1. cvičení

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$1.\ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}},\quad 2.\ \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}dx,\quad 3.\ \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^\alpha}dx$$

$$5.\ \int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}dx \text{ (i absolutní konvergenci)},\quad 6.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\tan^\alpha x\, dx \quad .$$

Nalezněte objemy

4. jednotkové koule, 7. anuloidu.

Výsledky a návody:

1. Konverguje ; U ∞ limitně srovnáme s $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje; U 1 víme $\lim_{t\to 0}\frac{\log x}{1-x}=1$, a proto limitně srovnáme s 1.

U 0 srovnáme s $\log x$ a $\int_0^1 |\log x| < \infty$ zjistíme z per partes.

3. Konverguje pro $\alpha \in (2,4)$; U 0 limitně srovnáme s $\frac{x^3}{x^\alpha}$.

U ∞ (nelimitně) srovnáme s $\frac{x+1}{x^\alpha}$.

5. Konverguje neabsolutně. Z Abel-Dirichleta víme, že $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ konverguje a

$\int_0^\infty \Big(\frac{x\sin x}{1+x^2} - \frac{\sin x}{x}\Big)dx = \int_0^\infty \frac{-\sin x}{(1+x^2)x}\,dx$ snadno konverguje - u ∞ srovnej s $\frac{1}{x^3}$.

Absolutně diverguje: $\int_0^\infty \frac{x|\sin x|}{1+x^2}dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{3}{4}\pi+k\pi} \geq \sum_{k=1}^\infty \frac{\pi}{2}\frac{(\frac{\pi}{4}+k\pi)|\frac{1}{2}|}{1+(\frac{3}{4}\pi+k\pi)^2} = \infty$.

6. Konverguje pro $\alpha \in (-3,1)$; U 0 limitně srovnáme s $(1-\cos x)x^\alpha \sim x^{2+\alpha}$.

U $\frac{\pi}{2}$ se chová jako $\frac{\log(\cos x)}{\cos^\alpha x}$. Vzhledem k $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=1$

je tato funkce stejně integrovatelná, jako funkce $\frac{\log y}{y^\alpha}$ u 0, tedy pro $\alpha < 1$.

4. $\frac{4}{3}\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ okolo osy x.

Objem je tedy $V = \pi\int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^2\,dx = \frac{4}{3}\pi$.

7. $4\pi^2$; Uvažujme anuloid vzniklý rotací kruhu $\{[x,y] : x^2+(y-2)^2 \leq 1\}$ okolo osy x.
Anuloid vznikne jako rozdíl tělesa vzniklého rotací $y_1 = 2+\sqrt{1-x^2}$ a tělesa $y_2 = 2-\sqrt{1-x^2}$.

$$V = \pi\int_{-1}^1 \left[(2+\sqrt{1-x^2})^2 - (2-\sqrt{1-x^2})^2\right]dx = 16\pi\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\ .$$

2. cvičení

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$1.\ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}dx,\quad 2.\ \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}dx,\quad 3.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Big(\frac{1}{\sin x}\Big)dx$$

$$6.\ \int_0^\infty \sin\Big(\sqrt{x^{2\alpha}+1}-x^\alpha\Big)dx,\quad 8.\ \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(1/x)}\,dx,\quad 9.\ \int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha dx.$$

4. Nalezněte obsah povrchu jednotkové koule v$\mathbf{R}^3$.

5. Nalezněte obsah plochy mezi grafy funkcí $\dfrac{x^2}{2}$ a $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Pomocí Riemanova integrálu spočtěte

$$7. \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}, \ p > 1 \ .$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje; U 0 srovnej s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a u ∞ srovnej s $\dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje pro $\alpha > 0$; Pro $\alpha > 0$ na $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$ srovnej s $e^{-\alpha|x|}$ nebo limitně srovnej s $\dfrac{1}{x^2}$. Pro $\alpha \le 0$ srovnej s 1. Na $[-1, 1]$ je funkce spojitá .

3. Konverguje; Srovnávací kritérium a $|f(x)| \le 1$.

4.$S = 4\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, kolem osy x.

