

Teorie míry a integrálu 1

Sepsáno z přednášek a poznámek prof. Stanislava Hencla

1 Základní pojmy teorie míry

1.1 Množinové systémy, pojem míry

Poznámka. Necht' X je libovolná množina (například $\mathbb{R}^n$), pak $\exp(X)$ značí systém všech podmnožin X .

Definice 1.1 (σ -algebra). Necht' $\mathcal{A} \subset \exp(X)$. Systém množin $\mathcal{A}$ se nazývá **σ -algebra** pokud

- (i) $X \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii) $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Dvojici $(X, \mathcal{A})$ nazýváme měřitelným prostorem.

Poznámka. Každá σ -algebra je uzavřená i na spočetné průniky, neboť

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k).$$

Věta 1.1 (Existence nejmenší σ -algebry). Necht' $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \exp(X)$ je libovolný systém podmnožin. Pak existuje nejmenší σ -algebra obsahující $\mathcal{S}$ a značíme jí $\sigma(\mathcal{S})$.

Důkaz. Označme $\mathcal{T} = \{\mathcal{A}; \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{S} \subset \mathcal{A}\}$. Pak $\mathcal{T} \neq \emptyset$, neboť $\exp(X) \in \mathcal{T}$. Položme $\mathcal{R} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}} \mathcal{A}$. Množina $\mathcal{R}$ je σ -algebra protože:

- (i) $X \in \mathcal{A}$ pro $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ a tedy dle definice průniku $X \in \mathcal{R}$
- (ii) Necht' $A \in \mathcal{R}$, pak ale dle definice průniku $A \in \mathcal{A}$ pro $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}$. Díky tomu, že $\mathcal{A}$ je σ -algebra, platí $X \setminus A \in \mathcal{A}$ pro $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ a tedy opět $X \setminus A \in \mathcal{R}$
- (iii) Necht' $A_k \in \mathcal{R}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$, pak $A_k \in \mathcal{A}$ pro $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}$. $\mathcal{A}$ je σ -algebra a tedy $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ pro $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}$, z čehož vyplývá, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$

Navíc jistě $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ pro $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Necht' $\tilde{\mathcal{R}}$ je σ -algebra obsahující $\mathcal{S}$, pak dle definice $\mathcal{T}$ platí $\tilde{\mathcal{R}} \in \mathcal{T}$. Z toho vyplývá, že $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{R}}$, neboť systém $\mathcal{R}$ je definován jako průnik všech systémů v $\mathcal{T}$. $\square$

Definice 1.2 (Otevřená množina). Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **otevřená**, pokud pro každé $x \in A$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset A$. Necht' $X \subset \mathbb{R}^n$, pak množinu všech otevřených podmnožin X budeme značit $\mathcal{G}(X)$.

Poznámka. Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$, X otevřená. Připomeňme, že systém otevřených množin splňuje:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{G}(X)$
- (ii) $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{G}(X) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k U_i \in \mathcal{G}(X)$
- (iii) $U_\alpha \in \mathcal{G}(X)$ pro všechna $\alpha \in A$, tzn libovolný systém $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{G}(X)$

Definice 1.3 (Borelovské množiny). Nechť X je množina. **Borelovské množiny**, značíme $\mathcal{B}(X)$, tvoří nejmenší σ -algebru obsahující otevřené podmnožiny X , tedy

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G}(X)).$$

Definice 1.4 (Míra). Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ se nazývá **míra**, pokud není identicky rovna ∞ a je σ -aditivní, tedy pro $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní, platí

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou. Je-li $\mu(X) = 1$, pak μ nazýváme pravděpodobnostní míra a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ pravděpodobnostní prostor.

Poznámka. Mějme posloupnost množin $\{A_k\}$, $A_k \in \mathcal{A}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$, a $A \in \mathcal{A}$. Značením $A_k \nearrow A$ (resp. $A_k \searrow A$) máme na mysli fakt, že $A_k \subset A_{k+1}$ a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ (resp. $A_{k+1} \subset A_k$ a $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$).

Věta 1.2 (Spojitost míry). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom platí:

- (a) Jestliže $A_k \in \mathcal{A}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k \nearrow A$, pak $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.
- (b) Jestliže $A_k \in \mathcal{A}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k \searrow A$ a $\mu(A_1) < \infty$, pak $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

Důkaz. (a): Použijeme trik s zdisjunktněním abychom mohli použít definiční vlastnost míry. Označme $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$, tedy obecně $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, pak platí $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A$. Máme tedy

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(b): Položme $C_k = A_1 \setminus A_k$, pak $C_k \nearrow A_1 \setminus A$. Podle bodu (a) platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A).$$

Současně ale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k).$$

Dohromady

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k),$$

tedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

□

Definice 1.5 (n-buňka). Necht $a = [a_1, \dots, a_n], b = [b_1, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^n$ Množinu

$$W = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n; a_i < x_i < b_i \text{ pro } \forall i = 1, \dots, n\}$$

(a také každou množinu, která vznikne záměnou libovolného $<$ za $\leq$) nazveme **n-buňka**.
Objem n-buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$ a jako $\text{vol}(W) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ jinak.

Věta 1.3 (Rozšíření elementárního objemu). *Existuje právě jedna míra $\mathcal{L}_n$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taková, že pro každou n-buňku W platí $\mathcal{L}_n(W) = \text{vol}(W)$.*

Důkaz. Bude nastíněna jen idea důkazu. Platí: $G \subset \mathbb{R}^n$, G otevřená, pak $\exists W_i$ disjunktní n-buňky, že $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$, anb otevřenou množinu si rozdělíme na nekonečně mnoho obdélníků. Pak definujeme míru $\mathcal{L}^n(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(W_i)$. Pro libovolnou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ zadefinujeme $\mathcal{L}_n^* = \inf\{\mathcal{L}^n(G); A \subset G, G \text{ otevřená}\}$, tzn. libovolnou množinu si co nejlépe aproximujeme množinou otevřenou a vezmu její objem. Pak stačí jen ukázat, že $\mathcal{L}_n^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ je naše hledaná míra. $\square$

Důsledek 1.1. *Necht $A \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná a $\varepsilon > 0$. Pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subset G$ a $\mathcal{L}_n(G \setminus A) < \varepsilon$.*

Důkaz. Plyne přímo z definice míry z předchozí věty. $\square$

Poznámka. Tato míra $\mathcal{L}_n$ je invariantní vůči posunutí - pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ platí $\mathcal{L}_n(x + A) = \mathcal{L}_n(A)$.

Definice 1.6 (Úplná míra). Necht $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že μ je **úplná míra**, pokud pro všechna $A \in \mathcal{A}$, taková že $\mu(A) = 0$, a všechna $A' \subset A$ platí $A' \in \mathcal{A}$ (a tedy $\mu(A') = 0$).

Věta 1.4 (Zúplnění míry). *Necht $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Necht $\mathcal{A}_0$ je systém všech množin $E \subset X$ pro něž existují $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Potom $\mathcal{A}_0$ je σ -algebra obsahující $\mathcal{A}$. Definujeme $\mu_0(E) = \mu(A)$. Potom $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{A}$ a $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je prostor s úplnou mírou.*

Definice 1.7 (Lebesgueova míra). Zúplnění σ -algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vzhledem $\mathcal{L}_n$ označíme $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$. Pro rozšíření míry $\mathcal{L}_n$ na σ -algebru $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ používáme stejné značení $\mathcal{L}_n$. Toto rozšíření nazýváme **Lebesgueova míra** a $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ nazýváme σ -algebru **Lebesgueovsky měřitelných množin**.

1.2 Měřitelné funkce

Definice 1.8 (Měřitelné zobrazení). Necht $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a (Y, ρ) metrický prostor. Říkáme, že zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je **měřitelné**, jestliže $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ pro každou $V \subset Y$ otevřenou. Je-li $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, tj. množina všech borelovských množin, pak zobrazení f nazýváme **borelovské** (místo měřitelné).

Věta 1.5 (Měřitelnost charakteristické funkce). *Necht $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, potom charakteristická funkce množiny*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases}$$

je měřitelná právě tehdy, když $A \in \mathcal{A}$.

Důkaz. ($\Rightarrow$): Je-li $\chi_A(x)$ měřitelná, pak vezměme $f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2})) = A$, pak ale dle definice měřitelného zobrazení musí platit $A \in \mathcal{A}$, protože interval $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ je otevřená množina.

($\Leftarrow$): Necht' $A \in \mathcal{A}$, vezměme $B \subset \mathbb{R}$ otevřenou. Pak platí

$$\chi_A^{-1}(B) = \begin{cases} X & \text{pokud } 0, 1 \in B \\ A & \text{pokud } 1 \in B, 0 \notin B \\ X \setminus A & \text{pokud } 1 \notin B, 0 \in B \\ \emptyset & \text{jinak, tzn. } 0, 1 \notin B. \end{cases}$$

Pro všechny tyto množiny platí, že patří do $\mathcal{A}$ a tedy $\chi_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, tj χ_A je měřitelná. $\square$

Věta 1.6 (Měřitelnost složeného zobrazení). *Necht' (Y, ρ) , (Z, τ) jsou metrické prostory a $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Necht' $g : Y \rightarrow Z$ je spojitý a $f : X \rightarrow Y$ je měřitelné zobrazení. Potom $g \circ f$ je měřitelné zobrazení.*

Důkaz. Vezměme $V \subset Z$ otevřenou, jelikož g je spojitý, pak je i $g^{-1}(V)$ je otevřená dle charakterizace spojitých zobrazení na metrických prostorech. Dále je f měřitelné a tedy $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{A}$. $\square$

Věta 1.7 (Měřitelnost složeného zobrazení v $\mathbb{R}^2$). *Necht' $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou reálné měřitelné funkce na $(X, \mathcal{A})$. Necht' Y je metrický prostor a $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ je spojitý zobrazení. Definujme $h(x) = \phi(u(x), v(x))$, pak $h : X \rightarrow Y$ je měřitelné zobrazení.*

Důkaz. Definujme zobrazení $g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (u(x), v(x))$. Pak $h(x) = (\phi \circ g)(x)$. Podle předchozí věty pak stačí jen dokázat, že $g(x)$ je měřitelné zobrazení. Zvolme speciální množinu $V = I_1 \times I_2$, kde I_1, I_2 jsou otevřené intervaly. Pak platí

$$g^{-1}(V) = g^{-1}(I_1 \times I_2) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2).$$

Funkce u, v jsou měřitelné a tedy $u^{-1}(I_1) \in \mathcal{A}$, $v^{-1}(I_2) \in \mathcal{A}$. Uzavřenost σ -algebry na průnik dává $g^{-1}(V) \in \mathcal{A}$. Nyní vezměme obecnou otevřenou $V \subset \mathbb{R}^2$, pak

$$\exists V_i = I_1^i \times I_2^i, \text{ že } V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i,$$

stačí totiž vzít všechny racionální intervaly, které jsou celé ve V . Pak máme

$$g^{-1}(V) = g^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} g^{-1}(V_i) \in \mathcal{A}.$$

g je tedy měřitelné a tedy i h je měřitelné. $\square$

Důsledek 1.2. *Necht' $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou měřitelné, pak $f + g$ a fg jsou měřitelné.*

Důkaz. Stačí použít předchozí větu na $u = f, v = g$ a $\phi_1(x, y) = x + y$, $\phi_2(x, y) = xy$, což jsou spojitá zobrazení. $\square$

Věta 1.8 (Kritérium měřitelnosti). *Necht' $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, (Y, ρ) metrický prostor a $f : X \rightarrow Y$.*

(a) *Je-li $\mathcal{M}$ systém všech množin $A \subset Y$, pro něž je $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, potom $\mathcal{M}$ je σ -algebra.*

(b) *Je-li f měřitelné, $B \subset Y$ borelovská, potom $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

(c) Je-li $Y = [-\infty, \infty]$, pak f je měřitelná právě tehdy, když $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ pro všechna $\alpha \in [-\infty, \infty]$.

