Lineární formy

je to homomorfismus s hodnotami v poli (typicky $\mathbb{R}$)

$$f : V_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

a platí:

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$
$$f(c\cdot\vec{u}) = c\cdot f(\vec{u}) \quad \forall c \in T$$

matice lineární formy: $A_f = \left(f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), \dots, f(\vec{b}_n) \right)$

ve sloupcích má obrazy vektorů báze vekt. prostoru V_n

$$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$$

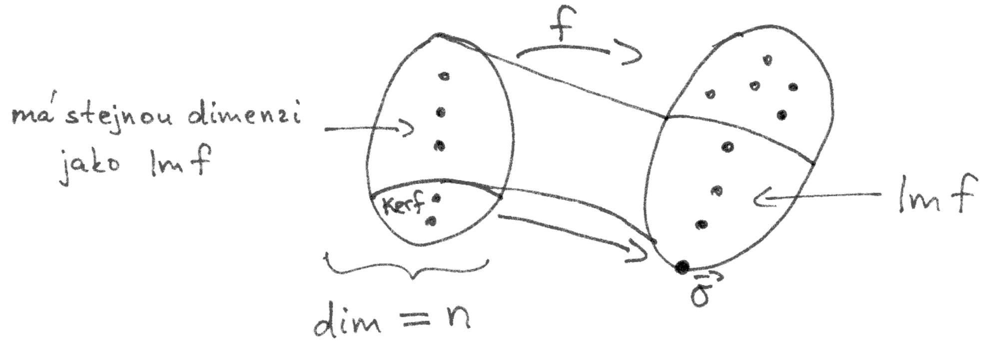
prvky, „sloupce" jsou reálná čísla

tj. matice LF vypadá jako obyčejný vektor! $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Věta o hodnosti a defektu homomorfismu: (opakování)

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

$$d(f) + r(f) = n$$



aplikace na formy: $\dim \operatorname{Ker} f + 1 = n$ nenulová lin. forma

$$\dim \operatorname{Ker} f = n-1$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{„hezká" matice} & — & \text{„škaredá" báze} \\ \text{„škaredá" matice} & — & \text{„hezká báze"} \end{array}}$$

- Jord. kan. tvar
- lin. formy
- bilin. a kvadr. formy
- skal. součin

Pozn. (bude se hodit)

- transformace lin. forem (jako u homomorfismů):

$$\mathbb{R} \xleftarrow{f} \underset{B}{V_n} \xleftarrow{id} \underset{C}{V_n} \qquad P_{CB} = A_{id,C,B}$$

$$\underbrace{A_{f,B} \quad P_{CB}}$$

$$\boxed{A_{f,C} = A_{f,B} \cdot P_{CB}}$$

- $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ ... báze V_n

„hezké" lineární formy ... najdeme

zápis LF pomocí matice: $A_{f,B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

vypadá jako vektor z V_n

známe: všechny homomorfismy $V_n \to W$ tvoří vektorový prostor $\mathrm{Hom}(V_n, W)$

tj. všechny lin. formy $V_n \to \mathbb{R}$ tvoří vekt. prostor všech lin. forem na V_n

$$V_n^* := \mathrm{Hom}(V_n, \mathbb{R})$$

duální prostor (duál) má dimenzi n

v něm: lineární formy

jeho báze: $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

- báze ve V_n ... $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$

báze ve V_n^* ... $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

? chceme takové formy f_i, aby: $f_i(\vec{b}_j)$ = hezké číslo ?

$$\boxed{\begin{matrix} f_1(\vec{b}_1) = 1 & f_1(\vec{b}_2) = 0 & f_1(\vec{b}_3) = 0 \\ f_2(\vec{b}_1) = 0 & f_2(\vec{b}_2) = 1 & f_2(\vec{b}_3) = 0 \\ f_3(\vec{b}_1) = 0 & f_3(\vec{b}_2) = 0 & f_3(\vec{b}_3) = 1 \end{matrix}}$$

tj. $f_i(\vec{b}_j) = \delta_{ij}$

ty hodnoty tvoří matici 3×3

„hezká" je: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Pozorování: jak vypadají formy f_1, f_2, f_3 vzhledem k bázi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$

f_1: $A_{f_1,B} = \left(f_1(\vec{b}_1), f_1(\vec{b}_2), f_1(\vec{b}_3) \right) = (1, 0, 0)$

f_2: $A_{f_2,B} = (0, 1, 0)$

f_3: $A_{f_3,B} = (0, 0, 1)$

analytická vyjádření vzhledem k bázi B $\qquad \langle \vec{x} \rangle_B = (x_1, x_2, x_3)$

$$f_1(\vec{x}) = f_1(x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3) =$$

tj. $\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$

$$= x_1 \underbrace{f_1(\vec{b}_1)}_{1} + x_2 \underbrace{f_1(\vec{b}_2)}_{0} + x_3 \underbrace{f_1(\vec{b}_3)}_{0} = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 =$$

$$= \underline{\underline{x_1}}$$

$f_2(\vec{x}) = x_2 \qquad f_3(\vec{x}) = x_3$

- def. bázi ve V_n^* naz. duální ~~vzhl.~~ k bázi B (ve V_n), pokud

$$\boxed{f_i(\vec{b}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}} = \delta_{ij}$$

Kroneckerovo delta

- pozn.: anal. vyjádření forem duální báze k bázi B je hezké, pokud je vzhl. k bázi B:

$$\boxed{f_1(\vec{x}) = x_1 \qquad f_2(\vec{x}) = x_2 \qquad f_3(\vec{x}) = x_3}$$

!! Duální bázi k B tedy není třeba hledat, lze ji napsat ihned, pokud nám nevadí, že formy f_i jsou vyjádřeny vzhledem k bázi B.

