$$\boxed{\begin{aligned}(A-\lambda E)\vec{v}_1 &= \vec{v}_2\\ (A-\lambda E)\vec{v}_2 &= \vec{v}_3\\ (A-\lambda E)\vec{v}_3 &= \vec{o}\end{aligned}}$$

odtud získáme $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$

tím máme vše potřebné:

- zadána mat. A
- $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$
- $P = \left(\vec{v}_1 \,\vdots\, \vec{v}_2 \,\vdots\, \vec{v}_3 \right)$

$\vec{v}_2$ a $\vec{v}_1$ dogenerujeme

- $AP = PJ \Rightarrow J = P^{-1}AP$

pro ověření

Budou zde lem. jedničky?

počet lem. 1

ano, protože $h(A-\lambda E) = \underline{\underline{2}} = h(J-\lambda E)$

$\Downarrow$

$$J-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(A-\lambda E) = 2 \Rightarrow$ dim řeš. homog. soust. pro vlastní vektory:

$$(A-\lambda E)\vec{v}_3 = \vec{o}$$

$$\dim = n - h = 3 - 2 = 1$$

$\Downarrow$

1 vlastní vektor

$\underline{\underline{\vec{v}_3}}$

Př. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad p(\lambda), \sigma, J, P = ?$

- vlastní čísla $\left(A\vec{v} = \lambda\vec{v},\ (A-\lambda E)\vec{v} = \vec{o} \right.$ homog. soust. $\exists$ netriv. řeš. $\Leftrightarrow$ sing. $\Leftrightarrow$ $\left. \det(A-\lambda E) = 0 \right)$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda)(-1)$$

$$= (2-\lambda)\Big[\underbrace{(3-\lambda)(1-\lambda)}_{3-4\lambda+\lambda^2} + 1\Big] = (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = -(\lambda-2)^3$$

$$p(\lambda) = \underline{\underline{(\lambda-2)^3}} = \det(\lambda E - A) = \det\big(-(A-\lambda E)\big) = (-1)^3 \det(A-\lambda E)$$

vlastní číslo: jedno trojnásobné: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

spektrum: $\sigma(A) = \underline{\underline{\{2,2,2\}}}$

- $J = ?$ $\quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$ ... tohle víme ihned

násobné vlastní číslo $\Rightarrow$ mohou vzniknout „lemující jedničky"

$h(A-\lambda E) =$ počet „lem. 1"

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{h(A-2E)}_{= h(J-2E)} = \underline{\underline{1}}$$

$$= h(J-2E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

$\underline{\underline{1}}$ „lem. jednička" $\Rightarrow$ dogenerujeme $\underline{\underline{1}}$ vektor

- $P = ?$

vlastní vektory: $A\vec{v} = 2\vec{\cancel{x}}$

tj. $(A-2E)\vec{v} = \vec{o}$ $\qquad h(A-2E)=1$

dim. řeš. $= n-h =$
$= 3-1=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x - y = 0$

z lib. $\in \mathbb{R}$

tj. řeš.: $(x,x,z) = (x,x,0)+(0,0,z) =$

$x,z\in\mathbb{R} \qquad = x\cdot(1,1,0) + z\cdot(0,0,1)$

$$K = [(1,1,0),\ (0,0,1)]$$

$\vec{v}_3 = (0,0,1)$

$\vec{v}_2 = (1,1,0)$

- v 1. sloupci „jen. 1" $\Rightarrow \vec{v}_1$ dogenerován
- ve 2. sl. pouze 2 $\Rightarrow$ $\vec{v}_2$ je vl. vekt.
- ve 3. sl. pouze 2 $\Downarrow$ $\vec{v}_3$ je vl. vektor

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$P = (\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \vec{v}_3)$

$\vec{v}_1$: $(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2+\vec{v}_3$

$(A-2E \mid \vec{v}_2+\vec{v}_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dogenerujme

$\vec{v}_2+\vec{v}_3 = (1,1,0)+(0,0,1) = \underline{\underline{(1,1,1)}}$:-)

klidně $7\cdot\vec{v}_2 + 7\cdot\vec{v}_3$ ... lze

$x-y=1$, tj. $x=y+1$, z lib. $\in\mathbb{R}$

$\vec{v}_1 \in \{(y+1, y, z);\ y,z\in\mathbb{R}\}$ např. $\vec{v}_1 = (1,0,0)$

- Zk: $AP = PJ$ ✓

$$J = P^{-1}AP = \dots$$

Př. $$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- vlastní čísla:

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \text{rozvoj} \Rightarrow \det \text{ ř. } 3$$

$= \det(\lambda E - C)$ řádu 4 … sudé

Sarrus.

$$= \underline{\underline{(\lambda+1)^4}}$$

$$\sigma(C) = \{-1, -1, -1, -1\}$$

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^4$$

- $\cancel{J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}}$ $\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & -1 \end{pmatrix}$

nás. vl. číslo $\Rightarrow$ mohou být „jed. 1"

kolik jich bude: $h(A - \lambda E)$

protože $h(A-\lambda E) = h(\underbrace{J-\lambda E})$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$

$$A - (-1)E = A + E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{4ř - 3ř}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{3ř - 1ř \\ 2ř - 4ř}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{2ř:2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = 2$$

tj. $h(A+E) = \underline{\underline{2}} \Rightarrow$ v J $\underline{\underline{2}}$ „lem. 1"

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Jordanova buňka řádu 3, řádu 1 — Jord. buňka řádu 2, řádu 2

? co si vybrat ?

$$h\left[(A+E)^2\right] = \begin{cases} 1 & \text{... pro případ JB 3 a 1} \\ 0 & \text{... pro případ JB řádu 2 a 2} \end{cases}$$

$$J-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J-\lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J-\lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h = 1$ — $h = 0$

Jelikož $h\left[(A-\lambda E)^k\right] = h\left[(J-\lambda E)^k\right]$

pokud $h\left[(A+E)^2\right]$ vyjde 1 $\Rightarrow$ JB řádu 3 a 1

0 $\Rightarrow$ 2 a 2