Důkaz. (a): Ověříme axiomy definice σ -algebry.

- Máme $f^{-1}(Y) = X$ a k tomu víme, že $X \in \mathcal{A}$ a tedy $Y \in \mathcal{M}$.
- Necht' $A \in \mathcal{M}$, pak $f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A)$. Jelikož $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, pak i $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, protože $\mathcal{A}$ je σ -algebra. Z definice $\mathcal{M}$ pak tedy $Y \setminus A \in \mathcal{M}$.
- Necht' $A_k \in \mathcal{M}, \forall k \in \mathbb{N}$, Pak $f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k)$. Jelikož $f^{-1}(A_k) \in \mathcal{A}$, pak $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k) \in \mathcal{A}$ a tedy $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ je tedy σ -algebra.

(b): Označme $\mathcal{M} = \{A \subset Y; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. f je dle předpokladu měřitelné a tedy $\mathcal{G}(Y) \subset \mathcal{M}$. Systém $\mathcal{M}$ je σ -algebra dle bodu (a) a tedy $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{M}$.

(c): Implikace zleva doprava plyne přímo z definice. Interval $(\alpha, \infty]$ je totiž otevřená množina pro $\forall \alpha \in [-\infty, \infty]$.

Ať $\mathcal{M} = \{A \subset [-\infty, \infty]; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$. Pak $\mathcal{M}$ je σ -algebra dle (a) a podle předpokladu platí $(\alpha, \infty] \in \mathcal{M}, \forall \alpha \in [-\infty, \infty]$. Ukážeme, že každý otevřený interval leží v $\mathcal{M}$ a díky tvrzení z analýzy pak platí $\mathcal{G}(Y) \subset \mathcal{M}$. Necht' $\beta \in [-\infty, \infty]$, vezměme $\{\beta_k\}$, že $\beta_k \nearrow \beta$. Pak

$$[-\infty, \beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-\infty, \beta_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{[-\infty, \infty] \setminus (\beta_k, \infty]}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}.$$

Nyní $(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]$ a tedy $(\alpha, \beta) \in \mathcal{M}$. Platí, že každá otevřená množina v $\mathbb{R}$ lze zapsat jako spočetné sjednocení otevřených intervalů. Tedy $\mathcal{G}([-\infty, \infty]) \subset \mathcal{M}$. $\square$

Věta 1.9 (Měřitelnost a limitní přechod). *Necht' $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $f_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ jsou měřitelná zobrazení. Definujme $g = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ a $f = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$. Potom f a g jsou měřitelná.*

Důkaz. Necht' $x \in X$, zřejmě máme $g(x) > \alpha \iff \exists k \in \mathbb{N}$, že $f_k(x) > \alpha$. Ověříme kritérium měřitelnosti pro g . Platí $g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((\alpha, \infty])$. f_k jsou měřitelné a tedy $f_k^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}$ a z toho plyne

$$g^{-1}((\alpha, \infty]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}.$$

g je tedy měřitelná. Analogicky pro $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k = -\sup_{k \in \mathbb{N}} -f_k$ je měřitelná.

Definujme $h_k(x) = \sup\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots\}$, pak $f(x) = \lim h_k(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} h_k(x)$. Podle předchozího zjištění je ale f měřitelná. $\square$

Poznámka. Pár poznámek k předchozím větám.

- (a) Analogické tvrzení platí i pro $\inf$ a $\liminf$
- (b) Limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná funkce.
- (c) Necht' f, g jsou měřitelné, pak $\max(f, g)$ a $\min(f, g)$ jsou měřitelné.

Důkaz. (a): Důkaz je naznačen v samotném tvrzení.

(b): Při existenci limity je ona limita rovna limes superior.

(c): $\max(f, g) = \sup\{f, g, g, \dots\}$. $\square$

Definice 1.9 (Jednoduchá funkce). Necht' X je množina a $s : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ je funkce. Řekneme, že s je **jednoduchá** funkce, když $s(X)$ je konečná podmnožina $[0, \infty)$.

Tato funkce lze zapsat ve tvaru $s(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, kde $\alpha_i \in [0, \infty)$ a A_i jsou po dvou disjunktní množiny.

Poznámka. Není obtížné dokázat, že $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ jednoduchá, je měřitelná právě tehdy, když všechny $A_i \in \mathcal{A}$.

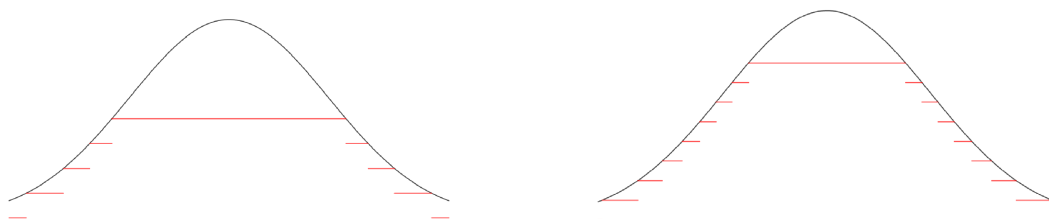
Věta 1.10 (Aproximace jednoduchými funkcemi). Necht' $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $f : X \rightarrow [0, \infty]$ je měřitelná funkce. Pak existují s_k jednoduché měřitelné funkce, tak, že $s_k \nearrow f$.

Důkaz. Necht' $k \in \mathbb{N}$ je pevné. Interval $[0, k]$ rozdělíme na intervaly $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$, $i = 0, 1, \dots, k2^k - 1$. Definujme $F_k = f^{-1}([k, \infty])$ a $E_{k,i} = f^{-1}([\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}))$, $i = 0, 1, \dots, k2^k - 1$.

Položme

$$s_k(x) = k\chi_{F_k}(x) + \sum_{i=0}^{k2^k-1} \frac{i}{2^k} \chi_{E_{k,i}}(x).$$

Nyní máme $F_k, E_{k,i}$ po dvou disjunktní a měřitelné, protože f je měřitelná a intervaly jsou borelovské množiny. Vzor libovolné borelovské při měřitelném zobrazení je měřitelná množina. Z toho dále plyne že s_k je jednoduchá a měřitelná. Dále $s_{k+1}(x) \geq s_k(x)$ (viz Obrázek 1)



Obrázek 1: konstrukce $s_k(x), s_{k+1}(x)$ červeně

Nyní rozlišme dva případy.

- Pokud $x \in X$, že $f(x) = \infty$, pak $s_k(x) \nearrow f(x)$.
- Pokud $x \in X$, že $f(x) < \infty$, pak $\exists k_0$, že $f(x) < k_0$. Tedy pro $\forall k \geq k_0$ platí $|s_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k}$ a tedy $s_k(x) \nearrow f(x)$.

□

Důsledek 1.3. Součet a součin měřitelných funkcí do $[0, \infty]$ jsou měřitelné funkce.

Poznámka. Jsou-li $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelné, pak množiny

$$\{f < g\} = \{x \in X; f(x) < g(x)\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$$

jsou měřitelné.

2 Konstrukce integrálu

2.1 Definice abstraktního integrálu

Poznámka. Domluvme se, že pro všechna $a \in [0, \infty]$ máme $a + \infty = \infty$ a pro $a > 0$ dále $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$. Navíc definujeme $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$. Děláme to z toho důvodu, že chceme aby například nulová funkce definovaná na množině $\mathbb{R}$, která má míru ∞ , měla nulový integrál. Stejně tak pro funkci $f \equiv \infty$ na množině nulové míry.

Definice 2.1 ((Abstraktní) Lebesgueův integrál). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce. Pro $E \in \mathcal{A}$ definujeme

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Pro $f : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelnou definujeme **(abstraktní) Lebesgueův integrál**

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E s \, d\mu; 0 \leq s \leq f, s \text{ je jednoduchá měřitelná} \right\}.$$

Věta 2.1 (Vlastnosti abstraktního integrálu). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$. Potom pro $E \in \mathcal{A}$ platí:

- (a) Je-li $f \leq g$ na X , pak $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.
- (b) Pro $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ platí $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.
- (c) Pro $c \in [0, \infty]$ platí $\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$.
- (d) Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in E$ pak $\int_E f \, d\mu = 0$ (i pro $\mu(E) = \infty$).
- (e) Je-li $\mu(E) = 0$, pak $\int_E f \, d\mu = 0$ (i pro $f \equiv \infty$ na E).
- (f) $\int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu$
- (g) (Čebyševova nerovnost) Nechť $\alpha, c \in [0, \infty]$, potom

$$\mu(\{x \in X; f(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c^\alpha} \int_X f^\alpha \, d\mu$$

- (h) Je-li $\int_X f \, d\mu < \infty$ a $N = \{f = \infty\}$, pak $\mu(N) = 0$.

