hledejme bázi (vektory) $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ takové, že , tj. že $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

- maticově:

$$A \cdot \vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{b}_1$$
$$A \cdot \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{b}_2$$

ale: neznáme $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \lambda_1, \lambda_2$

- hledejme k zadané čtvercové matici A vektory (a čísla λ);

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

hledáme ty vektory, které endomorfismus pouze „natáhne“
smrští, …
zachová se směr

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{o}$$

$$A\vec{v} - \lambda E\vec{v} = \vec{o}$$

$$(A - \lambda E)\cdot\vec{v} = \vec{o}$$

$\Leftarrow$ homogenní soustava n rovnic o n nezn.

$\exists$ řeš. homog. soustavy: $\exists$ vždy: $\vec{o}$
protože $h(A) = h(A|\vec{o})$ Frobenius

matice soustavy:
- regulární $\Rightarrow \exists!$ řeš.: $\vec{o}$ … to nás nezajímá…
- singulární $\Rightarrow$ řešení tvoří vektorový podprostor dimenze $n - h$

n … n neznámých
h … hodnost matice soustavy

- soust. $\left(A-\lambda E \mid \vec{o}\right)$

¿ kdy má netriv. řešení ? $\iff$ $A-\lambda E$ singulární

$\Updownarrow$

$$\boxed{\det(A-\lambda E)=0}$$

což je rovnice pro λ