Tedy $S = 2\pi \displaystyle\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)^2} = 2\pi \int_{-1}^1 1\,dx.$

5.$S = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$; Z rovnice $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{1+x^2}$ dostaneme $x = \pm 1$.

$$S = \int_{-1}^1 \Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\Big)\,dx = \Big[\arctan x - \frac{x^3}{6}\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

6. Konverguje pro $\alpha > 1$; U ∞ limitně srovnáme se $\sin\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}\Big) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$. pro $\alpha > 0$ a pro $\alpha \le 0$ u ∞ limitně srovnáme s 1. To konverguje pro $\alpha > 1$ a pro $\alpha > 1$ je funkce u 0 spojitá.

7. $\dfrac{1}{p+1}$; $\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{n}\Big(\big(\dfrac{1}{n}\big)^p + \big(\dfrac{2}{n}\big)^p + \ldots + \big(\dfrac{n}{n}\big)^p\Big) =$

Toto je Riemannovský součet funkce x^p, a tedy $\lim = \displaystyle\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$.

8. Konverguje pro $\alpha < \dfrac{3}{2}$; U 0 se chová jako $\dfrac{1}{\log^\alpha(1/x)}$, a tedy limitním srovnáním s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje. U 1 limitně srovnáme s $\dfrac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$.

9. Konverguje pro $\alpha > 1$; U 0 spojitá. U ∞ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^\alpha}$, neboť pomocí l'Hospitala zjistíme $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} = 2.$

3. cvičení

NA 5. CVICENI BUDE PISEMKA!

Nalezněte $\lim_{n\to\infty}$ z následujících integrálů:

$$1. \int_0^1 x^n, \ 2. \int_0^{100} \frac{e^{x^3}}{1+nx}, \ 3. \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}, \ 4. \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x}\cos x,$$

$$6. \int_0^1 nx^{15}\sin\left(\frac{x^2}{n}\right), \ 7. \int_0^\infty e^{-x^n}, \ 8. \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}}.$$

Spočtěte (za pomoci Heineho věty)

$$5.\ \lim_{a\to\infty} F(a) \text{ a } \lim_{a\to 0+} F(a) \text{ pro } F(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x}\,dx\ .$$

Návody:

$$1.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } 0\le x^n\le x \text{ nebo z Leviho.}$$

$$2.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } 0\le f_n\le \frac{e^{x^3}}{1+x} \text{ nebo z Leviho.}$$

$$3.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } 0\le f_n\le \frac{1}{2}.$$

$$4.\ 0;\ \text{Z Lebesgueovy věty a } |f_n|\le e^{-x}\frac{x+n}{n}\le e^{-x}(x+1).$$

$$5.\ 0 \text{ a } \infty;\quad \text{Pro } a_n\to\infty \text{ a } a_n\ge 1 \text{ platí } \frac{e^{-a_nx^2}}{1+x}\le e^{-x^2} \text{ což je integrovatelné.}$$

Z Lebesgue a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-a_nx^2}}{1+x}=\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-a_nx^2}}{1+x}=0$, a tedy podle Heineho $\displaystyle\lim_{a\to\infty}F(a)=0.$

Zřejmě $e^{-ax^2}\ge\frac{1}{e}$ pro $x\le\frac{1}{\sqrt{a}}$. Tedy $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x}\ge\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\frac{1}{e(1+x)}=\frac{1}{e}\log\Big(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\Big)\overset{a\to 0+}{\to}\infty.$

6. $\frac{1}{18}$; Bodová limita je $x^{17}\frac{\sin\frac{x^2}{n}}{\frac{x^2}{n}}\to x^{17}$. Z Lebesgueovy věty a $|f_n|\le nx^{15}\frac{x^2}{n}=x^{17}$.

7. 1; Z Lebesgueovy věty a $f_n\le 1$ na $(0,1)$ a $f_n\le e^{-x}$ na $(1,\infty)$, nebo z Leviho.