Důkaz. **(a):** Nechť s je jednoduchá měřitelná funkce, $0 \leq s \leq f$. Pak také platí $0 \leq s \leq g$. Podle definice tedy platí $\int_E s \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$. Pak ale podle definice suprema

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

(b): Nechť $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce, $0 \leq s \leq f$. Pak dle definice

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap A) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap B) = \int_B s \, d\mu.$$

Tedy dle definice suprema

$$\int_A s \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

A opět

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

(c): Pokud $c = 0$, pak

$$\int_E cf \, d\mu = \int_E 0 \, d\mu = 0 \quad \text{a} \quad c \int_E f \, d\mu = 0 \quad \int_E f \, d\mu = 0$$

Nyní necht' $c > 0$, Označme $S = \{s : X \rightarrow [-\infty, \infty]; s \text{ jednoduchá}, 0 \leq s \leq cf\}$, $T = \{t : X \rightarrow [-\infty, \infty]; t \text{ jednoduchá}, 0 \leq t \leq f\}$. Pak

$$\int_E cf \, d\mu = \sup_{s \in S} \left\{ \int_E s \, d\mu \right\} = \sup_{s \in S} \left\{ \int_E c \cdot \frac{s}{c} \, d\mu \right\} = \sup_{s \in S} \left\{ c \int_E \frac{s}{c} \, d\mu \right\} = c \cdot \sup_{s \in S} \left\{ \int_E \frac{s}{c} \, d\mu \right\} = c \cdot \sup_{t \in T} \left\{ \int_E t \, d\mu \right\} = c \int_E f \, d\mu.$$

(d): Necht' $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce, $0 \leq s \leq f$. Pak

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^k 0 \mu(A_i \cap E) = 0.$$

A tedy i

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

(e): Necht' $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce, $0 \leq s \leq f$. Pak

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(E) = \sum_{i=1}^k \alpha_i 0 = 0.$$

A tedy i

$$\int_E f \, d\mu = 0.$$

(f): Necht' $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$ je jednoduchá měřitelná funkce, $0 \leq s \leq f \chi_E$. Pak $\chi_E s = s$ a tedy

$$\int_X s \, d\mu = \int_X s \chi_E \, d\mu = \int_E s \, d\mu.$$

Tedy

$$\int_X f \chi_E \, d\mu = \int_E f \chi_E \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

(g): Máme $f^\alpha = e^{\alpha \log(f(x))}$, kde f je měřitelná, $\log y$ a e^y jsou spojité a tedy dle věty o měřitelnosti složeného zobrazení je i f^α měřitelná. Pak za využití bodu **(a)** a **(b)**

$$\int_X f^\alpha \, d\mu \geq \int_{\{x \in X; f(x) \geq c\}} f^\alpha \, d\mu \geq \int_{\{x \in X; f(x) \geq c\}} c^\alpha \, d\mu = c^\alpha \mu(\{x \in X; f(x) \geq c\}).$$

(h): Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $N_k = \{f \geq k\}$ pak $N \subset N_k$. Pak podle bodu **(g)** máme

$$\mu(N) \leq \mu(N_k) \leq \frac{1}{k} \underbrace{\int_X f \, d\mu}_{< \infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

a tedy $\mu(N) = 0$. □

Věta 2.2 (Linearita integrálu pro jednoduché funkce). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $s, t : X \rightarrow [0, \infty]$ jsou jednoduché měřitelné funkce. Potom platí*

$$\int_X (s + t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu.$$

2.2 Leviho a Lebesgueova věta

Věta 2.3 (Leviho věta). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce a $f_k \nearrow f$. Pak f je měřitelná a*

$$\int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Důkaz. Funkce f je měřitelná, jelikož se jedná o limitu měřitelných funkcí. Jelikož $\{f_k\}$ je neklesající posloupnost, pak i $\int_X f_k d\mu$ je neklesající posloupnost, tedy $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \alpha \in [0, \infty]$.

Víme, že $f_k \leq f$ a z věty o limitě a uspořádání tedy platí

$$\int_X f_k d\mu \leq \int_X f d\mu \Rightarrow \alpha \leq \int_X f d\mu.$$

Nechť $s(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ je jednoduchá měřitelná funkce, kde A_j jsou disjunktní a $0 \leq s \leq f$. Dále nechť $c \in (0, 1)$. Označme $E_k = \{x \in X; f_k(x) \geq c \cdot s(x)\}$. Pak $E_k \subset E_{k+1}$, protože $f_k \leq f_{k+1}$. Dokážeme, že

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = X$$

Nechť $x \in X$, pak $f(x) > c \cdot s(x)$, protože $c \in (0, 1)$. Z definice limity také máme, že $\exists k_0 \in \mathbb{N} : f_{k_0}(x) > c \cdot s(x)$ a tedy $x \in E_{k_0}$. Z toho plyne $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, opačná inkluze je triviální.

Nechť $j \in \mathbb{N}$, pak $A_j \cap E_k \nearrow A_j \cap X = A_j$ a tedy podle věty o spojitosti míry také platí

$$\mu(A_j \cap E_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu(A_j)$$

Nyní

$$\alpha \geq \int_X f_k d\mu \geq \int_{E_k} f_k d\mu \geq \int_{E_k} c \cdot s d\mu = c \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = c \int_X s d\mu.$$

Nyní pro limitní přechod $c \rightarrow 1^-$ platí

$$\alpha \geq \int_X s d\mu$$

A z definice suprema platí

$$\alpha \geq \sup \left\{ \int_X s d\mu; s \text{ jednoduchá měřitelná, } 0 \leq s \leq f \right\} = \int_X f d\mu$$

Dohromady z obou nerovností

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu$$

□

Věta 2.4 (Leviho věta pro řady). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce. Pak platí*

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Důkaz. Dokážeme linearitu integrálu pro měřitelné funkce. Nechť $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce. Pak $\exists s_k \nearrow f$ a $t_k \nearrow g$ jednoduché měřitelné funkce. Pak zřejmě $s_k + t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f + g$. Pro $\forall k \in \mathbb{N}$ dle věty o linearitě integrálu pro jednoduché funkce platí

$$\int_X (s_k + t_k) d\mu = \int_X s_k d\mu + \int_X t_k d\mu$$

Pomocí Leviho věty pak snadno ukážeme

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k + t_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X (s_k + t_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X s_k d\mu + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X t_k d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Indukcí pak dokážeme

$$\int_X \sum_{k=1}^n f_k d\mu = \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu$$

Zřejmě platí

$$\sum_{k=1}^n f_k \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

Opět dle Leviho věty

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{k=1}^n f_k d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu.$$

□

Věta 2.5 (Fatouovo lemma). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce. Pak platí*

$$\int_X \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Důkaz. Označme $g_k(x) = \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), \dots\}$, pak g_k jsou měřitelné funkce a navíc $g_k \nearrow \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Podle Leviho věty tedy platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) d\mu = \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) d\mu.$$

Zřejmě platí $g_k(x) \leq f_k(x)$ a tedy $\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$. Z toho dostáváme

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k(x) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu.$$

□

Poznámka. Pro $f_k = k\chi_{[0, \frac{1}{k}]}$ platí

$$\int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_0^1 \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = 0 < 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k(x) dx = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k(x) dx,$$

a tedy ve Fatouově lemmatu může skutečně nastat ostrá nerovnost.

2.3 Linearita integrálu

Definice 2.2 (Lebesgueovský integrovatelné funkce). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $E \in \mathcal{A}$. Označme $L^1(X, \mu)$ množinu všech měřitelných funkcí $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ pro něž $\int_X |f| d\mu < \infty$. Pro funkce z $L^1(X, \mu)$ definujeme (**abstraktní**) **Lebesgueův integrál** jako

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Tyto funkce nazýváme **Lebesgueovský integrovatelné funkce**.

Poznámka. Z definice triviálně plyne, že je-li f Lebesgueovský integrovatelná, je i $|f|$ Lebesgueovský integrovatelná. Tedy Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní. Tuto vlastnost nemá Newtonův integrál.

Věta 2.6 (Integrál a absolutní hodnota). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f \in L^1(X, \mu)$. Pak

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Důkaz.

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu$$

□

Věta 2.7 (Linearita integrálu). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $f, g \in L^1(X, \mu)$. Pak $\alpha f + \beta g \in L^1(X, \mu)$ a

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

Důkaz. Pro $f \geq 0$ a $\alpha \geq 0$ již víme $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$. Pak pro $f \in L^1(X, \mu)$ máme

$$\int_X \alpha f d\mu = \int_X \alpha f^+ - \alpha f^- d\mu = \int_X \alpha f^+ d\mu - \int_X \alpha f^- d\mu = \alpha \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) = \alpha \int_X f d\mu.$$

Pro $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelné víme z důkazu Leviho věty pro řady, že platí

$$\int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Označme $h = f + g$, pak $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ tedy $h^+ + f^- g^- = h^- + f^+ + g^+$, kde na obou stranách máme nezáporné funkce. Tedy podle linearit pro nezáporné funkce

$$\int_X h^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X h^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu.$$

kde jsou všechno konečná čísla, protože $f, g \in L^1(X, \mu)$ a tedy $\int_X h^+ d\mu \leq \int_X |f| + |g| d\mu$ (Obdobně pro h^-).

$$\begin{aligned} \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu &= \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu \\ \int_X h d\mu &= \int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \end{aligned}$$

□

Věta 2.8 (Lebesgueova věta). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce a $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Nechť dále existuje $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že $|f_k(x)| \leq g(x)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a $x \in X$. Potom*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu = 0 \quad a \quad \int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Důkaz. Víme, že f je měřitelná a dále provedeme odhad $|f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq g + g$. Zavedeme pomocné funkce $g_k(x) = 2g(x) - |f_k(x) - f(x)| \geq 0$. Snadno $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = 2g(x)$. Z Fatouva lemmatu

$$\begin{aligned} \int_X 2g d\mu &= \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu = \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_X 2g d\mu - \int_X |f_k - f| d\mu \right) = \\ &= \int_X 2g d\mu + \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(- \int_X |f_k - f| d\mu \right) = \int_X 2g d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu \end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu \leq 0$$

Také ale musí platit obrácená nerovnost, protože $|f_k - f| \geq 0$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$. Z toho dostáváme

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu = 0$$

protože se jedná o nezápornou posloupnost. Nyní

$$\left| \int_X f_k - f d\mu \right| \leq \int_X |f_k - f| d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

a tedy

$$\int_X f_k - f d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

□

2.4 Rovnost skoro všude a upravená definice měřitelnosti

Definice 2.3 (Rovnost skoro všude). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že vlastnost V platí **skoro všude** na E , jestliže existuje $N \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(N) = 0$ a vlastnost V platí $E \setminus N$.

Řekneme, že funkce $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou **ekvivalentní** a značíme $f \sim g$, jestliže $f = g$ skoro všude na X , tedy $\mu(\{f \neq g\}) = 0$.

Definice 2.4 (Nová definice měřitelnosti). Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ pro $E \in \mathcal{A}$. Řekneme, že f je **měřitelná** na X , jestliže $\mu(X \setminus E) = 0$ a $f^{-1}(V) \cap E$ je měřitelná pro každou $V \subset \mathbb{R}$ otevřenou.

