Kubická rovnice

Zdeněk Halas

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Osnova

Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice

starověká Mezopotámie:
- obecné řešení kvadratické rovnice
- soustava kvadratické a lineární rovnice o 2 neznámých
- speciální případy kubické rovnice

$$x^2 + px = q \qquad x^2 + q = px \qquad x^2 = px + q$$

vždy kladné koeficienty

úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici: Egypt, Čína

Kvadratická rovnice
Starověká Mezopotámie

Mezopotámské řešení je velmi elegantní:

$$\boxed{x^2 + q = px}$$

pozorování – François Viète (a před ním tabulky ze starověké Mezopotámie):

$$x^2 - px + q = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

tj. $\boxed{x_1 + x_2 = p \qquad x_1x_2 = q}$

rozdělme p „spravedlivě“: $x_1 = \frac{p}{2}$ a $x_2 = \frac{p}{2}$

To však obecně nejsou kořeny!

Kvadratická rovnice
Starověká Mezopotámie

$$x^2 + q = px$$

několik tisíciletí před Fr. Vietem: $x_1 + x_2 = p \qquad x_1\,x_2 = q$

rozdělme p „obecně“: $\boxed{x_1 = \frac{p}{2} + z \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{p}{2} - z}$

$$q = x_1\,x_2 = \left(\frac{p}{2} + z\right)\cdot\left(\frac{p}{2} - z\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - z^2$$

tj.

$$z^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm z = \boxed{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Kvadratická rovnice
Starověká Mezopotámie

Řešení kvadratické rovnice tedy bylo známo již od dob starověké Mezopotámie, ale:

- až do poloviny 16. stol. se v Evropě neužívá nula
- ani záporná čísla
- není rozvinutá symbolika
- kvadratická rovnice *nemá dva kořeny*

Postihlo i kubickou rovnici, místo $x^3 + px + q = 0$ je nutno řešit 2 případy:

$$x^3 + px = q \qquad \text{a} \qquad x^3 = px + q \qquad p, q > 0$$

Kubická rovnice

Historie — kubická rovnice
řešení speciálních typů kubické rovnice: Mezopotámie, Řecko, islámské země

Mezopotámie:

$$xyz + xy = \frac{7}{6} \qquad y = \frac{2}{3}x \qquad z = 12x$$

po úpravě:

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 252$$

řešení pomocí tabulek součtů $n^3 + n^2$ $\quad n = 6$,
tj. $12x = 6, \quad x = \frac{1}{2}$

Řecko:
zdvojení krychle: $a^3 = (2x)^3$

rozdělení koule na dvě úseče, dán poměr jejich objemů $V_1 : V_2$

Islámské země:
perský matematik, filosof, astronom, básník Omar Chajjám:
geometrické řešení kubické rovnice pomocí kuželoseček

Historie — kubická rovnice

Luca Pacioli sepsal roku 1487 knihu: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*
na závěr poznámka: neumíme řešit kubické rovnice typů

$$x^3 + mx = n \qquad x^3 + n = mx$$

1501–1502 vyučoval na Boloňské univerzitě, možná tam přivedl k tomuto problému Scipiona dal Ferro

Algebraické řešení se podařilo v 1. pol. 16. stol.

italským matematikům:

Scipione dal Ferro, Niccolò Fontana (Tartaglia) a Gerolamo Cardano

Historie — kubická rovnice

Scipione dal Ferro (1465–1526)
absolvoval univerzitu v Bologni
zde také od 1496 až do konce života působil jako profesor
vyučoval aritmetiku a geometrii (a také podnikal)

počátkem 16. stol. (nějaký čas po Pacioliho návštěvě v Bologni) uměl řešit rovnice typu

$$x^3 + mx = n, \qquad m, n > 0$$

jeho dílo se však nedochovalo, tak neznáme podrobnosti
nevíme, zda uměl řešit i kub. rovnice jiných typů

? možná metodu řešení sám objevil
(dle svědectví současníků byl brilantním matematikem)
? možná ji nalezl v nějakém starším rukopisu

metodu však nezveřejnil,
sdělil ji na smrtelné posteli svému žákovi – Anton Maria Fiore
ten roku 1535 soutěžil s Tartagliou…

Historie — kubická rovnice

Proč své výsledky nezveřejnil?

utajování vlastních výsledků bylo běžné

matematici je pak využívali v odborných disputacích a soutěžích

předkládali si navzájem problémy a úlohy

ti, kteří nejlépe obstáli při jejich řešeních pak byli zváni na univerzity

Historie — kubická rovnice

Niccolò Fontana (Tartaglia) (1500–1557)

Niccolò Fontana (Tartaglia)

1512 zraněn při obsazení města Francouzi – následkem toho mluvil s obtížemi
tartaglia = koktal

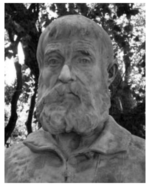
v matematice se vzdělával sám
později mu matka sehnala patrona, díky němuž mohl studovat v Padově