8. 1; Bodová limita je $\frac{1}{e^x\cdot 1}$ a $\int_0^\infty e^{-x}=1$. Z Lebesgueovy věty a

$$f_n\le\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ na } (0,1) \text{ a } f_n\le\frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n}\le\frac{1}{1+\frac{x}{n}n+\frac{x^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}}\le\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \text{ na } (1,\infty).$$

4. cvičení

Vyjádřete následující integrály jako součet řady:

$$1.\ \int_0^1\frac{\log(1-x)}{x},\ 2.\ \int_0^\infty\frac{x}{e^x+1}\,dx,\ 3.\ \int_0^1\frac{x^p\ \log(x)}{1+x^2}\,dx\ \text{ pro } p>0,$$

$$4.\ \int_0^\infty\log\Big(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\Big)\,dx,\ 5.\ \int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx\ (\text{pro } p,q>0),\ 6.\ \int_0^\infty e^{-x}\cos(\sqrt{x})\,dx.$$

Návody:

$$1.\ \sum_{n=1}^\infty\frac{-1}{n^2};\ \text{Rozvineme do } \sum_{n=1}^\infty\frac{-x^{n+1}}{n}.\ \text{Podle Leviho na } \sum_{n=1}^\infty -f_n.$$

$$2.\ \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(n+1)^2};\ \text{Rozvineme do } \sum_{n=0}^\infty(-1)^n xe^{-(n+1)x}.$$

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=0}^\infty\int|f_n|=\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty xe^{-(n+1)x}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(n+1)^2}<\infty.$$

$$3.\ \sum_0^\infty(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+p+1)^2};\text{Rozvineme do } \sum_{n=0}^\infty x^p\log(x)(-1)^nx^{2n}$$

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=0}^\infty\int|f_n|=\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty x^p(-1)\log(x)x^{2n}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n+p+1)^2}<\infty\ .$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{n^2}$; Rozvineme jako $\log(1-e^{-x})-\log(1+e^{-x})=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-e^{-nx}}{n}+\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=1}^{\infty}\int|f_n|\le\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}2\frac{e^{-nx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}<\infty.$$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+qn}$; Zřejmě $\le x^{p-1}$, a tedy integrál konverguje.

Rozvineme do $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{p+qn-1}$. Podle Lebesgueovy věty pro funkce $F_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}f_n$

$$|\sum_{n=0}^{N}f_n|=|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{p+qn-1}|=x^{p-1}\frac{1-(-x)^{Nq+1}}{1+x^q}\le x^{p-1}\frac{2}{1+x^q}\in L^1(0,1).$$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$; Rozvineme do $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$.

$$\text{Podle Lebesgua } \sum_{n=0}^{\infty}\int|f_n|=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

$$\text{Indukcí snadno } \int_0^{\infty}x^n e^{-x}=(n)!\text{ a }\sum\frac{n!}{(2n)!}<\infty.$$

6. cvičení

U následujících integrálů vyšetřete pro jaká α konvergují a vyšetřete spojitost na definičním oboru:

$$1.\ \int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{1+x^2},\ 2.\ \int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}}{1+x},\ 3.\ \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\text{ a nalezněte i }\lim_{\alpha\to\infty}\text{ a }\lim_{\alpha\to 0},$$

$$4.\ \int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^{\alpha}},\ 5.\ \int_0^{\infty}\frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x}\text{ a nalezněte i }\lim_{\alpha\to 0+},\ 6.\ \int_0^1\frac{1-x^{\alpha}}{\log x}.$$

Návody:

$$1.\text{ spojitá na }\mathbf{R};\ |f(x,\alpha)|\le\frac{1}{1+x^2}\in L^1.$$

$$2.\text{ spojitá na }(0,\infty);\text{ Pro }\alpha\in[\delta,\infty)\text{ je }|f(x,\alpha)|\le e^{-\delta x^2}\in L^1.$$

$$3.\text{ spojitá na }(-\infty,0)\cup(0,\infty);\text{ Pro }|\alpha|>\delta\text{ je }|f(x,\alpha)|\le\frac{1}{\sqrt{\delta^2}}=\frac{1}{\delta}\in L^1.$$