- najděme duální bázi vyjádřenou pěkně vzhledem ke kanonické bázi ve V_3:
  - lze transformací lin. forem pomocí matice přechodu (str. 45)
  - elementárně: metodou neurčitých koeficientů

nyní provedeme:

$\vec{e}_1 = (1,0,0)$
$\vec{e}_2 = (0,1,0)$
$\vec{e}_3 = (0,0,1)$

V_3 ... báze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ $\qquad \langle \vec{x} \rangle_{KB} = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

V_3^* ... hledáme bázi $\{f_1, f_2, f_3\}$ duální k bázi B, tj. $\boxed{f_i(\vec{b}_j) = \delta_{ij}}$

vlastně hledáme:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

hledáme: $a_i, b_i, c_i = ?$ $\quad i = 1,2,3$

souřadnice vektorů báze B máme zadány vzhl. ke kanon. bázi $KB = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

označme je:

$\langle \vec{b}_1 \rangle_{KB} = (b_{11}, b_{12}, b_{13})$ $\qquad \vec{b}_1 = b_{11}(1,0,0) + b_{12}(0,1,0) + b_{13}(0,0,1)$

$\vdots$

$\langle \vec{b}_2 \rangle_{KB} = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$

$\langle \vec{b}_3 \rangle_{KB} = (b_{31}, b_{32}, b_{33})$

najděme f_1:

$f_1(\vec{b}_1) = 1 \qquad f_1(b_{11}, b_{12}, b_{13}) = a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + a_3 b_{13} = 1$

$f_1(\vec{b}_2) = 0 \qquad f_1(b_{21}, b_{22}, b_{23}) = a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + a_3 b_{23} = 0$

$f_1(\vec{b}_3) = 0 \qquad f_1(b_{31}, b_{32}, b_{33}) = \underline{a_1 b_{31} + a_2 b_{32} + a_3 b_{33} = 0}$

opakování: jen pro připomenutí:

$\langle \vec{b}_1 \rangle_B = (1,0,0)$, tj. $\vec{b}_1 = 1\cdot\vec{b}_1 + 0\cdot\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3$

$\langle \vec{b}_2 \rangle_B = (0,1,0)$, tj. $\vec{b}_2 = 0\cdot\vec{b}_1 + 1\cdot\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3$

$\langle \vec{b}_3 \rangle_B = (0,0,1)$, tj. $\vec{b}_3 = 0\cdot\vec{b}_1 + 0\cdot\vec{b}_2 + 1\cdot\vec{b}_3$

použijeme:

$\langle \vec{b}_1 \rangle_{KB} = (b_{11}, b_{12}, b_{13})$, tj. $\vec{b}_1 = b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 + b_{13}\vec{e}_3$

$\vdots$

$\langle \vec{b}_2 \rangle_{KB} = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$

$\langle \vec{b}_3 \rangle_{KB} = (b_{31}, b_{32}, b_{33})$

soustava neznámé koef. formy: a_1, a_2, a_3

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Frobeniova věta:

$\exists$ řeš. $\Leftrightarrow$ hodnost matice = hodnosti mat. rozšířené

$\exists!$ řeš.: dim podprostoru $= n-h = n-n = \underline{0}$

řeš. nehomog. soust.: vektor + $\underbrace{\text{podpr.}}_{\dim = 0}$ $\vec{o}$

$$\left(B^T \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$ ... soustava, jejíž řešení $\exists!$:

$$B^T \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \left(B^T\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

najděme f_2:

$f_2(\vec{b}_1) = 0 \qquad b_1 b_{11} + b_2 \cdot b_{12} + b_3 b_{13} = 0$

$f_2(\vec{b}_2) = 1 \qquad b_1 b_{21} + b_2 b_{22} + b_3 b_{23} = 1$

$f_2(\vec{b}_3) = 0 \qquad \underline{b_1 b_{31} + b_2 b_{32} + b_3 b_{33} = 0}$

tj. $\left(B^T \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$

$B^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

hledejme f_3: $f_3(\vec{b_1})=0$, $f_3(\vec{b_2})=0$, $f_3(\vec{b_3})=1$

$$B^T \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Takže: máme za úkol vyřešit 3 soustavy se stejnou maticí:

$$B^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (B^T)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vyřešme je najednou:

$$\left(B^T \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \sim \dots \sim \left(E \,\middle|\, (B^T)^{-1} \right)$$

v 1. sloupci najdeme koef. a_1, a_2, a_3, tj. koef. lin. formy f_1

ve 2. sloupci: koef. f_2

ve 3. sloupci: koef. f_3

- shrnutí: jak hledat duální bázi k B:
  kde formy jsou vyjádřeny vzhledem ke kanon. bázi

B ... matice báze B ... ve sl. jsou souřadnice vektorů báze B

$$\left((B^T)^{-1} = (B^{-1})^T \right)$$

$$\left(B^T \mid E \right) \sim \dots \sim \left(E \mid (B^T)^{-1} \right)$$

duální báze k bázi B: $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$:

$f_1(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, kde a_i jsou prvky 1. sloupce $(B^T)^{-1}$

$f_2(\vec{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$, kde b_i 2. sloupce $(B^T)^{-1}$

$f_3(\vec{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, kde c_i 3. sloupce $(B^T)^{-1}$

$$B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$$