Matematický proseminář I

1 12. 10. 2020

1. Dokažte, že $\sqrt{n}$ je iracionálním číslem pro každé $n \in \mathbb{N}$, které není druhou mocninou přirozeného čísla. Postupujte podobně jako u důkazu iracionality $\sqrt{2}$.

2. Pozorujte následující výpočet:

$$-1 = \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1\,.$$

   Kde je chyba?

3. Jak lze vypočítat hodnotu $\log_2 5$ na kalkulátoru, který má z logaritmických funkcí zabudovanou pouze funkci ln? Odvoďte vztah, který umožní vypočítat $\log_a x$ pomocí funkce ln.

4. Proč je $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ (pro $a > 0$)?

5. Proč je $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ (pro $a > 0$)?

6. Je na následujícím řádku napsána rovnost?

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

2 19. 10. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Princip permanentnosti

Jako první jej zformuloval německý matematik Hermann Hankel (1839–1873) roku 1867 v práci *Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze*. Dočíst se o něm lze např. v knize:
J. Drábek, M. Šilarová: *Kategorie pravdy v matematice.* Pedagogické centrum, Plzeň, 2001.

Komplexní čísla

1. Dokažte, že pro všechna $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\log_a x^b = b \cdot \log_a x\,.$$

2. Dokažte Moivreovu větu.

   Věta (Moivreova). Pro každá dvě komplexní čísla $r_1\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $r_2\,(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$ platí:

$$[r_1 \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)] \cdot [r_2 \cdot (\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)] = r_1 r_2 \cdot \big(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\big)\,.$$

3. Všimněme si, že lze odtud pomocí matematické indukce dokázat následující důsledek.

   Důsledek. Pro každou komplexní jednotku $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

   $$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi\,.$$

   Na semináři si ukážeme, že toto tvrzení platí i pro každé $n \in \mathbb{Z}$, dokonce i pro každé $n \in \mathbb{R}$ (nesmí však být zároveň $n \leq 0$ a $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

4. Vyjádřete komplexní číslo $2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ v algebraickém tvaru. Následně se pokuste výsledek převést zpět do goniometrického tvaru.

5. Najděte kořeny binomických rovnic: $z^3 = 1$, $z^2 = -4$, $z^3 = 8$. Pokuste se o tři způsoby řešení:
   a) pomocí algebraického tvaru komplexního čísla;
   b) pomocí goniometrického tvaru komplexního čísla a Moivreovy věty;
   c) pomocí rozkladu binomu.

3 26. 10. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

1. Najděte algebraický tvar komplexního čísla $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{-25}$. Využijte Moivreovu větu.

2. Najděte algebraický tvar komplexního čísla $\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)^{-8}$. Využijte Moivreovu větu.

   $[\varphi = 120°,\ -\frac{1}{512}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})]$

3. Zopakujte si definici funkce sinus (definice ze ZŠ i SŠ).

4. Zopakujte si součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus.

5. Pomocí součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus odvoďte součtový vzorec pro funkci tangens, tj. odvoďte, čemu je rovno

   $$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \dots$$

4 2. 11. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

1. Najděte algebraický tvar komplexního čísla $(2-3\mathrm{i})^3$. Využijte Moivreovu větu i binomickou větu, oba získané výsledky porovnejte. $[-46-9\mathrm{i}]$

2. Pomocí součtového vzorce pro sinus odvoďte vzorce součtový vzorec pro kosinus:
$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+(-\beta)\right)=$$

3. Pomocí součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus odvoďte vzorce pro:
$$\sin 2x \qquad \cos 2x$$

4. Pomocí vzorců pro $\cos 2x$ odvoďte vzorce pro:
$$\sin\frac{x}{2} \qquad \cos\frac{x}{2}$$

5 9. 11. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

Řešte v $\mathbb{R}$ následující goniometrické rovnice.