Pro $\alpha\in[1,\infty)$ je 1 integrovatelná majoranta a podle Lebesguea a Heineho je

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=\int_0^1\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=\int_0^1 0=0.$$

$$\text{Pro }|\alpha|\le\delta\text{ je }\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\ge\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+\delta^2}}\ge\int_{\delta}^1\frac{1}{\sqrt{2}x}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\log\delta\overset{\delta\to 0+}{\to}\infty.$$

$$4.\text{ spojitá na }(2,\infty);\text{ Pro }\alpha\in[2+\delta,\infty)\text{ je }|f(x,\alpha)|\le\begin{cases}\frac{x}{1+x^{2+\delta}} & \text{pro }x>1\\ 1 & \text{pro }x<1.\end{cases}$$

$$5.\text{ spojitá na }[0,\infty);\text{ Pro }\alpha\in[\delta,K]\text{ je }|f(x,\alpha)|\le\frac{Ke^{-\delta x^2}}{1+x}\le Ke^{-\delta x^2}\in L^1.$$

Pro spojitost v 0 zprava musíme spočítat $\lim_{\alpha\to 0+}F(\alpha)$. Substitucí $y=\sqrt{a}x$

$$\text{odhadneme }\int_0^{\infty}\frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x}\le\int_0^{\infty}\alpha e^{-\alpha x^2}=\int_0^{\infty}\sqrt{\alpha}e^{-y^2}=\sqrt{\alpha}\int_0^{\infty}e^{-y^2}\overset{\alpha\to 0+}{\to}0.$$

6. spojitá na $(-1,\infty)$; V 1 lze spojitě dodefinovat a u 0 standartně srovnáme s $\dfrac{x^\alpha}{\log x}$.

Pro $\delta<1$ a $\alpha\in[-1+\delta,0]$ máme $|f(x,\alpha)|\le \dfrac{x^{-1+\delta}-1}{|\log x|}$ a pro $\alpha\in[0,K]$ je $|f(x,\alpha)|\le\dfrac{1-x^K}{|\log x|}$.

7. cvičení

Spočtěte následující integrály (pomocí věty o záměně derivace a integrálu). Obor konvergence je u každého příkladu napsán.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}$, $a>-1$; 2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}$, $a,b>0$ (Rada: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}$, $a,b>0$ nebo $a,b<0$; 4. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}$, $k>0$, $a\in\mathbf{R}$;

$$5.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x),\ a,b>0.$$

Návody:

$$1. \frac{\ln(a+1)}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right| = \left|xe^{-(a+1)x^2}\right| \le xe^{-\delta x^2} \text{ pro } a\in(-1+\delta,\infty).$$

$$2. \sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|-e^{-ax^2}\right| \le e^{-\delta x^2} \text{ pro } a\in(\delta,\infty).$$

$$\int_0^\infty -e^{-ax^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow F(a,b)=C(b)-\sqrt{\pi a} \text{ a } F(b,b)=0.$$

$$3. \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{1}{1+a^2x^2}\right| \le \frac{1}{1+\delta^2x^2} \text{ pro } |a|\ge\delta.$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}=\frac{\pi}{2a} \text{ a } F(b,b)=0.$$

$$4.\ \arctan\frac{a}{k};\ \left|\frac{\partial f(x,a,k)}{\partial a}\right| = \left|e^{-kx}\cos ax\right| \le e^{-kx} \text{ pro } a\in\mathbf{R}.$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos ax = \left[e^{-kx}\frac{a\sin ax-k\cos ax}{a^2+k^2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{k}{a^2+k^2} \text{ a } F(0,k)=0.$$

$$5.\ \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{2}{a}\frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2 x}\right| \le \frac{2}{\delta} \text{ pro } |a|>\delta$$

$$\text{Substitucí } \tan x=t \text{ spočteme } \frac{\partial F(a,b)}{\partial a}=\frac{\pi}{a+b}.$$