Poznámka. Souvislosti nové a staré definice

(a) Definujeme-li

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in E \\ 0 & \text{pro } x \in X \setminus E, \end{cases}$$

tak $f = \hat{f}$ skoro všude a $\hat{f}$ je měřitelná podle staré definice.

- (b) Stále platí, že limita měřitelných funkcí je měřitelná (neboť spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina).
- (c) Snadno lze ukázat, že Leviho a Lebesgueova věta platí, i pokud $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ skoro všude.

Věta 2.9 (Lebesgueova věta pro řady). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce a nechť $\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| < \infty \, d\mu$. Potom $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně pro skoro všechna $x \in X$ a*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Důkaz. Funkce $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ je měřitelná, jelikož se jedná o limitu posloupnosti částečných součtů, která je měřitelná. Navíc je to posloupnost nezáporná a neklesající. Z Leviho věty pro řady

$$\int_X g \, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \, d\mu < \infty$$

Tedy $g(x) \in L^1(X, \mu)$. Navíc platí, že $g < \infty$ skoro všude a tedy pro skoro všechna $x \in X$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konverguje.}$$

Pro částečné součty $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = g$$

a tedy jsme našli integrovatelnou majorantu pro aplikaci Lebesgueovy věty. Tedy

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{k=1}^n f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k$$

□

2.5 Integrál závislý na parametru

Věta 2.10 (O spojitě závislosti integrálu na parametru). *Nechť T je metrický prostor, $\alpha_0 \in T$ a nechť $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť dále platí*

- (i) *Pro všechna $\alpha \in T$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná,*
- (ii) *Pro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ spojitá v α_0 ,*
- (iii) *Existuje $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in T$.*

Potom $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha) \, d\mu(x)$, $\alpha \in T$ je spojitá v α_0 .

Důkaz. Podle Heineho věty pro metrické prostory stačí dokázat následující

$$\text{Nechť } \{\alpha_k\} \text{ je posloupnost v } T, \alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha_0 \Rightarrow F(\alpha_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(\alpha_0).$$

Vezměme tedy $\{\alpha_k\}$ posloupnost v T , $\alpha_k \rightarrow \alpha_0$ a označme $f_k(x) = f(x, \alpha_k)$, pak $f_k(x)$ je měřitelná podle bodu **(i)**. Dále podle bodu **(iii)** $\exists g \in L^1(X, \mu)$ tak, že $|f_k(x)| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $k \in \mathbb{N}$. Pro pevné $x \in X$ platí podle bodu **(ii)** a Heineovy věty

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, \alpha_k) = f(x, \alpha_0)$$

Podle Lebesgueovy věty tedy platí

$$F(\alpha_0) = \int_X f(x, \alpha_0) d\mu(x) = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) d\mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\alpha_k).$$

F je tedy spojitá v α_0 . □

Věta 2.11 (O derivaci podle parametru). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť dále platí*

- (i) *Pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná,*
- (ii) *Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$,*
- (iii) *Existuje $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že $|\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$,*
- (iv) *Existuje α_0 tak, že $F(\alpha_0) = \int_X f(x, \alpha_0) d\mu(x) \in \mathbb{R}$ (je konečný).*

Potom $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha) d\mu(x) \in \mathbb{R}$ pro všechna $\alpha \in I$, existuje derivace této funkce a platí

$$F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\mu(x).$$

Důkaz. Nechť $\alpha \in I$. Pak

$$|f(x, \alpha)| \leq |f(x, \alpha_0)| + |f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)|$$

Jelikož $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ má vlastní derivaci na $[\alpha, \alpha_0]$ nebo $[\alpha_0, \alpha]$ S využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\exists \xi \in (\alpha, \alpha_0)$ nebo (α_0, α) , že

$$|f(x, \alpha_0)| + |f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)| = |f(x, \alpha_0)| + \left| \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0) \right| \leq |f(x, \alpha_0)| + g(x) |\alpha - \alpha_0|.$$

Máme $f(x, \alpha_0) \in L^1(X, \mu)$ z bodu **(iv)** a $g(x) |\alpha - \alpha_0| \in L^1(X, \mu)$ z bodu **(iii)** a tedy $f(x, \alpha) \in L^1(X, \mu)$ neboli $F(\alpha) \in \mathbb{R}$.

Abychom ukázali, že derivace F má skutečně tvar jako ve znění věty, stačí dokázat, že platí (opět s pomocí Heineovy věty)

$$\text{Nechť } \{\alpha_k\} \text{ je posloupnost v } I, \alpha_k \neq \alpha, \alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha \Rightarrow \frac{F(\alpha_k) - F(\alpha)}{\alpha_k - \alpha} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_X \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\mu(x).$$

Vezměme tedy $\{\alpha_k\}$ posloupnost v I , $\alpha_k \neq \alpha$, $\alpha_k \rightarrow \alpha$. Označme $f_k = \frac{f(x, \alpha_k) - f(x, \alpha)}{\alpha_k - \alpha}$. Podle bodu **(i)** jsou f_k měřitelné a navíc dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\exists \xi \in (\alpha, \alpha_0)$ nebo (α_0, α) , že

$$|f_k(x)| = \left| \frac{f(x, \alpha_k) - f(x, \alpha)}{\alpha_k - \alpha} \right| = \left| \frac{1}{\alpha_k - \alpha} \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \alpha} (\alpha_k - \alpha) \right| \leq g(x)$$

Podle Lebesgueovy věty pak platí

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_k) - F(\alpha)}{\alpha_k - \alpha} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \frac{f(x, \alpha_k) - f(x, \alpha)}{\alpha_k - \alpha} d\mu(x) = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x, \alpha_k) - f(x, \alpha)}{\alpha_k - \alpha} d\mu(x) = \\ &= \int_X \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\mu(x). \end{aligned}$$

□

3 Vícerozměrná integrace

3.1 Fubiniova věta v $\mathbb{R}^n$

Definice 3.1 (Řez funkce). Nechtě X a Y jsou množiny a f je funkce na $X \times Y$. Definujme pro $x \in X$ funkci $f_x : y \rightarrow f(x, y)$, $y \in Y$, a pro $y \in Y$ definujeme funkci $f^y : x \rightarrow f(x, y)$, $x \in X$.

Věta 3.1 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^n$). Nechtě $f \in L^1(\mathbb{R}^{p+q})$. Potom pro $\mathcal{L}_p$ skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ existuje

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x d\mathcal{L}_q = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) d\mathcal{L}_q(y)$$

a pro $\mathcal{L}_q$ skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ existuje

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y d\mathcal{L}_p = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) d\mathcal{L}_p(x)$$

a platí

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f d\mathcal{L}_{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi d\mathcal{L}_p = \int_{\mathbb{R}^q} \psi d\mathcal{L}_q.$$

Idea Důkazu: Dokážeme pro $\chi_E(x)$, pak jednoduchou $s(x)$, pak obecnou měřitelnou $f(x)$. Důkaz pro χ_e : pro $\chi_{A \times B}$ je zřejmé, platí-li pro E_k a E_k jsou disjunktní, pak platí i pro $\chi_{\bigcup_k E_k}$. K tomu je potřeba vybudovat následující pojem:

3.2 Dynkinovy systémy

Definice 3.2 (Dynkinův systém). Nechtě Z je množina a $\mathcal{D} \subset \exp(Z)$. Řekneme, že $\mathcal{D}$ je **Dynkinův systém**, jestliže

- (i) $Z \in \mathcal{D}$
- (ii) $D \in \mathcal{D} \Rightarrow Z \setminus D \in \mathcal{D}$
- (iii) $D_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$.

Poznámka. Platí následující

- (a) Každá σ -algebra je Dynkinův systém.
- (b) Nechtě $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém, $A, B \in \mathcal{D}$ a $B \subset A$, pak $A \setminus B \in \mathcal{D}$.
 $A \setminus B = Z \setminus (B \cup (Z \setminus A))$. Protože $Z \setminus A$ kvůli $B \subset A$ rozhodně neobsahuje B , jsou s B disjunktní a tedy podle vlastnosti iii) platí $B \cup (Z \setminus A) \in \mathcal{D}$. Pak podle vlastnosti ii) leží tento rozdíl v $\mathcal{D}$.

Věta 3.2 (Vztah σ -algebry a Dynkinova systému). *Nechť $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. Potom $\mathcal{D}$ je σ -algebra $\Leftrightarrow$ systém $\mathcal{D}$ je uzavřený na tvoření průniků (tedy $E, D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \cap D \in \mathcal{D}$).*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Každá σ -algebra je Dynkinův systém a σ -algebra je uzavřena na průniky.

($\Leftarrow$): Nechť $A, B \in \mathcal{D}$. Pak $A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{D}}$ a $A \cap B \subset A$. Podle předchozí poznámky tedy

platí $A \setminus B \in \mathcal{D}$. Dále $A \cup B = (A \setminus B) \cup B \in \mathcal{D}$. Pro ověření poslední vlastnosti σ -algebry mějme $A_j \in \mathcal{D}$ a $\widetilde{A}_j = A_1 \cup \dots \cup A_j$. Dle již dokázaného jsou $\widetilde{A}_j \in \mathcal{D}$. Pak

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \widetilde{A}_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(\widetilde{A}_j \setminus \widetilde{A}_{j-1})}_{\in \mathcal{D} \text{ a jsou disjunktní}}.$$

Tedy Dynkinův systém uzavřený na průniky je σ -algebrou, což jsme chtěli. $\square$

Poznámka. Nechť Z je množina a $\mathcal{S} \subset \exp(Z)$. Potom existuje nejmenší Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$ a značíme ho $\delta(\mathcal{S})$. Vždy platí $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. Důkaz je obdobný jako pro nejmenší σ -algebru. Inkluze plyne z bodu (a) předchozí poznámky.

Věta 3.3 (O nejmenším Dynkinově systému). *Nechť Z je množina a $\mathcal{S} \subset \exp(Z)$ obsahuje průnik každých dvou množin z $\mathcal{S}$. Pak $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Již víme, že $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. Podle předchozí věty stačí dokázat, že $\delta(\mathcal{S})$ je uzavřený na operaci průniku. Pak totiž platí $\delta(\mathcal{S})$ je σ -algebra, což nám dává obrácenou inkluzi.

