Jordanův kanonický tvar – přehled

- jednoduchá vlastní čísla: $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ $\quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$P = \left(\vec{v}_1 \;\vdots\; \vec{v}_2 \;\vdots\; \vec{v}_3 \right)$$

vlastní vektory přísl. vl. číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\boxed{\text{každému vlastnímu vektoru odpovídá jedna Jordanova buňka}}$

$$\boxed{h(A-\lambda E)^k = h(J-\lambda E)^k}$$

- násobná vlastní čísla – $\underbrace{\text{malá matice}}_{\text{max } 3\times 3}$ (stačí řešit počet „lemujících" jedniček, ne jejich rozložení – to je jasné)

a) $\sigma = \{\lambda, \lambda, \lambda\}$ ... jak může vypadat Jordanův kanonický tvar:

① $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \iff h(A-\lambda E) = 0 \qquad P = \left(\vec{v}_1 \vdots \vec{v}_2 \vdots \vec{v}_3 \right)$

3 Jordanovy buňky řádu 1

vyjdou „3 vlastní vektory" $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ přísl. vl. číslu λ

přesněji vektorový prostor vlastních vektorů dimenze 3

---

② $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \iff h(A-\lambda E) = 1$

2 Jordanovy buňky: řádu 2 a řádu 1

vyjdou „2 vlastní vektory" $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ přísl. vl. číslu λ

$\vec{v}_1$ dogenerujeme: $(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

$$P = \left(\vec{v}_1 \;\vdots\; \vec{v}_2 \;\vdots\; \vec{v}_3 \right)$$

---

③ $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \iff h(A-\lambda E) = 2$

1 Jordanova buňka řádu 3

vyjde „1 vlastní vektor" $\vec{v}_3$ přísl. vl. číslu λ

$\vec{v}_2$ a $\vec{v}_1$ dogenerujeme:

$$(A-\lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_3$$
$$(A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

$$P = \left(\vec{v}_1 \;\vdots\; \vec{v}_2 \;\vdots\; \vec{v}_3 \right)$$

b) $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2\}$

1. $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \iff h(A-\lambda_1 E) = 1$ ← kvůli λ_2

víme: $h(A-\lambda_2 E) = 2$ (stačí si představit $h(J-\lambda_1 E)$)

vyjdou „3 vlastní vektory": 2 přísl. vl. číslu λ_1 : $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

1 příslušný vlastnímu číslu λ_2 : $\vec{v}_3$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$
$$(\lambda_1) \quad (\lambda_1) \quad (\lambda_2)$$

2. $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \iff h(A-\lambda_1 E) = 2$ ← 1 lem. jednička, ← λ_2

vyjdou „2 vlastní vektory", tj. 2 Jordanovy buňky

1 přísl. vl. číslu λ_1 : $\vec{v}_2$ (a $\vec{v}_1$ dogenerujeme)

1 přísl. vl. číslu λ_2 : $\vec{v}_3$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \qquad (A-\lambda E)\vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

$\vec{v}_1$: dogenerován; $\vec{v}_2$: λ_1; $\vec{v}_3$: λ_2

$$AP = PJ \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & A\vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{v}_1 & \lambda_2 \vec{v}_2 & \lambda_3 \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

$J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ nebo: $= \begin{pmatrix} \lambda_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2 & \lambda_2 \vec{v}_2 & \lambda_3 \vec{v}_3 \end{pmatrix}$

zde se projevila „lem." jednička

- velké Jordanovy buňky:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad h(A-\lambda E) = 0$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad h(A-\lambda E) = 1$$

! $$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} h(A-\lambda E) &= 2 \\ h(A-\lambda E)^2 &= 1 \end{aligned}$$

rozložení! — poznám jej z umocňování

! $$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} h(A-\lambda E) &= 2 \\ h(A-\lambda E)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad h(A-\lambda E) = 3$$

- $$J = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & O \\ & 1 & \lambda & & \\ & & 1 & \lambda & \\ \hline & & & & \lambda \end{array}\right)$$

$$h(A-\lambda E) = 3$$
$$h(A-\lambda E)^2 = 2$$
$$h(A-\lambda E)^3 = 1$$
$$h(A-\lambda E)^4 = 0$$

- $$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & O \\ 0 & 1 & \lambda & & \\ \hline & & & \lambda & \\ & O & & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

$$h(A-\lambda E) = 3$$
$$h(A-\lambda E)^2 = 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$
$$h(A-\lambda E)^3 = 0$$

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \lambda_2 & \\ & & & 1 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

$$h(A-\lambda_1 E) = 2 + 1$$
$$h(A-\lambda_2 E) = 3 + 1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & \lambda_1-\lambda_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \lambda_1-\lambda_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix}$$