8. cvičení

Za pomoci Fubiniovy věty ve dvou dimenzích spočtěte

$$3.\ \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx \text{ pro } a,b>-1,\ 5.\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx \text{ pro } a,b>0.$$

Nalezněte míru následujích podmnožin $\mathbf{R}^2$

$$1.\ \{x^2<y<x+2\},\ 2.\ \left\{y\le x,\ 0<y<\frac{1}{x^2}\right\}.$$

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

4. $\displaystyle\int_M (x^2+y^2)\,dxdy$ pro $M=\{|x|+|y|\le 1\}$, 6. $\displaystyle\int_M e^{-(x+y)}dxdy$ pro $M=\{0\le x\le y\}$,

$$7.\ \int_M \frac{x^2}{y^2}\,dxdy \text{ pro } M \text{ omezenou mezi křivkami } x=2,\ y=x \text{ a } xy=1,$$

$$8. \int_M (\sqrt{x}+y)\; dxdy \text{ pro } M=\{x^2+y^2\le x\}$$

Návody:

$$1. \frac{9}{2};\ \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} 1\; dy\; dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\; dx.$$

$$2. \frac{3}{2};\ \int_0^1\int_0^x 1\; dy\; dx + \int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{x^2}} 1\; dy\; dx = \int_0^1 x\; dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\; dx$$

$$3. \log\frac{b+1}{a+1};\ \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x} = \int\int_M x^y = \int_a^b \frac{1}{y+1} = \log\frac{b+1}{a+1}.$$

$$4. \frac{2}{3};\ 4\int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\; dy\; dx = 4\int_0^1\Big((1-x)x^2+\frac{(1-x)^3}{3}\Big)\; dx$$

$$5. \sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a};\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} = \int\int_M e^{-yx^2} = \int_a^b \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} = \sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a}.$$

$$6. \frac{1}{2};\ \int_0^\infty\int_0^y e^{-(x+y)}\; dx\; dy = \int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-y})\; dy$$

$$7. 2\frac{1}{4};\ \int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\; dy\; dx = \int_1^2 x^2\Big(x-\frac{1}{x}\Big)\; dx$$

$$8. \frac{8}{15};\ \int_0^1\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}(\sqrt{x}+y)\; dy\; dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2} = 2\int_0^1 (1-z)\sqrt{z}\; dz$$

9. cvičení

Na 11. cvičení bude zápočtová písemka

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

1. $\int_M \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\; dxdy$ pro $M=\{x^2+y^2\le 1\}$, 2. $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\; dxdy$ pro $M=\{x^2+y^2\le x\}$.

Nalezněte míru následujích množin $M\subset \mathbf{R}^2$

3. $\{(x+y)^3<xy,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$, 4. $\{x^3+y^3<xy,\ x>0,\ y>0\}$, 5. $\{2\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\le 1\}$,

6. $\{1<xy<2, y<x<3y\}$, 7. $\{y<x^2<4y,\ 2x<y^2<3x\}$.

Návody:

1. 2π; Polární souřadnice a $\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\frac{r\; d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\Big)\; dr$

2. 2; Polární souřadnice a $0\le x^2+y^2\le x$ dá $0\le r\le\cos\varphi$. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\cos\varphi}\frac{r\; dr}{\sqrt{r^2}}\Big)\; d\varphi.$

3. $\frac{1}{60}$; Transformace $x=r\cos^2\varphi$ a $y=r\sin^2\varphi$

transformuje M na $0\le r\le \sin^2\varphi\cos^2\varphi$ a $J_f=2r\sin\varphi\cos\varphi$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} 2r\sin\varphi\cos\varphi\; dr\Big)\; d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos^5\varphi\; d\varphi$$

4. $\frac{1}{6}$; Transformace $x=r\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$ a $y=r\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$

transformuje M na $0\le r\le\sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$ a $J_f=\frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi}\frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\; dr\Big)\; d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\; d\varphi$$

5. $\frac{1}{6}$; Transformace $x = \frac{1}{4} r\cos^4\varphi$ a $y = r\sin^4\varphi$

transformuje $M \cap \{x > 0,\ y > 0\}$ na $0 \le r \le 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ a tam $J_f = r\sin^3\varphi\cos^3\varphi > 0$.