Nechť $D \in \delta(\mathcal{S})$ libovolné. Položme $\mathcal{D}_D = \{A \in \exp(Z); A \cap D \in \delta(\mathcal{S})\}$. Ukážeme, že $\mathcal{D}_D$ je Dynkinův systém

- (i) $Z \cap D = D \in \delta(\mathcal{S})$, tedy $Z \in \mathcal{D}_D$,
- (ii) Nechť $A \in \mathcal{D}_D$, pak $(Z \setminus A) \cap D = D \setminus \underbrace{(A \cap D)}_{\in \delta(\mathcal{S})} \in \delta(\mathcal{S})$, tedy $(Z \setminus A) \in \mathcal{D}_D$,
- (iii) Nechť $A_j \in \mathcal{D}_D$, po dvou disjunktní, pak $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap D = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \cap D)}_{\text{disjunktní}} \in \delta(\mathcal{S})$, tedy $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}_D$.

Nyní nechť $E \in \mathcal{S}$ je pevné. Pak pro $\forall D \in \mathcal{S}$ platí $D \cap E \in \mathcal{S} \subset \delta(\mathcal{S})$ a tedy $D \in \mathcal{D}_E$. Z toho vyplývá inkluze $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_E$, ale podle již dokázaného je $\mathcal{D}_E$ Dynkinův systém a tedy dostáváme $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_E$. Shrňme si, co jsme právě dokázali

$$\forall E \in \mathcal{S}, \forall D \in \delta(\mathcal{S}) \text{ platí } D \cap E \in \delta(\mathcal{S}) \text{ neboli } E \in \mathcal{D}_D.$$

Nechť $D \in \delta(\mathcal{S})$ je nyní pevné. Podle výroku výše platí

$$\mathcal{S} \subset \delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_D.$$

Nyní jsme náš výrok ještě zesilnili, protože teď máme

$$\forall E \in \delta(\mathcal{S}), \forall D \in \delta(\mathcal{S}) \text{ platí } D \cap E \in \delta(\mathcal{S}) \text{ neboli } E \in \mathcal{D}_D.$$

To znamená, že $\delta(\mathcal{S})$ je uzavřené na průniky, což je přesně to, co jsme potřebovali dokázat. $\square$

Definice 3.3 (σ -konečná míra). Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ se nazývá σ -**konečná**, jestliže existují $S_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, takové, že $\mu(S_k) < \infty$ a $S_k \nearrow X$.

Věta 3.4 (O jednoznačnosti míry). Nechť Z je množina a $\mathcal{S} \subset \exp(Z)$ je systém uzavřený vzhledem k průniku, $S_k \in \mathcal{S}$ a $S_k \nearrow Z$. Nechť μ_1 a μ_2 jsou míry na $\sigma(\mathcal{S})$, $\mu_1(S) = \mu_2(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$ a $\mu_1(S_k) < \infty$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom $\mu_1 = \mu_2$ na $\sigma(\mathcal{S})$.

Důkaz. Nechť $S \in \mathcal{S}$, že $\mu_1(S) = \mu_2(S) < \infty$. Nechť $\mathcal{D}_S = \{E \in \sigma(\mathcal{S}); \mu_1(S \cap E) = \mu_2(S \cap E)\}$. Ověříme, že $\mathcal{D}_S$ je Dynkinův systém

- (i) $\mu_1(S \cap Z) = \mu_1(S) = \mu_2(S) = \mu_2(S \cap Z)$, tedy $Z \in \mathcal{D}_S$,
- (ii) Nechť $E \in \mathcal{D}_S$, pak $\mu_1(S \cap (Z \setminus E)) = \mu_1(S \setminus (S \cap E)) = \mu_1(S) - \mu_1(S \cap E) = \mu_2(S) - \mu_2(S \cap E) = \mu_2(S \setminus (S \cap E)) = \mu_2(S \cap (Z \setminus E))$, tedy $Z \setminus E \in \mathcal{D}_S$,
- (iii) Nechť $E_j \in \mathcal{D}_S$, po dvou disjunktní, pak $\mu_1\left(S \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu_1\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} (S \cap E_j)}_{\text{disjunktní}}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(S \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2(S \cap E_j) = \mu_2\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} (S \cap E_j)}_{\text{disjunktní}}\right) = \mu_2\left(S \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$, tedy $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}_S$.

Jelikož je $\mathcal{S}$ uzavřený na průniky, pak pro $\forall E \in \mathcal{S}$ platí $S \cap E \in \mathcal{S}$ a tedy $\mu_1(S \cap E) = \mu_2(S \cap E)$. Z toho vyplývá $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_S$. Také máme $\mathcal{D}_S \subset \sigma(\mathcal{S})$.

Triviálně ale platí $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_S$ a dle věty 3.3 platí $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$. Dohromady tedy $\mathcal{D}_S = \sigma(\mathcal{S})$.

Nyní pro $\forall k \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{D}_{S_k} = \sigma(\mathcal{S})$, tedy $\forall E \in \sigma(\mathcal{S})$ platí

$$\mu_1(S_k \cap E) = \mu_2(S_k \cap E) \text{ a } S_k \cap E \nearrow E.$$

Ze spojitosti míry tedy dostáváme $\mu_1(E) = \mu_2(E)$. □

Důsledek 3.1. Existuje právě jedna míra na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, která je invariantní vůči posunutí a $\mu([0, 1]^n) = 1$.

3.3 Součin měr a Fubiniova věta

Definice 3.4 (Obdélník, součin σ -algeber). Nechť $(X, \mathcal{S})$ a $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Řekneme, že $M \subset X \times Y$ je **obdélník**, jestliže existují $A \subset X$ a $B \subset Y$ tak, že $M = A \times B$. Pokud $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$, tak M nazveme **měřitelným obdélníkem**. Definujme $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ jako nejmenší σ -algebru obsahující každý měřitelný obdélník.

Definice 3.5 (Řezy). Nechť $E \subset X \times Y$, $x \in X$ a $y \in Y$. Potom definujeme **řezy**

$$E_x = \{y \in Y; [x, y] \in E\} \text{ a } E^y = \{x \in X; [x, y] \in E\}.$$

Věta 3.5 (O měřitelnosti řezů). Nechť $(X, \mathcal{S})$ a $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Nechť $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, $x \in X$ a $y \in Y$. Pak $E_x \in \mathcal{T}$ a $E^y \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Označme $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}; \forall x \in X \text{ platí } E_x \in \mathcal{T}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{A}$ je σ -algebra a obsahuje měřitelné obdélníky.

Nechť $E = A \times B$, $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$, pak

$$E_x = \begin{cases} B & \text{pro } x \in A \\ \emptyset & \text{pro } x \notin A \end{cases}$$

tedy $E \in \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ obsahuje měřitelné obdélníky. Nyní, že $\mathcal{A}$ je σ -algebra

(i) $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{T}$, tedy $X \times Y \in \mathcal{A}$.

(ii) Necht' $E \in \mathcal{A}$, pak

$$((X \times Y) \setminus E)_x = Y \setminus \underbrace{E_x}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}.$$

Tedy $(X \times Y) \setminus E \in \mathcal{A}$.

(iii) Necht' $E \in \mathcal{A}$, po dvou disjunktní, pak

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(E_k)_x}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}.$$

Nyní máme $\mathcal{S} \times \mathcal{T} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ a tedy $\forall x \in X$ platí $E_x \in \mathcal{T}$. Obdobně pro E^y . □

Poznámka. Platí $\mathcal{B}^1 \times \mathcal{B}^1 = \mathcal{B}^2$, ale pro zúplnění neplatí $\mathcal{B}_0^1 \times \mathcal{B}_0^1 = \mathcal{B}_0^2$. Platí však zúplnění $(\mathcal{B}_0^1 \times \mathcal{B}_0^1) = \mathcal{B}_0^2$.

Věta 3.6 (O měřitelnosti míry řezu). *Necht' $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Necht' μ je σ -konečná míra na $(X, \mathcal{S})$, ν je σ -konečná míra na $(Y, \mathcal{T})$ a $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Potom $x \mapsto \nu(E_x)$, $x \in X$, je měřitelná funkce na $(X, \mathcal{S})$ a $y \mapsto \mu(E^y)$, $y \in Y$, je měřitelná funkce na $(Y, \mathcal{T})$.*

Důkaz. Pro $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ označme $s_E(x) = \nu(E_x)$, chceme ukázat, že $s_E(x)$ je měřitelná funkce. Nejprve předpokládejme, že $\nu(Y) < \infty$. Označme $\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}; s_E(x) \text{ je měřitelná}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém a obsahuje měřitelné obdélníky.

Vezměme množinu $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Pak

$$s_{A \times B}(x) = \begin{cases} \nu(B) & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases}$$

tedy $s_{A \times B}(x) = \nu(B)\chi_A(x)$, což je měřitelná funkce. Tedy $A \times B \in \mathcal{D}$.

Nyní ověříme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém

(i) $s_{X \times Y}(x) = \nu(Y)$, $x \in X$, což je konstantní funkce a tedy měřitelná funkce. Tj. $X \times Y \in \mathcal{D}$.

(ii) Necht' $E \in \mathcal{D}$, pak

$$s_{(X \times Y) \setminus E}(x) = \nu(Y \setminus E_x) = \nu(Y) - \nu(E_x) = \nu(Y) - s_E(x),$$

což je opět měřitelná funkce, tedy $(X \times Y) \setminus E \in \mathcal{D}$.

(iii) Necht' $E_k \in \mathcal{D}$, po dvou disjunktní, pak

$$s_{(\bigcup E_k)}(x) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu((E_k)_x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_{(E_k)_x}(x)$$

což je limita částečných součtů měřitelných funkcí, tj. opět měřitelná a tedy $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{D}$.

Nyní podle věty 3.3

$$\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \sigma(\text{měř. obdélníky}) = \delta(\text{měř. obdélníky}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{T}.$$

Čímž jsme dokázali, že funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je $\mathcal{S}$ -měřitelná za předpokladu $\nu(Y) < \infty$. Nechť tedy $\nu(Y) = \infty$. Nyní ze σ -konečnosti nechť $Y_k \subset Y$, $Y_k \subset Y_{k+1}$, pro které platí $\nu(Y_k) < \infty$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = Y$. Označme $\nu_k(B) = \nu(B \cap Y_k)$, $B \in \mathcal{T}$. Pro ν_k tvrzení platí, protože

$$\nu_k(Y) = \nu(Y \cap Y_k) = \nu(Y_k) < \infty$$

Tedy $s_E^k(x) = \nu(E_x \cap Y_k)$ je měřitelná. Nechť nyní $E \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ je pevné, pak $E_x \cap Y_k \nearrow E_x$, tedy

$$s_E(x) = \nu(E_x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(E_x \cap Y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_E^k(x).$$

a limita měřitelných funkcí je měřitelná. □

Věta 3.7 (Existence a jednoznačnost součinové míry). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu), (Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou měřitelné prostory se σ -konečnou mírou. Potom existuje právě jedna míra $\mu \times \nu$ na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ taková, že*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \text{ pro každou } A \in \mathcal{S} \text{ a } B \in \mathcal{T}.$$

Je-li $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, pak

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\nu(y).$$

Důkaz. Podle předchozí věty víme, že funkce $x \mapsto \nu(Q_x)$ je měřitelná a tedy ji má smysl integrovat. Definujeme

$$\Pi_1(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x), \text{ pro } Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}.$$

Rádi bychom ukázali, že Π_1 je míra a že je σ -konečná. Potom bychom mohli použít větu 3.4.