1. $2\sin^3 x-\sin x+\cos^2 x=1$
2. $\sin x+\cos x=1$
3. $2-\operatorname{cotg} x=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

6 16. 11. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

1. Obsah obecného trojúhelníku $\triangle ABC$ lze vypočítat takto:
$$S=\frac{c\cdot v_c}{2}\,.$$
Jak by šlo vypočítat tento obsah bez použití výšky? Z definice funkce sinus máme
$$v_c=b\cdot\sin\alpha\,.$$
Nyní stačí vyjádřit $\sin\alpha$ pomocí délek ostatních stran. K tomu se hodí kosinová věta, takže nejprve vyjádříme sinus pomocí kosinu:
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,.$$

Z kosinové věty máme:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

takže $\cos\alpha = \dots$, $v_c = \dots$, $S = \dots$ Tímto způsobem odvoďte Hérónův vzorec:

$$S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}\,,$$

kde $s = \frac{o}{2} = \frac{a+b+c}{2}$.

2. Označme $\omega_k = \frac{2\pi}{k}$. Dokažte, že $1 + \cos\omega_3 + \cos 2\omega_3 = 0$.

   Čemu je rovno $1 + \cos\omega_4 + \cos 2\omega_4 + \cos 3\omega_4$?

   Čemu je rovno $1 + \cos\omega_5 + \cos 2\omega_5 + \cos 3\omega_5 + \cos 4\omega_5$?

7 23. 11. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

Uvažujme funkci $f(x) = 1 - x^2$. Načrtněte její graf i graf následujících funkcí.

1. $y = f(x) + 3$
2. $y = 2 \cdot f(x)$
3. $y = 2 \cdot f(x) + 3$
4. $y = f(2x)$
5. $y = f(x-2)$
6. $y = f(2x-4)$
7. $y = 2 \cdot f(2x-4) + 3$

8 30. 11. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

Určete hodnosti následujících matic.

$$A = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 3+10\mathrm{i} & -4-3\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ -3+\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & 4+2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ -2-5\mathrm{i} & -2-7\mathrm{i} & 3-4\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

9 7. 12. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

1. Roury se skládají do vrstev tak, že roury v následující (hořejší) vrstvě zapadají do mezer mezi rourami vrstvy předchozí (tj. té, na níž následující vrstva bezprostředně leží). Máme složit 230 rour do jedné „pyramidy“; kolik minimálně jich musíme uložit do nejspodnější vrstvy?

2. Bakterie se množí dělením (půlením) tak, že k tomuto jejich dělení dochází za příznivých podmínek jednou za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne tímto dělením za příznivých podmínek za 10 hodin?

3. Dráha tělesa při volném pádu za čas t je vyjádřena vztahem známým z fyziky: $s = \frac{1}{2}gt^2$, kde $g \approx 9{,}81\, m/s^2$ je tíhové zrychlení. Dokažte, že pak číselné hodnoty drah tělesa v libovolných n po sobě následujících časových úsecích stejné délky (např. po sekundách) tvoří konečnou n-člennou aritmetickou posloupnost.

10 14. 12. 2020

proseminář odpadá

11 21. 12. 2020

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

Domácí cvičení

1. Nikola s Filipem si chtějí koupit chatičku se zahrádkou. Vyhlédli si jednu za 550 000 Kč. Mají našetřeno 150 000 Kč. Zaplacení zbylé částky vyřeší půjčkou, splácet budou 8 let.

   Pokud by si půjčili 400 000 Kč, měli by roční úrokovou sazbu $4{,}9$ %, pokud by si půjčili 410 000 Kč, měli by roční úrokovou sazbu $3{,}9$ %. Kolik by celkem zaplatili bance v každém z těchto dvou případů? A jakou by měli měsíční splátku? Kterou z možností byste si vybrali Vy?

2. Vzdálenost bodu $A \in \mathbb{E}_3$ od roviny $\rho\colon \vec{n} \cdot (X - Q) = 0$ lze určit následujícím způsobem.

   Bodem A vedeme kolmici k rovině ρ, jejich průsečík označme A'. Vzdálenost $d(A, \rho)$ je pak rovna $d(A, A')$. Vyjádřete ji obecným vzorcem.

   Pokuste se tento vzorec zapsat pomocí souřadnic, zvolíme-li $A = [a_1, a_2, a_3]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$ a $\vec{n} = [a, b, c]$.

Příště se budeme zabývat skalárním součinem a jeho aplikacemi (vzdálenost bodu od nadroviny, ...), případně kuželosečkami.

12 4. 1. 2021

Tabule

tabule z dnešní hodiny je zde

****

Přeji úspěšné zkouškové období!

****