Komplexní čísla a jejich aplikace

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

Komplexní čísla – zavedení

- Co je to i?
  Problém s jednoznačností
- Co jsou komplexní čísla?
  $a + b\mathrm{i} \quad \times \quad [a, b]$

Komplexní čísla – odmocniny

- Je $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$? Problémy a zdánlivé paradoxy
- Definice odmocniny v komplexním oboru
  Rozdíl mezi definicí v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$

Komplexní čísla – operace

- Znázornění operací s komplexními čísly: $+$
- Moivreova věta a její důsledky
- Znázornění operací s komplexními čísly:
  násobení, popis kružnice a Ptolemaiův model vesmíru, výpočet i^{i}
  odkaz na video:
  https://www.youtube.com/watch?v=QVuU2YCwHjw
- Jiné znázornění: $\overline{a} \cdot b$
  Geometrický význam reálné a imaginární části, souvislost s historií rozšiřování $\mathbb{C}$

Komplexní čísla – historie, rozšíření

- Z historie komplexních čísel
  kvadratická a kubická rovnice
- Hyperkomplexní čísla (motivace, možnosti rozšíření $\mathbb{C}$)

Komplexní čísla a obsah rovnoběžníku

počátky vektorového počtu: komplexní čísla, pokusy o zobecnění

$$a = a_1 + a_2\mathrm{i} \qquad b = b_1 + b_2\mathrm{i}$$
$$\overline{a} \cdot b = (a_1 - a_2\mathrm{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

vidíme tedy:

$$\mathrm{Re}(\overline{a} \cdot b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad \mathrm{Im}(\overline{a} \cdot b) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$
$$\mathrm{Re}(\overline{a} \cdot a) = |a|^2 \qquad \mathrm{Im}(\overline{a} \cdot b) = S_{\text{rovnob}}$$

Komplexní čísla – historie

počátky vektorového počtu: komplexní čísla, pokusy o zobecnění

$$a = a_1 + a_2\mathrm{i} \qquad b = b_1 + b_2\mathrm{i}$$
$$\overline{a} \cdot b = (a_1 - a_2\mathrm{i}) \cdot (b_1 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

vidíme tedy:

$$\mathrm{Re}(\overline{a} \cdot b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad \mathrm{Im}(\overline{a} \cdot b) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$
$$\mathrm{Re}(\overline{a} \cdot a) = |a|^2 \qquad \mathrm{Im}(\overline{a} \cdot b) = S_{\text{rovnob}}$$

Komplexní čísla – rozšíření

počátky vektorového počtu: komplexní čísla, pokusy o zobecnění

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)
irský matematik (Dublin)
od 3 let jej vychovával strýc
zájem o jazyky
zázračný počtář Zerah Colburn (1813) $\rightarrow$ matematika
mechanika, algebra

Hamilton se pokoušel o zobecnění:
$z = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j}$ (neexistuje)
$z = a_1 + a_2\mathrm{i} + a_3\mathrm{j} + a_4\mathrm{k}$ kvaterniony (1843)

Komplexní čísla – rozšíření

kvaterniony — 16. října 1843

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1}$$

násobení není komutativní

Komplexní čísla – rozšíření

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

$$a = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k \qquad b = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\overline{a}\cdot b) &= (a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k)\cdot(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)\\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}(\overline{a}\cdot a) = |a|^2$$

Kořeny kvadratické rovnice

Uvažujme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Má-li tato rovnice

- 2 různé reálné kořeny, jsou rovny x-ovým souřadnicím průsečíků paraboly
$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$
s osou x,
- 1 dvojnásobný kořen, je roven x-ové souřadnici společného bodu paraboly (1) s osou x,
- 2 různé komplexní kořeny (tj. komplexně sdružené), jak je lze znázornit?