Jednoduše odvodíme $\Pi_1(\emptyset) = 0$ a tedy Π_1 není identicky rovna ∞ . Nechť $Q_k \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, po dvou disjunktní, pak pomocí Leviho věty pro řady

$$\begin{aligned} \Pi_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) &= \int_X \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (Q_k)_x\right) d\mu(x) = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} \nu((Q_k)_x)\right) d\mu(x) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X (Q_k)_x d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_1(Q_k) \end{aligned}$$

Π_1 je tedy míra.

Dále pro měřitelný obdélník platí

$$\Pi_1(A \times B) = \int_X \nu((A \times B)_x) d\mu(x) = \int_X \chi_A(x) \nu(B) d\mu(x) = \nu(B) \int_X \chi_A(x) d\mu(x) = \nu(B) \cdot \mu(A).$$

Ze σ -konečnosti měr μ, ν víme, že $\exists X_k \nearrow X$, $Y_k \nearrow Y$: $\mu(X_k) < \infty$, $\nu(Y_k) < \infty$. Pak

$$X_k \times Y_k \nearrow X \times Y \text{ a } \Pi(X_k \times Y_k) = \mu(X_k) \cdot \nu(Y_k) < \infty$$

a tedy Π_1 je σ -konečná míra.

Obdobně dokážeme vše pro

$$\Pi_2(Q) = \int_Y \mu(Q^y) d\nu(y), \text{ pro } Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}.$$

Jelikož množina měřitelných obdélníků je uzavřená na průniky, máme dle věty 3.4, že $\Pi_1 = \Pi_2$ na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$. □

Poznámka. Pozor, neplatí $\mathcal{L}_{p+q} = \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$. Přesněji $\mathcal{L}_{p+q}$ je zúplnění míry $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$.

Věta 3.8 (Měřitelnost řezu funkce). *Nechť f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ -měřitelná na $X \times Y$. Potom pro každé $x \in X$ je f_x $\mathcal{T}$ -měřitelná a pro každé $y \in Y$ je f_y $\mathcal{S}$ -měřitelná.*

Důkaz. Nechť $x \in X$ pevné a $U \subset \mathbb{R}$ pevná otevřená. Chceme dle definice měřitelnosti ukázat, že $f_x^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Víme, že f je měřitelná a tedy

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} = \{[x, y] \in X \times Y; f(x, y) \in U\}.$$

Ukážeme, že $f_x^{-1}(U) = (f^{-1}(U))_x$.

$$f_x^{-1}(U) = \{y \in Y; f(x, y) = f_x(y) \in U\}$$

$$(f^{-1}(U))_x = \{y \in Y; f(x, y) = f_x(y) \in U\}.$$

Podle věty 3.5 platí

$$f^{-1} \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} \Rightarrow (f^{-1}(U))_x \in \mathcal{T}.$$

Tedy $f_x^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, což znamená, že f_x je měřitelná. $\square$

Věta 3.9 (Fubiniova věta). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou měřitelné prostory se σ -konečnou mírou. Nechť f je $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ -měřitelná funkce na $X \times Y$.*

(a) *Je-li $0 \leq f \leq \infty$, $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu$, $x \in X$ a $\psi(y) = \int_X f_y d\mu$, $y \in Y$, pak φ je $\mathcal{S}$ -měřitelná a ψ je $\mathcal{T}$ -měřitelná a platí*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu. \quad (1)$$

(b) *Je-li $\varphi^*(x) = \int_Y |f_x| d\nu$ a $\int_X \varphi^* d\mu < \infty$, potom $f \in L^1(\mu \times \nu)$. Obdobně pro $\psi^*(y) = \int_X |f_y| d\mu$.*

(c) *Nechť $f \in L^1(\mu \times \nu)$. Pak φ je definovaná pro μ skoro všechna x , ψ je definovaná pro ν skoro všechna y a platí (1).*

Důkaz. Dokážeme větu pro f_x a φ .

(a): Dle věty 3.8 víme, že funkce f_x je měřitelná a tedy $\int_Y f_x d\nu$ má smysl.

Nechť $A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, pro $f = \chi_A$ dle věty 3.7 platí

$$\int_{X \times Y} \chi_A d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(A) = \int_X \nu(A_x) d\mu = \int_X \int_Y \chi_A d\nu d\mu = \int_X \varphi_X d\mu.$$

Pro f charakteristickou funkci množiny tedy věta platí.

Nechť $A_i \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, po dvou disjunktí, pro $f = s(x, y) = \sum_{i=1} \alpha_i \chi_{A_i}(x, y)$, $\alpha_i > 0$, pak tedy platí

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} s(x, y) d(\mu \times \nu) &= \int_{X \times Y} \sum_{i=1} \alpha_i \chi_{A_i}(x, y) d(\mu \times \nu) = \sum_{i=1} \alpha_i \int_{X \times Y} \chi_{A_i}(x, y) d(\mu \times \nu) = \\ &= \sum_{i=1} \alpha_i \int_X \nu((A_i)_x) d\mu = \int_X \sum_{i=1} \alpha_i \nu((A_i)_x) d\mu = \int_X \int_Y s_x(x, y) d\nu d\mu = \int_X \varphi_s(x) d\mu. \end{aligned}$$

Věta tedy platí pro f jednoduchou.

Pro f obecnou měřitelnou $\exists s_k$ jednoduché, že $s_k \nearrow f$. Víme z Leviho věty

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_k d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu).$$

Jelikož $s_k \leq s_{k+1}$, můžeme opět použít Leviho větu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{s_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y (s_k)_x d\nu = \int_Y \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k)_x d\nu = \int_Y f_x d\nu = \varphi.$$

Z nerovnosti $s_k \leq s_{k+1}$ také vyplývá $\varphi_{s_k} \leq \varphi_{s_{k+1}}$ a tedy potřetí Levi

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_k d(\mu \times \nu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi_{s_k} d(\mu \times \nu) = \\ &= \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{s_k} d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi d\mu. \end{aligned}$$

Obdobně pro f^y a ψ .

(b): Použijeme (a) na funkci $|f|$

$$\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi^*(x) d\mu < \infty.$$

To znamená, že $f \in L^1(\mu \times \nu)$. Podobně pro $\psi^*(y) = \int_X |f^y| d\mu$.

(c): Máme $f = f^+ - f^-$, pak φ^+ odpovídá f^+ a φ^- odpovídá f^- . Pak (a) platí pro $(f^+ \text{ a } \varphi^+)$ a $(f^- \text{ a } \varphi^-)$. Pak

$$\int_X \varphi^+ d\mu = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) < \infty.$$

A tedy $\varphi^+ < \infty$, analogicky $\varphi^- < \infty$. A tedy i $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- < \infty$ skoro všude. Odečteme od sebe rovnost (1) pro f^+ a f^- a dostaneme (1) pro φ . Obdobně pro ψ . $\square$

Věta 3.10 (O součinu Borelovských množin v $\mathbb{R}^n$). *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, pak*

$$\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \times \mathcal{B}^q \subset \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q \subset \mathcal{B}_0^{p+q}$$

a $\mathcal{B}_0^{p+q}$ je zúplněním $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathcal{B}_0^p \times \mathcal{B}_0^q, \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q)$.

Poznámka. Z předchozí věty plyne, že $\mathcal{L}_{p+q}$ je zúplněním $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$.

3.4 Věta o substituci

Tvrzení. Nechť M je $n \times n$ matice. Potom existují ortonormální matice A, B a diagonální matice C , tak, že $M = ACB$.

Důsledek 3.2. *Nechť M je $n \times n$ regulární matice a mějme lineární zobrazení $\varphi(x) = Mx$. Pak pro každou otevřenou množinu O platí*

$$\mathcal{L}_n(\varphi(O)) = |\det M| \mathcal{L}_n(O).$$

Definice 3.6 (Jacobiho matice). Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^1$ zobrazení. Definujme **Jakobiho matici** zobrazení f jako

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

a **Jakobián** tohoto zobrazení jako $J_f(\mathbf{x}) = \det Df(\mathbf{x})$

Definice 3.7 (Difeomorfismus). Necht' $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^1$ zobrazení. Řekneme, že f je **difeomorfismus**, je-li toto zobrazení prosté a regulární, tedy $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

Věta 3.11 (Věta o substituci). Necht' $V \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus. Necht' $M \subset f(V)$ je měřitelná a $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná funkce, pak

$$\int_M g \, d\mathcal{L}_n = \int_{f^{-1}(M)} (g \circ f) |J_f| \, d\mathcal{L}_n,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Poznámka. Pro řešení úloh vícerozměrné integrace pomocí věty o substituci jsou často užitečné následující substituce

Polární souřadnice Položme $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, kde $r \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$. Tedy máme

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Pak $f \in \mathcal{C}^1$.

f je prosté, protože pokud $r_1 \cos \alpha_1 = r_2 \cos \alpha_2$, $r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha_2$, pak

$$r_1^2(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) = r_2^2(\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2) \Rightarrow r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_1 = r_2.$$

Dále jelikož $\alpha \in (0, 2\pi)$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

f je na, protože $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (pro výpočet úhlu je potřeba zohlednit v jakém kvadrantu bod leží).

Jakobián je roven

$$J_f = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r > 0.$$

Válcové souřadnice Položme $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, $z = h$, kde $r > 0$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $h \in \mathbb{R}$. Tedy máme

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \alpha, h) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha, h).$$

Pak $f \in \mathcal{C}^1$.

f je prosté, odvození obdobné jako v předchozím případě.

f je na, protože $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\alpha = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $h = z$ (pro výpočet úhlu je potřeba zohlednit v jakém kvadrantu bod leží).

Jakobián je roven

$$J_f = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0.$$

Sférické souřadnice Položme $x = r \cos \psi \cos \varphi$, $y = r \cos \psi \sin \varphi$, $z = r \sin \psi$, kde $r \in (0, \infty)$, $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Tedy máme

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \psi, \varphi) \mapsto (r \cos \psi \cos \varphi, r \cos \psi \sin \varphi, r \sin \psi).$$

Pak $f \in \mathcal{C}^1$.

f je prosté, odvození je opět podobné jako u polárních souřadnic (umocnění všech rovnic na druhou a sečtení dá $r_1 = r_2$ a dále je postup přímočarý).

f je na, protože $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\psi = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ (pro výpočet úhlu je potřeba zohlednit v jakém kvadrantu bod leží).

