- Zk: $AP = PJ$ ✓

$$J = P^{-1}AP = \dots$$

Př. $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- vlastní čísla:

$$p(\lambda) = \det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \text{rozvoj} \Rightarrow \det \text{ř. } 3$$

$= \det(\lambda E - C)$ řádu 4 … sudé

Sarrus.

$$= \underline{\underline{(\lambda+1)^4}} \qquad \sigma(C) = \{-1, -1, -1, -1\}$$

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^4$$

- $\cancel{J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}}$ $\qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & -1 \end{pmatrix}$

nás. vl. číslo $\Rightarrow$ mohou být „lem. 1"

kolik jich bude: $h(C - \lambda E)$

protože $h(A - \lambda E) = h(\underbrace{J - \lambda E})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

$$C - (-1)E = C + E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{4ř - 3ř}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{3ř - 1ř \\ 2ř - 4ř}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{2ř:2 - 1ř}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = 2$$

tj. $h(C+E) = \underline{\underline{2}} \Rightarrow$ v J $\underline{\underline{2}}$ „lem. 1"

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Jordanova buňka řádu 3
řádu 1

Jord. buňka řádu 2
řádu 2

? co si vybrat ?

$$h\left[(C+E)^2\right] = \begin{cases} 1 & \text{... pro případ JB 3 a 1} \\ 0 & \text{... pro případ JB řádu 2 a 2} \end{cases}$$

$$J-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J-\lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J-\lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h = 1$ $\qquad$ $h = 0$

Jelikož $h\left[(A-\lambda E)^k\right] = h\left[(J-\lambda E)^k\right]$

pokud $h\left[(C+E)^2\right]$ vyjde $1 \Rightarrow$ JB řádu 3 a 1

$0 \Rightarrow$ 2 a 2

• vypočteme tedy

$$(C+E)^2 = (C+E)\cdot(C+E) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tj. $h\left[(C+E)^2\right] = 0 \Rightarrow J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

2 Jordanovy buňky $\Rightarrow$ očekáváme 2 vlastní vektory: $\vec{v}_2, \vec{v}_4$

$\vec{v}_1$ a $\vec{v}_3$ dogenerujeme:
$$(C+E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$
$$(C+E)\vec{v}_3 = \vec{v}_4$$

- vlastní vektory: řešení soustavy $C\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\quad \lambda = -1$

tj. $(C+E)\vec{v} = \vec{o}$

řešení: $[(2,1,1,0),\ (0,1,0,1)]$

vezměme např. $\vec{v}_2 = (2,1,1,0)$ a $\vec{v}_4 = (0,1,0,1)$

- řešením soustavy

$(C+E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, tj. $\left(C+E \,\middle|\, \begin{matrix}2\\1\\1\\0\end{matrix}\right)$ je $(-1,-1,0,0) + [(2,1,1,0),(0,1,0,1)]$

tj. např. $\vec{v}_1 = (-1,-1,0,0)$

$(C+E)\vec{v}_3 = \vec{v}_4$, tj. $\left(C+E \,\middle|\, \begin{matrix}0\\1\\0\\1\end{matrix}\right)$ je $(1,0,0,0) + [(2,1,1,0),(0,1,0,1)]$

tj. např. $\vec{v}_3 = (1,0,0,0)$

$$P = \left(\begin{array}{cc:cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Zk: $AP = PJ$

dotaz po hodině:

Pokud: $p(\lambda) = (\lambda-2)^2 \cdot (\lambda-3)^2$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ \doteq & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & \doteq & 3 \end{pmatrix}$$

nevím...

$h(A-\lambda E) =$

$$h(A-2E) = h(J-2E) = h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ = & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

$$h(A-3E) = h(J-3E) = h\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \doteq & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \doteq & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

$$h = 3, 3 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$h = 2, 3 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$h = 2, 2 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}$$

V 17.10 / vlastní čísla $\underbrace{\text{symetrické}}_{\text{hermitovské}}$ matice jsou reálné

důk.

hermitovská matice: $\overline{A}^T = A$

symetrická matice $A^T = A$

a ... vlastní číslo mat. A

$\vec{x}$ ... vlastní vektor přísl. vl. číslu a : $A\vec{x}^T = a\cdot\vec{x}^T$

↖ řádkový

$\Downarrow$

krát $\overline{\vec{x}}$

$$\overline{\vec{x}} A \vec{x}^T = \overline{\vec{x}} \cdot a \cdot \vec{x}^T = a \cdot \underbrace{\overline{\vec{x}} \cdot \vec{x}^T} = a\cdot(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)$$

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overline{x}_1\cdot x_1 + \overline{x}_2 \cdot x_2$$

$$\overline{z}\cdot z = (a-bi)\cdot(a+bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

tj.:

$$\overline{\vec{x}} A \vec{x}^T = a \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \quad /^T \ \overline{}$$

$$\overline{\overline{\vec{x}} A \vec{x}^T}^T = \overline{a\cdot\sum |x_i|^2}$$ ← číslo není třeba transponovat

$$\left(\vec{x}\cdot \overline{A}\, \overline{\vec{x}}^T\right)^T = \overline{a}\cdot\sum|x_i|^2$$

$|x_i| \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\overline{|x_i|} = |x_i|$

$\overline{\overline{z}} = \overline{(a-bi)} = a+bi = z$

$$\left(\overline{\vec{x}}^T\right)^T \overline{A}^T \vec{x}^T = \sim$$

$$\overline{\vec{x}}\, \underbrace{\overline{A}^T}_{A} \vec{x}^T = \overline{a}\cdot\sum|x_i|^2$$

$$\overline{\vec{x}}\cdot A\cdot\vec{x}^T = \overline{a}\cdot\sum|x_i|^2$$

a porovnejme se začátkem:

$$\overline{\vec{x}} A \vec{x}^T = a\cdot\sum|x_i|^2$$

tj. $\overline{a} = a \iff \operatorname{Im} a = 0$ tj. $a \in \mathbb{R}$