Kořeny kvadratické rovnice

Návod:
Uvažujme parabolu
$$y = (x-\alpha)^2 + \beta^2\,,$$
kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Souřadnice vrcholu V této paraboly jsou: $V = [\alpha, \beta^2]$.
Hledejme kořeny; dostaneme rovnici
$$(x-\alpha)^2 = -\beta^2\,,$$
jejímiž kořeny jsou
$$\boxed{z_{1,2} = \alpha \pm i\beta\,.}$$
Porovnejme tento výsledek se znázorněním kořenů rovnice, která má kořeny reálné:
$$y = (x-\alpha)^2 - \beta^2\,,$$
kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Souřadnice vrcholu V této paraboly jsou:
$$V = [\alpha, -\beta^2]\,.$$

Kořeny kvadratické rovnice

Hledejme kořeny; dostaneme rovnici
$$(x-\alpha)^2 = \beta^2\,,$$
jejímiž kořeny jsou
$$\boxed{z_{1,2} = \alpha \pm \beta\,.}$$

Závěr

- Reálné kořeny leží na ose x *ve vzdálenosti β od x-ové souřadnice vrcholu α.*
- Pokud bychom se na rovinu xy dočasně dívali jako na Gaussovu rovinu, tak komplexně sdružené kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty leží na kolmici k reálné ose (ose x) *ve vzdálenosti β od x-ové souřadnice vrcholu α.*

Některé hezké vztahy

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

John Wallis (1655):
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots}$$

Nílakantha:
$$\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{4}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{4}{8\cdot 9\cdot 10} + \cdots$$

Stan Wagon a Viktor Adamčík:
$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\cdot\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right)$$

Výpočet π – hledání rozkladů arctg 1

```
for a in range(1, 100):
    for b in range(a+1, 100):
        K = (a + 1j) * (b + 1j)
        if K.real == K.imag:
            print("arctg 1/", a, "+ arctg 1/", b)
```

výstup: arctg 1/ 2 + arctg 1/ 3

Výpočet π – hledání rozkladů arctg 1

```
for a in range(1, 100):
    for b in range(a+1, 100):
        for c in range(1, 10):
            for d in range(1, 50):
                K = (a + 1j)**c * (b + 1j)**d
                if K.real == K.imag:
                    print(c, "arctg 1/", a, "+", d, "arctg 1/", b)
```

výstup:
1 arctg 1/ 2 + 1 arctg 1/ 3
5 arctg 1/ 2 + 5 arctg 1/ 3 (o 1 otočení)
9 arctg 1/ 2 + 9 arctg 1/ 3 (o 2 otočení)
2 arctg 1/ 3 + 1 arctg 1/ 7

Brent–Salaminův algoritmus výpočtu π

kvadratická konvergence, přesnost 2**N míst; skriptovací jazyk Python 3

```
N = 10
print("Výpočet π na: ", 2**N, "míst")

import decimal
decimal.getcontext().prec = 2**N

a = decimal.Decimal(1)
b = decimal.Decimal(2).sqrt() / 2
t = 1 / decimal.Decimal(4)
p = decimal.Decimal(1)

for n in range(1, N+1):
    a, b, t, p = (a+b)/2, decimal.Decimal(a*b).sqrt(), \
                 t - p*(a - (a+b)/2)*(a - (a+b)/2), 2*p

print( (a + b) * (a + b) / (4*t) )
```


Komplexní čísla – zajímavosti, geometrické aplikace

- Kořeny kvadratické rovnice
  Parabola nemá žádné průsečíky s osou x, jak je tedy lze znázornit?
- Výpočet π
  Doplnění příkladu z učebnice (M pro G): rozklady arctg 1 a rekordy ve výpočtu cifer π
- Jednoduché geometrické útvary
  přímka, kružnice, elipsa, ...
- Geometrie trojúhelníku
  popis trojúhelníku, jeho obsah, pravoúhlý a rovnostranný △, těžiště a ortocentrum, obsah △, Eulerova přímka a Feuerbachova kružnice