Jakobián je roven

$$J_f = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -r \sin \psi \cos \varphi & -r \cos \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi & -r \sin \psi \sin \varphi & r \cos \psi \cos \varphi \\ \sin \psi & r \cos \psi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cos \psi \neq 0.$$

4 Různé konvergence, rozklad měr a distribuční funkce

4.1 Prostory L^p a různé druhy konvergence

Definice 4.1 (prostor L^p). Necht' $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 \leq p < \infty$. Definujeme **prostor L^p** jako

$$L^p(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

kde

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definice 4.2 (Esenciální supremum a prostor L^∞). Necht' $g : X \rightarrow [0, \infty]$ je měřitelná. **Esenciální supremum g** definujeme jako

$$\text{esssup } g = \inf \{ \alpha; \mu(\{g > \alpha\}) = 0 \}$$

Prostor $L^\infty(X, \mu)$ definujeme jako

$$L^\infty(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; \|f\|_{L^\infty} = \text{esssup}|f| < \infty\}.$$

Poznámka. Z důkazu úplnosti L^p prostorů v analýze plyne, že pokud $f_k \xrightarrow{L^p} f$, $1 \leq p < \infty$, pak existuje podposloupnost f_{k_j} taková, že $f_{k_j}(x) \rightarrow f(x)$ pro skoro všechna $x \in X$.

Definice 4.3 (Konvergence podle míry). Necht' $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f_k **konvergují podle míry** μ k f , značíme $f_k \xrightarrow{\mu} f$, jestliže pro každé $\delta > 0$ platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X; |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}) = 0.$$

Věta 4.1 (Vztah konvergence v L^p a konvergence v míře). Necht' $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$. Necht' $1 \leq p < \infty$ a $f_k \xrightarrow{L^p} f$. Pak $f_k \xrightarrow{\mu} f$.

Důkaz. Necht' $\delta > 0$, podle Čebyševovi nerovnosti platí

$$\mu(\{x \in X; |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}) \leq \frac{1}{\delta^p} \int_X |f_k(x) - f(x)|^p d\mu = \frac{1}{\delta^p} \|f_k - f\|_{L^p}^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

A tedy i

$$\mu(\{x \in X; |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

□

Věta 4.2 (Vztah konvergence s.v. a konvergence v míře). Necht' $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mu(X) < \infty$.

(a) Necht' $f_k \rightarrow f$ μ -s.v., pak $f_k \xrightarrow{\mu} f$.

(b) Necht' $f_k \xrightarrow{\mu} f$, pak existuje vybraná podposloupnost f_{k_j} , která konverguje k f μ -s.v.

Důkaz. (a) Víme, že $\exists N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$ taková, že $f_k(x) \rightarrow f(x)$, pro $\forall x \in X \setminus N$. Necht' $\delta > 0$. Označme

$$A_n = \{x \in X; |f_k(x) - f(x)| < \delta, \forall k \geq n\}.$$

Zřejmě platí $A_n \subset A_{n+1}$, protože požadujeme čím dál tím méně.

Necht' $x \in X \setminus N$, pak z konvergence μ -s.v. dostáváme $\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n$ platí $|f_k(x) - f(x)| < \delta$ tj.

$x \in A_n$. Tedy $X \setminus N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, neboli $A_n \nearrow Y$, kde $X \setminus N \subset Y$.

Jelikož ale zároveň $Y \subset X$, pak nutně $\mu(Y) = \mu(X) < \infty$. Nyní z věty spojitosti míry $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\mu(A_{n_0}) > \mu(Y) - \varepsilon$$

Využijeme $\mu(Y) = \mu(X) < \infty$ a nerovnost upravíme

$$\mu(X) - \mu(A_{n_0}) = \mu(X \setminus A_{n_0}) < \varepsilon.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $\forall k \geq n_0$ platí

$$\mu(\{x \in X; |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}) \leq \mu(X \setminus A_{n_0}) < \varepsilon.$$

Z definice tedy platí

$$\mu(\{x \in X; |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

(b) Z konvergence v míře pro $\forall j \in \mathbb{N}, \exists k_j \in \mathbb{N}$, že

$$\mu(\{x \in X; |f_{k_j}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^j}\}) < \frac{1}{2^j}.$$

Označme

$$A_j = \{x \in X; |f_{k_j}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^j}\}.$$

Pak platí $\mu(A_j) \leq \frac{1}{2^j}$. Položme

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \right).$$

Pak pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \mu(A_j) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

A tedy nutně $\mu(A) = 0$.

Dále platí

$$X \setminus A = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \right) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=n}^{\infty} X \setminus A_j \right).$$

Pokud tedy $x \in X \setminus A$, pak $\exists n \in \mathbb{N}$, že $x \in \bigcap_{j=n}^{\infty} (X \setminus A_j)$ a tedy $\forall j \geq n$ platí $x \in X \setminus A_j$.

Tedy pro $x \in X \setminus A, \exists n \in \mathbb{N}, \forall j \geq n$ platí

$$|f_{k_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^j}$$

a jelikož $\mu(A) = 0$, pak to přesně znamená

$$f_{k_j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \quad \mu - \text{s.v.}$$

□

Poznámka. Abychom mohli doplnit vztahy mezi námi známými druhy konverencí, uvedeme pár protipříkladů, které některé implikace vyvrací.

- Pro tzv. klouzající hrbol platí: (f je nulová funkce) $f_k \xrightarrow{L^p} f$, $f_k \xrightarrow{\mu} f$, $f_k \not\xrightarrow{\mu} f$ μ -s.v.
- Pro funkce $f_k(x) = \frac{1}{kx}$, $x \in (0, 1)$ platí: (f je nulová funkce) $f_k \not\xrightarrow{L^p} f$, $f_k \xrightarrow{\mu} f$, $f_k \rightarrow f$ μ -s.v.

4.2 Radon-Nikodýmova věta

Definice 4.4 (Absolutně spojitá a singulární míra). Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že ν je **absolutně spojitá** vzhledem k μ , značíme $\nu \ll \mu$, jestliže

$$\text{pro všechny } A \in \mathcal{A} \text{ platí } \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Řekneme, že ν je **singulární** vzhledem k μ , značíme $\mu \perp \nu$, jestliže

$$\text{existuje } S \in \mathcal{A} \text{ tak, že } \mu(S) = 0 \text{ a } \nu(X \setminus S) = 0.$$

Definice 4.5 (Znaménková míra). Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty]$. Pak μ nazveme **znaménkovou mírou**, jestliže

$$(i) \quad \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \quad \mu \text{ je } \sigma\text{-aditivní; pro } A_k \in \mathcal{A} \text{ po dvou disjunktní platí } \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Věta 4.3 (Hahnův rozklad). Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a μ je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$. Potom existuje tzv. Hahnův rozklad, tedy existuje $P \in \mathcal{A}$ tak, že pro každou $A \in \mathcal{A}$ platí

$$\mu(A \cap P) \geq 0 \text{ a } \mu(A \cap (X \setminus P)) \leq 0.$$

Věta 4.4 (Radon-Nikodýmova věta). Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

$$(i) \quad \nu \ll \mu.$$

$$(ii) \quad \text{existuje } f \in L^1(X, \mu), f \geq 0 \text{ tak, že } \nu(A) = \int_A f \, d\mu \text{ pro všechny } A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz. **(ii) $\Rightarrow$ (i)**: Triviální.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Položme $\mathcal{M} = \{g \geq 0; g \text{ měřitelná, } \forall A \in \mathcal{A} \text{ platí } \int_A g \, d\mu \leq \nu(A)\}$. Pak víme, že

- $\mathcal{M} \neq \emptyset$, protože $g \equiv 0, g \in \mathcal{M}$.
- $\mathcal{M}$ je uzavřená na operaci maxima, tj. jestliže $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$, pak $\max\{g_1, g_2\} \in \mathcal{M}$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, označme $A_1 = \{x \in A; g_1(x) \geq g_2(x)\}$, pak

$$\int_A \max\{g_1, g_2\} \, d\mu = \int_{A_1} g_1 \, d\mu + \int_{A \setminus A_1} g_2 \, d\mu \leq \nu(A_1) + \nu(A \setminus A_1) = \nu(A).$$

- Existuje posloupnost $\{g_k\} \subset \mathcal{M}$, že

$$\int_X g_k \, d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sup\left\{\int_X g \, d\mu; g \in \mathcal{M}\right\}.$$

To plyne z definice suprema.

Nyní položme $f_k = \max\{g_1, \dots, g_k\}$, pak $f_k \in \mathcal{M}$ a $f_k \geq g_k$, z čehož plyne

$$\int_X f_k \, d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sup\left\{\int_X g \, d\mu; g \in \mathcal{M}\right\}.$$

Zároveň víme, že $f_{k+1} \geq f_k$ a tedy $\exists f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Z Leviho věty pak plyne

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\mu = \sup\left\{\int_X g \, d\mu; g \in \mathcal{M}\right\}.$$

Dále jelikož $\forall A \in \mathcal{A}$ platí $\int_A f_k d\mu \leq \nu(A)$, pak i

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_A f d\mu \leq \nu(A)$$

tedy $f \in \mathcal{M}$. Položme $\lambda_0(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu$, což je nezáporná míra. Chceme ukázat $\lambda_0 \equiv 0$, pro spor předpokládejme, že $\exists \varepsilon > 0$, že $\lambda_0(X) > \varepsilon \mu(X)$. Máme tedy míru $\lambda_0 - \varepsilon \mu$, která může být potenciálně znaménková. Nalezneme tedy její Hahnův rozklad, tj. $P \in \mathcal{A}$, že pro $\forall A \in \mathcal{A}$ platí

$$(\lambda_0 - \varepsilon \mu)(A \cap P) \geq 0 \text{ a } (\lambda_0 - \varepsilon \mu)(A \cap (X \setminus P)) \leq 0.$$

Dokážeme, že $\mu(P) > 0$. Pro spor nechť $\mu(P) = 0$ pak z absolutní spojitosti také $\nu(P) = 0$, z čehož nutně plyne $\lambda_0(P) = 0$. Pak ale z Hahnova rozkladu po dosažení X

$$\underbrace{(\lambda_0 - \varepsilon \mu)(P)}_{=0} + \underbrace{(\lambda_0 - \varepsilon \mu)(X \setminus P)}_{\leq 0} = \lambda_0(X) - \varepsilon \mu(X) > 0$$

což je spor, platí tedy $\mu(P) > 0$.