Anton Maria Fiore vyzval roku 1535 Tartagliu k disputaci
předložil 30 úloh vedoucích na kubickou rovnici
Tartagliovi se však podařilo najít řešení a soutěž vyhrál

Historie — kubická rovnice

Niccolò Fontana (Tartaglia)





Historie — kubická rovnice

Gerolamo Cardano

jeho otec Fazio Cardano měl nelegitimní dítě s mladou vdovou (Chiara Micheria)
po letech se vzali

Gerolamo Cardano byl zpočátku asistentem u svého otce
studoval medicínu (i když otec chtěl práva)
stal se rektorem univerzity v Padově
zvítězil o jediný hlas

neoblíbený, přehnaně kritický, netaktní

opakovaně nepřijat do cechu lékařů v Miláně
přesto si však otevřel malou praxi
časem získal věhlas a mocné přátele z řad uzdravených pacientů
cech s ním konzultoval, po čase jej přijal
vyléčil dokonce Johna Hamiltona, arcibiskupa ze St. Andrews ve Skotsku

napsal mnoho knih, nejslavnější *Ars Magna*

Historie — kubická rovnice

Gerolamo Cardano

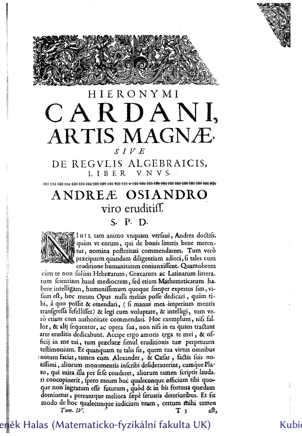
synové:
Giambatista (oženil se s proradnou ženou, po čase ji otrávil)
Aldo (hráč, prohrál nejen vlastní oblečení, ale i část majetku svého otce)

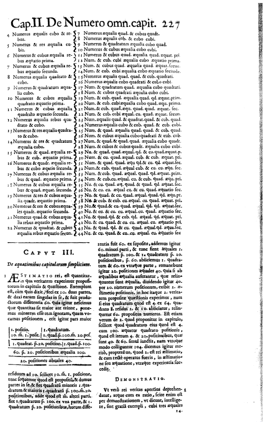
sám Cardano rád hrál, díky znalostem pravděpodobnosti se tím několik let i živil
napsal knihu *Liber de Ludo Aleae* (asi 1563, vydána až 1663),
zabýval se také hydrodynamikou, mechanikou, geologií, astronomií

Ars Magna — velká kniha o algebře, do níž Cardano zahrnul řešení kubických rovnic
řešení pro jeden typ získal od Tartaglii, další rozpracoval sám se svým asistentem

Gerolamo Cardano


Gerolamo Cardano — Ars Magna


HIERONYMI
CARDANI,
ARTIS MAGNÆ
SIVE
DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
LIBER VNVS.
ANDREÆ OSIANDRO
viro eruditiss.
S. P. D.


Cap. II. De Numero omn. capit. 227

CAPVT III.

Lodovico Ferrari (1522–1565)

asistent Cardanův

po smrti rodičů jej vychovával jeho strýc
kuriózním způsobem se stal asistentem Cardanovým

mimořádně chytrý, Cardano jej učil matematice
spolupracoval na řešení kubické rovnice

sám rozřešil rovnici 4. stupně

Před 4 lety, když šel Cardano do Florencie a já jsem jej doprovázel, jsme viděli v Boloni Hannibala Della Nave, moudrého muže, který nám ukázal malou knížku psanou rukou Scipiona dal Ferro, otce jeho manželky, napsanou před dlouhým časem, v níž byl tento objev elegantně a učeně popsán.

Cardanův postup

$$\boxed{x^3 = 20 - 6x}$$

1. substituce $x = u + v$

$$(u+v)^3 = 20 - 6(u+v)$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 20 - 6(u+v)$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 20 - 6(u+v)$$

$$u^3 + v^3 = 20 \qquad 3uv = -6$$

$$\boxed{u^3 + v^3 = 20 \qquad uv = -2}$$

Cardanův postup

2. kvadratická resolventa

$$u^3 + v^3 = 20 \qquad u^3v^3 = -8$$

To vypadá jako Viètovy vzorce:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = q$$

Neznámé u^3 a v^3 jsou tedy kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - 20t - 8 = 0$$

Tuto rovnici stačí vyřešit, dostaneme: $t_1 = u^3$ a $t_2 = v^3$.
Kořenem původní kubické rovnice pak je $x = u + v$.

Cardanův postup — obecné řešení

$$\boxed{x^3 + px + q = 0}$$

Výsledek:
$t_1 = u^3$ a $t_2 = v^3$, $\quad x = u + v$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

další řešení: $\quad x_2 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v \quad$ a $\quad x_3 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$,
kde ε je $\sqrt[3]{1}$: $\quad \varepsilon = \cos 120^\circ + \mathrm{i} \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$