označení:

spektrum: $\sigma(A)$ (Spec A)

stopa: $\operatorname{tr} A$ (Tr A)

char. polynom: $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ ($ch_A(\lambda)$)

Jordanův kanonický tvar

cíl: hledáme „hezkou" matici daného endomorfismu vzhledem k nějaké bázi

Jordanova báze (může být škaredá)

- A ... mat. endom. f

J ... mat. endom. f vzhledem k Jordanově bázi

$$AP = PJ$$

P ... ve sloupcích souř. vektorů Jordanovy báze

víme, že: co pozorujeme na J, to vidíme také na A

např. $\boxed{h(A - \lambda E) = h(J - \lambda E)}$

Proč?

- víme, že násobením regul. maticí nezměníme hodnost

$$J = P^{-1}AP$$

$$J - \lambda E = P^{-1}AP - \lambda E = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP =$$

$$\underbrace{= P^{-1}(A - \lambda E)P}$$

$$\Rightarrow h(J - \lambda E) = h(A - \lambda E)$$

$\square$

- všechna vlastní čísla jsou různá ... **1. případ** (snadný):

$$p(\lambda) = (\lambda E - A)$$ ... má jen jednoduché kořeny

nemá násobné kořeny

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

:-) sen

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

to si přejeme

a to se i splní :-)

- Mohou být A, J podobné?

$$AP = PJ$$

$$P = \left(\vec{v}_1 \,\vdots\, \vec{v}_2 \,\vdots\, \vec{v}_3 \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}v_{11} + a_{12}v_{12} + a_{13}v_{13} & a_{11}v_{21} + a_{12}v_{22} + a_{13}v_{23} & a_{11}v_{31} + a_{12}v_{32} + a_{13}v_{33} \\ a_{21}v_{11} + a_{22}v_{12} + a_{23}v_{13} & a_{21}v_{21} + a_{22}v_{22} + a_{23}v_{23} & \ldots \\ a_{31}v_{11} + a_{32}v_{12} + a_{33}v_{13} & a_{31}v_{21} + a_{32}v_{22} + a_{33}v_{23} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \left(A\vec{v}_1 \,\vdots\, A\vec{v}_2 \,\vdots\, A\vec{v}_3 \right)$$

$$PJ = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11}\lambda_1 & v_{21}\lambda_2 & v_{31}\lambda_3 \\ v_{12}\lambda_1 & v_{22}\lambda_2 & v_{32}\lambda_3 \\ v_{13}\lambda_1 & v_{23}\lambda_2 & v_{33}\lambda_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\lambda_1\vec{v}_1 \,\vdots\, \lambda_2\vec{v}_2 \,\vdots\, \lambda_3\vec{v}_3 \right)$$

$$AP = PJ$$

$$\left(A\vec{v}_1 \,\vdots\, A\vec{v}_2 \,\vdots\, A\vec{v}_3\right) = \left(\lambda_1\vec{v}_1 \,\vdots\, \lambda_2\vec{v}_2 \,\vdots\, \lambda_3\vec{v}_3\right)$$

matice se rovnají $\Leftrightarrow$ rovnají se jejich sloupce:

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \quad \Rightarrow$$

λ_1 ... vl. číslo mat. A

$\vec{v}_1$ ... vl. vektor přísl. vl. číslu λ_1

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \quad \Rightarrow$$

$$A\vec{v}_2 = \lambda_3\vec{v}_3 \quad \Rightarrow$$

<u>tj.:</u> char. polynom: má-li pouze jednoduché kořeny: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad P = \left(\vec{v}_1 \,\vdots\, \vec{v}_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \vec{v}_n\right)$$

vlastní vektory tvoří Jordanovu bázi

$$J = P^{-1}AP$$

nebo

$$A = PJP^{-1}$$

• ? Co když má char. polynom $p(\lambda)$ násobné kořeny ?

nemusíme pak získat n vlastních vektorů (může jich být méně)

tj. vlastní vektory <u>doplníme na</u> Jordanovu <u>bázi</u>

↑

nějaké vektory tedy nějak vygenerujeme

- **Pozorování** – příprava na Jordanův kan. tvar v případě, že char. pol. má násobné kořeny

např.: $p(X) = (X-\lambda)^3$

$AP = PJ$ ... to zase musí platit ($J \sim A$)

$$\underbrace{\left(A\vec{v}_1 \,\vdots\, A\vec{v}_2 \,\vdots\, A\vec{v}_3\right)} = PJ$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$PJ = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_{11} + v_{21} & \lambda v_{21} + v_{31} & \lambda v_{31} \\ \lambda v_{12} + v_{22} & \lambda v_{22} + v_{32} & \lambda v_{32} \\ \lambda v_{13} + v_{23} & \lambda v_{23} + v_{33} & \lambda v_{33} \end{pmatrix}$$

$$PJ = \underbrace{\left(\lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \,\vdots\, \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \,\vdots\, \lambda\vec{v}_3\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ A\vec{v}_2 &= \lambda\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ A\vec{v}_3 &= \lambda\vec{v}_3 \end{aligned}} \longrightarrow$$

λ je vlastní číslo mat. A

$\vec{v}_3$ je vlastní vektor přísl. vl. číslu λ

upravme:

$$(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

$$(A-\lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

$$(A-\lambda E)\vec{v}_3 = \vec{o}$$

a dosaďme rovnice do sebe:

$(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ dosadíme do 2. rovnice:

$(A-\lambda E)\cdot(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_3$ ... a tohle $\vec{v}_3$ dosadíme do 3. rov.

$$(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

$$\underbrace{(A-\lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_3}$$

$$(A-\lambda E)\,(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_3$$

$$\underbrace{(A-\lambda E)\vec{v}_3 = \vec{o}}$$

$$(A-\lambda E)\cdot(A-\lambda E)^2\vec{v}_1 = \vec{o}$$

---

tj. celkem:
$$\boxed{\begin{aligned}(A-\lambda E)^3\vec{v}_1 &= \vec{o}\\ (A-\lambda E)^2\vec{v}_2 &= \vec{o}\\ (A-\lambda E)\vec{v}_3 &= \vec{o}\end{aligned}}$$

jenže odtud nezískáme (jednoznačně a) pohodlně $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, protože hodnosti $(A-\lambda E)^k$ nejsou $n-1$

- prozkoumejme hodnosti $(A-\lambda E)^k$:

složité, využijeme $h(A-\lambda E) = h(J-\lambda E)$

stejně tak $h\left[(A-\lambda E)^k\right] = h\left[(J-\lambda E)^k\right]$

pozorujme tedy $h\left((J-\lambda E)^k\right)$:

$$J-\lambda E = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}}_{\text{Jordanova buňka}} - \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbb{O}$$

- obecněji:

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad h=4$$

$$(J-\lambda E)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad h=3$$

$$(J-\lambda E)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad h=2$$

$$(J-\lambda E)^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad h=1$$

$$(J-\lambda E)^5=\mathbb{O}\qquad h=0$$

a platí: $h\left[(J-\lambda E)^k\right]=h\left[(A-\lambda E)^k\right]$