Víme tedy, že $\forall A \in \mathcal{A}$ platí $\lambda_0(A \cap P) \geq \varepsilon \mu(A \cap P)$

$$\nu(A) = \lambda_0(A) + \int_A f d\mu \geq \lambda_0(A \cap P) + \int_A f d\mu \geq \varepsilon \mu(A \cap P) + \int_A f d\mu = \int_A \varepsilon \chi_P d\mu + \int_A f d\mu = \int_A (f + \varepsilon \chi_P) d\mu.$$

Tedy $f + \varepsilon \chi_P \in \mathcal{M}$ a

$$\int_X f + \varepsilon \chi_P d\mu = \int_X f d\mu + \int_X \varepsilon \chi_P d\mu = \int_X f d\mu + \underbrace{\varepsilon \mu(P)}_{>0} > \int_X f d\mu.$$

Což je ovšem spor s tím, že v f se nabývalo suprema. Tedy $\nu(A) = \int_A f d\mu$. □

Věta 4.5 (Lebesgueův rozklad). *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor, μ je míra a ν je σ -konečná míra na $(X, \mathcal{A})$. Potom existuje jednoznačný rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ tak, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$.*

Důkaz. Existence: Nejprve předpokládejme, že $\nu(X) < \infty$. Označme $\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{A}; \mu(B) = 0\}$. Pak z definice suprema existují $B_j \in \mathcal{M}$ tak, že

$$\nu(B_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \sup\{\nu(B); B \in \mathcal{M}\} < \infty.$$

Označme $B \in \mathcal{A}$ takovou, že $\nu(B) = \sup\{\nu(E); E \in \mathcal{M}\}$. Pak $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{M}$. Pro libovolné $A \in \mathcal{A}$ položme

$$\nu_s(A) = \nu(A \cap B) \text{ a } \nu_a(A) = \nu(A \cap (X \setminus B)) = \nu(A \setminus B).$$

Zřejmě platí $\nu = \nu_s + \nu_a$.

Pro B platí $\mu(B) = 0$ a také

$$\nu(X \setminus B) = \nu((X \setminus B) \cap B) = \nu(\emptyset) = 0$$

a tedy $\nu_s \perp \mu$.

Nyní chceme ukázat, že pokud $A \in \mathcal{M}$ pak $\nu_a(A) = 0$. Sporem nechť tedy $\exists C \in \mathcal{M}$, že $\nu_a(C) = \nu(C \setminus B) > 0$. Pak $A \cup B \in \mathcal{M}$, ale také

$$\nu(A \cup B) = \nu(A \setminus B) + \nu(B) > \nu(B).$$

Což je spor s tím, že v B se nabývalo suprema. Platí tedy $\nu_a(A) = 0$.

Nechť nyní $\nu(X) = \infty$, pak ν je σ -konečná míra a tedy $\exists X_j$, že $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ a $\nu(X_j) < \infty$. Položme $Y_k = X_k \setminus X_{k-1}$. Pak $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$. Na každém prostoru Y_k najdeme rozklad $\nu^k = \nu_a^k + \nu_s^k$. Pak pro $A \in \mathcal{A}$ položme $\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k(A \cap Y_k)$. Pak $\nu_a = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_a^k$ a $\nu_s = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_s^k$ je hledaný rozklad.

Jednoznačnost: Nechť $\nu = \nu_s + \nu_a = \nu'_s + \nu'_a$. Pak existují $B, B' \in \mathcal{A}$, že

$$\mu(B) = 0, \nu_s(X \setminus B) = 0 \text{ a } \mu(B') = 0, \nu'_s(X \setminus B') = 0.$$

Nechť $A \in \mathcal{A}$, označme $C = A \cap (B \cup B')$ a $D = A \setminus (B \cup B')$. Víme, že

$$\mu(C) \leq \mu(B) + \mu(B') = 0.$$

Z absolutní spojitosti pak platí $\nu_a(C) = 0$, $\nu'_a(C) = 0$. Pak

$$\nu(C) = \nu_s(C) + \underbrace{\nu_a(C)}_{=0} = \nu'_s(C) + \underbrace{\nu'_a(C)}_{=0} \Rightarrow \nu_s(C) = \nu'_s(C)$$

Dále $\nu_s(D) = \nu'_s(D)$, neboť $D \subset X \setminus (B \cup B')$ a platí $\nu_s(X \setminus B) = 0$, $\nu'_s(X \setminus B') = 0$. Z toho odvodíme

$$\nu(D) = \underbrace{\nu_s(D)}_{=0} + \nu_a(D) = \underbrace{\nu'_s(D)}_{=0} + \nu'_a(D) \Rightarrow \nu_a(D) = \nu'_a(D).$$

Dohromady

$$\nu_a(A) = \nu_a(C) + \nu_a(D) = \nu'_a(C) + \nu'_a(D) = \nu'_a(A).$$

$$\nu_s(A) = \nu_s(C) + \nu_s(D) = \nu'_s(C) + \nu'_s(D) = \nu'_s(A).$$

Rozklad je tedy jednoznačný. □

4.3 Distribuční funkce

Definice 4.6 (Distribuční funkce). Řekneme, že $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **distribuční funkce**, je-li neklesající, zprava spojitá (tj. pro $x_n \searrow x$ platí $F(x_n) \rightarrow F(x)$), $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} F = 1$.

Definice 4.7 (Borelovská míra). Řekneme, že míra μ definovaná na měřitelném prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ je borelovská, pokud $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.

Věta 4.6 (Existence distribuční funkce). Nechť μ je borelovská pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a definujeme $F(x) = \mu((-\infty, x])$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom F je distribuční funkce.

Důkaz. Postupně dokážeme všechny definiční vlastnosti distribuční funkce.

Nechť $x < y$, pak

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y).$$

F je tedy neklesající.

Nechť x_n je posloupnost v $\mathbb{R}$ taková, že $x_n \searrow x$. Pak $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]$. Tedy ze spojitosti míry

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, x_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n).$$

F je tedy zprava spojitá.

Zřejmě platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n] = \mathbb{R}$ a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, n]) = \mu(\mathbb{R}) = 1.$$

Navíc F je neklesající a tedy existuje $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. Nutně tedy z Heineho věty $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Obdobně $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n] = \emptyset$ a tedy $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \mu(\emptyset) = 0$. □

Věta 4.7 (Charakterizace distribuční funkce). *Nechť F je distribuční funkce. Potom existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tak, že $F(x) = \mu((-\infty, x])$ pro $x \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Jednoznačnost: Mějme míry μ_1, μ_2 splňující vztah ve znění. Mějme interval $(a, b] \subset \mathbb{R}$, pak

$$\mu_1((a, b]) = \mu_1((-\infty, b]) - \mu_1((-\infty, a]) = F(b) - F(a) = \mu_2((-\infty, b]) - \mu_2((-\infty, a]) = \mu_2((a, b]).$$

Označme $\mathcal{S} = \{(a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$, pak $\mathcal{S}$ je uzavřený na průniky a míry μ_1, μ_2 jsou konečné, speciálně tedy σ -konečné. Dle věty o jednoznačnosti míry tedy platí $\mu_1 = \mu_2$ na $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Existence: Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme zobrazení

$$\phi(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pokud } F \text{ spojitá v } x \\ [F(x-), F(x+)] & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme $S = \{y \in [0, 1]; F^{-1}(y) \text{ má více jak jeden bod}\}$. Pak S je nejvýše spočetná, protože každý interval, kde je F lokálně konstantní, obsahuje racionální číslo. Sestrojíme tedy zobrazení z těchto racionálních bodů do příslušných intervalů a je to. Pro $E \subset \mathbb{R}$ definujeme $\phi(E) = \bigcup_{x \in E} \phi(x)$. Chceme definovat $\mu(E) = \mathcal{L}^1(\phi(E))$ pro $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nejdříve ale musíme ověřit, že $\phi(E)$ je měřitelná množina.

Označme $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R}; \phi(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Chceme $\mathcal{A}$ ukázat, že $\mathcal{A}$ je σ -algebra a obsahuje intervaly. Zřejmě pro interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $\phi(I) = \tilde{I} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tedy $\mathcal{A}$ obsahuje intervaly.

Nyní ověříme vlastnosti σ -algebry

(i) Zřejmě $\phi(\mathbb{R}) \in \{[0, 1], (0, 1), [0, 1), (0, 1]\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tedy $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(ii) Nechť $E \in \mathcal{A}$, pak

$$\phi(\mathbb{R} \setminus E) = \underbrace{(\phi(\mathbb{R}) \setminus \phi(E))}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cup S_1, \text{ kde } S_1 \subset S.$$

Mohlo by se totiž stát, že E jen částečně leží v nějakém intervalu lokální konstantnosti, pak bychom o onu konstantní hodnotu přišli. Každopádně to nevadí, protože $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dohromady tedy $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{A}$.

(iii) Nechť $E_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, pak

$$\phi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\phi(E_j)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tedy $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.

Můžeme tedy s klidem v duši definovat $\mu(E) = \mathcal{L}^1(\phi(E))$ pro $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nyní dokážeme, že μ je míra. Jistě $\mu(\emptyset) = 0$ a tedy není identicky rovna ∞ . Nechť $E_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ po dvou disjunktní, pak pro $j \neq k$ platí

$$\phi(E_j) \cap \phi(E_k) \subset S.$$

Tedy jsou disjunktní až na spočetnou množinu, která má ovšem nulovou Lebesgueovu míru. Pak ale i spočetné sjednocení takovýchto množin má nulovou Lebesgueovu míru. Platí tedy

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mathcal{L}^1\left(\phi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \phi(E_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(\phi(E_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Nyní ukážeme, že μ je pravděpodobnostní a skutečně splňuje požadovaný vztah. Jelikož $\phi(\mathbb{R}) \in \{[0, 1], (0, 1), [0, 1), (0, 1]\}$, platí $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Dále pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\phi((-\infty, x]) \in \{[0, F(x)], (0, F(x)), [0, F(x)), (0, F(x)]\}$ a tedy

$$\mu((-\infty, x]) = \mathcal{L}^1(\phi((-\infty, x])) = F(x).$$

□

Poznámka. Nechť F je distribuční funkce. Pak existují neklesající funkce F_a , F_C , F_J , tak, že

$$F = F_a + F_C + F_J$$

s následujícími vlastnostmi. Funkce skoků lze napsat jako

$$F_J(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{[b_j, \infty)}.$$

Pro Cantorovskou část platí $F'_C(x) = 0$ pro $\mathcal{L}^1$ s.v. $x \in \mathbb{R}$ a pro absolutně spojitou část existuje $f \in L^1(\mathbb{R})$ tak, že

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^x f(y) \, dy.$$