- tj.: aby byla A_f „přehledná", chceme:

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{b}_1) &= \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 \\ f(\vec{b}_2) &= \lambda_2 \vec{b}_2 \end{aligned}}$$

hledejme bázi (vektory) $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ takové, že , tj. že $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

- maticově:

$$A \cdot \vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{b}_1$$
$$A \cdot \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{b}_2$$

ale: neznáme $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \lambda_1, \lambda_2$

- hledejme k zadané čtvercové matici A vektory (a čísla λ);

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

hledáme ty vektory, které endomorfismus pouze „natáhne"

smrští, ...

zachová se směr

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{o}$$
$$A\vec{v} - \lambda E\vec{v} = \vec{o}$$
$$\underbrace{(A - \lambda E)}_{\text{matice soustavy}} \cdot \vec{v} = \vec{o}$$

$\Leftarrow$ homogenní soustava n rovnic o n nezn.

$\exists$ řeš. homog. soustavy: $\exists$ vždy: $\vec{o}$

protože $h(A) = h(A|\vec{o})$ Frobenius

matice soustavy:
- regulární $\Rightarrow \exists!$ řeš.: $\vec{o}$ ... to nás nezajímá...
- singulární $\Rightarrow$ řešení tvoří vektorový podprostor dimenze $n - h$

n neznámých; h hodnost matice soustavy

- soust. $\left(A-\lambda E \mid \vec{o}\right)$

? kdy má netriv. řešení ? $\Longleftrightarrow$ $A-\lambda E$ singulární

$\Updownarrow$

$$\boxed{\det(A-\lambda E)=0}$$

což je rovnice pro λ

- def.
  - charakteristická rovnice : $\det(A-\lambda E)=0$
  - charakteristický polynom : $\det(A-\lambda E)$
  - $\lambda\in\mathbb{R}, \mathbb{C}$; $\exists\, A\vec{u}=\lambda\vec{u}$: λ: vlastní číslo matice A
    $\vec{v}$: vlastní vektor matice A

Př. $A=\begin{pmatrix}4&0\\1&2\end{pmatrix}$

najděme:

- vlastní čísla: $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 0\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)-0\cdot 1=$

$$\lambda E=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$$

$= 8-6\lambda+\lambda^2$ $\leftarrow$ char. polynom

kořeny char. polynomu = vlastní čísla:

$$\lambda^2-6\lambda+8=0$$

$$\lambda_{1,2}=\left\langle\begin{matrix}\underline{\underline{2}}\\ \underline{\underline{4}}\end{matrix}\right.$$

- vlastní vektory:

1. vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$

$$A\vec{u} = 2\cdot\vec{u} \qquad \vec{u} = ? \text{ ... vlastní vektor}$$

$(A-2E)\vec{u} = \vec{o}$ homog. soust.

její matice je singulární (tak jsme hledali vlastní čísla)

$$A-2E = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 \\ 1 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

homog. soust.: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad x = 0$, y lib.

mn. všech řeš. homog. soustavy: $\underbrace{(0, y)}_{\{y\cdot(0,1),\ y\in\mathbb{R}\}}, \ y \in \mathbb{R}$

$\boxed{[(0,1)]}$

vektorový podprostor generovaný vektorem $(0,1)$

$$A\vec{u} = 2\vec{u}$$
$$A\cdot c\vec{u} = 2\cdot c\vec{u}$$
$$c\cdot A\vec{u} = c\cdot 2\vec{u} \quad /: c \neq 0$$
$$A\vec{u} = 2\vec{u}$$

tj. když je $\vec{u}$ vlastním vektorem $\Rightarrow$ $c\cdot\vec{u}$ je vl. vektorem mat. A
$c \neq 0$

např. vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 2 je např. $\vec{u} = (0,1)$

2. vlastní vektor příslušný vl. číslu 4:

$$A\vec{v} = 4\cdot\vec{v} \qquad (A-4E)\vec{v} = \vec{o} \qquad \begin{pmatrix} 4-4 & 0 \\ 1 & 2-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$x - 2y = 0$
$x = 2y$

$$\{(2y, y),\ y\in\mathbb{R}\} = \{y\cdot(2,1),\ y\in\mathbb{R}\} = \underline{\underline{[(2,1)]}}$$

např. $\vec{v} = (2,1)$

ale i $(6,3)$ je vlastním vektorem

- def.: <u>spektrum</u> matice A: $\mathrm{Spec}\, A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

  vypíši všechna vlastní čísla matice A

  včetně násobnosti

  je jich tedy právě n

- $\mathrm{Spec}\, A = \{2, 4\}$ ... předchozí příklad

- <u>Pozorujme charakteristický polynom:</u>

$$ch_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^3 \lambda^3 + \dots$$

to se nám nelíbí

aby byl $ch_A(\lambda)$ normovaný, tj. koef. u λ^n je 1:

$$ch_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

zde: $ch_A(\lambda)$ normovaný

musíme měnit znaménko u všech prvků matice A

<u>def.</u>: $\boxed{ch_A(\lambda) := \det(\lambda E - A)}$

Vlastnosti charakteristického polynomu

$$\det(\lambda E - A)$$

- $$ch_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) + (-a_{21})(-a_{32})(-a_{13}) + (-a_{31})(-a_{12}) \cdot (-a_{23})$$

$$- (-a_{13})(\lambda - a_{22})(-a_{31}) - (-a_{23})(-a_{32})(\lambda - a_{11}) - (\lambda - a_{33})(-a_{12})(-a_{21})$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(-a_{11} - a_{22} - a_{33}) + \lambda \cdot \ldots + \text{konst.}$$

mocniny λ větší než 1. jsou obsaženy jen v tom 1. součinu

pak už jen konst. a lin. polynomy

- konstantní člen:

$$\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$$

$$ch_A(0) = b_0$$

$$\det(0 \cdot E - A) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det A$$

- koef. u λ^{n-1}: $-(a_{11} + a_{22} + a_{33})$

def. stopa matice: součet prvků na hlavní diagonále

„trace" ozn. $\mathrm{Tr}\, A$

- tj. $ch_A(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{Tr}\, A \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \cdot \det A$

- $$ch_A(A) = A^n - (\mathrm{Tr} A)\cdot A^{n-1} + b_{n-2}\cdot A^{n-2} + \dots + b_2 A^2 + b_1 A + b_0 E$$

dosadili jsme matici A do charakteristického polynomu

$A^2 = ?$ $\qquad A^2 = A\cdot A$

$A^3 = A\cdot A\cdot A$

násobení matic je asociativní

$(A\cdot A)\cdot A = A\cdot(A\cdot A)$

Věta / Cayley-Hamilton:

$$\boxed{ch_A(A) = \mathbb{O}}$$

vždy vyjde nulová matice

~~vtípek (ne důkaz!):~~

~~„$ch_A(A) = \det(\underbrace{A\cdot E}_{\lambda E,\ \lambda = A} - A) = \det(\mathbb{O}) = 0$"~~

Jordanův kanonický tvar

- endomorfismus $f: V_n \to V_n$

  matice $A_f = A$

  přáli jsme si $\underbrace{\text{„hezkou"}}_{\text{pokud možno diagonální}}$ matici A

- změna báze u endomorfismu:

$$\underbrace{\underset{C}{V_n} \xleftarrow{P_{BC}} \underset{B}{V_n} \xleftarrow[A_{f,B}]{f} \underset{B}{V_n} \xleftarrow{P_{CB}} \underset{C}{V_n}}$$

$$\boxed{A_{f,C} = P_{BC} A_{f,B} \cdot P_{CB}}$$

$$P_{BC} = P_{CB}^{-1} \qquad \underbrace{P_{BB}}_{} = E$$

$$P_{BC} \cdot P_{CB} = E$$

tj. jsou k sobě inverzní

$$A_{f,C} = P_{BC} \cdot A_{f,B} P_{BC}^{-1}$$

$$\boxed{A_{f,C} \cdot P_{BC} = P_{BC} A_{f,B}}$$

toto jsou <u>matice téhož endomorfismu</u> jen vzhledem k různým bázím

- def. <u>podobné matice</u>: A, B jsou podobné $\quad \exists$ reg. matice P; $\boxed{AP = P \cdot B}$

- být podobné je <u>relace ekvivalence</u>: $A, B, C \ldots$ čtvercové matice

$R: \forall A: \quad AP = PA \quad \exists P$ reg.?

$A \cdot E = E \cdot A \qquad$ <u>E je reg.</u>

$S: \forall A, B: \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$\exists P$ reg.; $AP = PB \Rightarrow \exists Q$ reg.; $BQ = QA$

ano, existuje: $Q = P^{-1}$, protože:

předp.: $AP = PB \quad / \cdot P^{-1}$

$A\underbrace{PP^{-1}}_{E} = PBP^{-1} \quad / P^{-1} \cdot$

$P^{-1} \cdot A \cdot E = \underbrace{P^{-1} \cdot P}_{E} BP^{-1}$

$P^{-1}A = BP^{-1}$

tj. $Q = P^{-1}$

$T: \forall A, B, C:$

$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$\exists P, Q$ reg. matice takové, že

$AP = PB \wedge BQ = QC \Rightarrow$

$P^{-1}AP = B \wedge B = QCQ^{-1}$

$\Downarrow$ $B = B$:

$P^{-1}AP = QCQ^{-1} \quad / P \cdot$

$\underbrace{P \cdot P^{-1}}_{E}AP = P \cdot QCQ^{-1}$

$AP = PQCQ^{-1} \quad / \cdot Q$

$APQ = PQC$

tj. $\exists$ reg. matice: <u>PQ</u>

Relace ekvivalence indukuje rozkladna třídy ekvivalentních prvků – matic téhož endomorfismu.

budeme tedy hledat „hezkou" matici endomorfismu – reprezentanta v každé třídě

pokud možno diagonální

reprezentant dané třídy: Jordanův kanonický tvar