TEORETICKÉ PŘÍKLADY Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

[Px] označuje běžný problém a [Tx] těžký problém.

9. Metrické prostory I

[P9.1] Ukažte, že metriky $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ a $\|.\|_\infty$ jsou na $\mathbf{R}^n$ ekvivalentní. Dokažte tedy, že pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

[P9.2] Rozhodněte o otevřenosti a uzavřenosti následujících množin $(0,1)$, $[0,1)$, $\{1\}$, $[1,\infty)$ v $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ a $[0,1)$ v $\mathbf{R}$ s diskrétní metrikou.

[P9.3] Nechť $A, B \subset \mathbf{R}$ a na $\mathbf{R}$ (a $\mathbf{R}^2$) máme euklidovskou metriku. Rozdněte o platnosti:

$$(i)\ A, B \text{ jsou otevřené } \implies A \times B \text{ je otevřená v } \mathbf{R}^2.$$
$$(i)\ A, B \text{ jsou uzavřené } \implies A \times B \text{ je uzavřené v } \mathbf{R}^2.$$

[P9.4] Nechť $A, B \subset \mathbf{R}$ a na $\mathbf{R}$ (a $\mathbf{R}^2$) máme euklidovskou metriku. Rozdněte o platnosti:

$$(i)\ \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} \text{ v } \mathbf{R}^2.$$
$$(i)\ \operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B \text{ v } \mathbf{R}^2.$$

[P9.5] Existuje $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ a $A \neq \mathbf{R}$ taková, že A je zároveň otevřená i uzavřená?

[P9.6] Dokažte, že množina $G \subset \mathbf{R}$ je otevřená v $(\mathbf{R}, |.|)$, právě tehdy, když je spočetným sjednocením otevřených intervalů.

[T9.7] Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $B(x,r) \subset B(y,R)$. Rozhodněte, zda musí platit $B(x,2r) \subset B(y,2R)$.

[P9.8] Nechť K_1, K_2 jsou kompaktní množiny v (P, ρ). Musí být $K_1 \cap K_2$ a $K_1 \cup K_2$ kompaktní?

[P9.9] Nechť $f \in C([0,1])$ a mějme zobrazení $I : C([0,1]) \to \mathbf{R}$ definované jako $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Dokažte, že toto zobrazení je spojité.

[T9.10] Definujme si metrický prostor Riemannovsky integrovatelných funkcí $R([0,1])$ a na něm metriku $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$. Ukažte, že tento prostor není úplný.

[T9.11] Ukažte, že $\overline{B(0,1)}$ v $C([0,1])$ je uzavřená, omezená, ale není kompaktní.

10. Funkce více proměnných

[P10.1] Setrojte funkci $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá. Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbf{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbf{R}$ (jakožto funkce jedné proměnné) a pro každé $y_0 \in \mathbf{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá na $\mathbf{R}$.

[P10.2] Sestrojte funkci $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, která má v bodě $[0,0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0,0)$, ale není v bodě $[0,0]$ spojitá.

[P10.3] Sestrojte spojitou funkci $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, která má v bodě $[0,0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0,0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0,0])$.

[P10.4] Dokažte, že $f(x,y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ má v $[0,0]$ lokální minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.

[P10.5] Sestrojte funkce $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, tak, že f má parciální derivace ve všech bodech, g má spojité parciální derivace, ale $f(g(x))$ nemá parciální derivaci v $[0,0]$.

[P10.6] Sestrojte funkce $f, g \in C^2(\mathbf{R}^2)$ tak, že $D^2 f(0,0)$ i $D^2 g(0,0)$ jsou pozitivně semidefinitní, f má v $[0,0]$ lokální maximum, ale g nemá v $[0,0]$ lokální maximum.

[P10.7] Je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkce nutná? Dokážete sestrojit funkci, která splňuje všechny předpoklady (kromě tohoto) a $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ a přesto platí závěr?

11. Metrické prostory II

[P11.1] Dokažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina.

[P11.2] Nechť $A \subset C([0,1])$ je množina všech 1-lipschitzovských funkcí. Rozhodněte, jestli je A uzavřená a řídká.

[T11.3] Nalezněte F_n uzavřené (ve vhodném metrickém prostoru (P, ρ)), $F_{n+1} \subset F_n$ pro $n \in \mathbf{N}$ tak, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ pro a) $\operatorname{diam} F_n = \infty$ b) $\operatorname{diam}(F_n) \leq 1$ c) $\operatorname{diam}(F_n) \leq 1$ na prostoru spojitých funkcí $C([0,1])$.

[T11.4] Ukažte, že existují $A, B \subset [0,1]$ tak, že A je první kategorie a B má Lebesgueovu míru 0.