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1 r\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$$

6. $\frac{1}{2}\log 3$; Transformace $u = xy,\ v = \frac{x}{y}$ neboli $x = \sqrt{uv}$ a $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$

transformuje M na $1 \le u \le 3,\ 1 < v < 3$ a tam $J_f = \frac{1}{2v} > 0$. $\int_1^2\Big(\int_1^3 \frac{1}{2v}\,dv\Big)\,du$.

7. 1; Transformace $u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x}$ neboli $x = \sqrt[3]{uv^2}$ a $y = \sqrt[3]{u^2v}$

transformuje M na $1 \le u \le 4,\ 2 < v < 3$ a $J_f = \frac{1}{3}$. $\int_1^4\Big(\int_2^3 \frac{1}{3}\,dv\Big)\,du$.

10. cvičení

Na tabuli jsme počítali následující příklady:
Pomocí Fubiniovy věty nalezněte míru následujích podmnožin $\mathbf{R}^3$

1. $\{0 < x < 3,\ 0 < y < 3,\ xy < z < 1\}$, 2. $\{x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$,

3. M omezená plochami $z = 1$ a $z = x^2 + y^2$.

Pomocí Fubiniovy věty spočtěte následující trojrozměrné integrály

4. $\int_M x\,dxdydz$ pro M omezenou $x = 0,\ y = 0\,z = 0,\ y = 3$ a $x + z = 2$

5. $\int_M z^2\,dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z\}$.

Pomocí věty o substituci spočtěte následující trojrozměrné integrály

6. $\int_M 1\,dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 < z < 1\}$,

7. $\int_M z\,dxdydz$ pro $M = \{x^2 + y^2 \le z^2,\ z \in (0, 2)\}$,

8. $\int_M 1\,dxdydz$ pro $M = \Big\{\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \le \frac{1}{1 + x^2}\Big\}$,

9. $\int_M 1\,dxdydz$ pro $M = \Big\{(2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \le 1\Big\}$.

Návody:

1. $\log 9 - \frac{7}{12}$; $\int_0^3\int_0^{\min(\frac{1}{x},3)}\int_{xy}^1 1\,dz\,dy\,dx =$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^3\int_{xy}^1 1\,dz\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^3\int_0^{\frac{1}{x}}\int_{xy}^1 1\,dz\,dy\,dx\ .$$

2. $\frac{1}{6}$; $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx$

3. $\frac{\pi}{2}$; z je od 0 do 1 je řez kruh o poloměru $\sqrt{z}$: $\int_0^1 \pi(\sqrt{z})^2\,dz$.

4. 4; $\int_0^2\int_0^3\int_0^{2-x} x\,dz\,dy\,dx$

5. $\frac{59}{480}\pi$; Pro $z \in [0, \frac{1}{2}]$ je řez kruh o poloměru $\sqrt{2z - z^2}$, pro $z \in [\frac{1}{2}, 1]$

je řez kruh o poloměru $\sqrt{1-z^2}$: $\displaystyle\int_0^{\frac12} z^2\pi(\sqrt{2z-z^2})^2\,dz+\int_{\frac12}^2 z^2\pi(\sqrt{1-z^2})^2\,dz$.

6. $\dfrac{\pi}{2}$; Válcové souřadnice $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=a,$ pak $J_f=r>0$.

$x^2+y^2<z<1$ transformuji na $r^2<a<1$: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\,da\,dr\,d\varphi$.

7. 4π; Válcové souřadnice $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^a ar\,dr\,d\varphi\,da.$

8. $\sqrt6\pi^2$; Upravené válcové souřadnice $y=\sqrt2 r\cos\varphi,\ z=\sqrt3 r\sin\varphi,\ x=a,$

pak $J_f=\sqrt6 r>0$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}}\sqrt6 r\,dr\,d\varphi\,da$.

9. $4\pi^2$; Válcové souřadnice dají $(2-r)^2+a^2\le 1,$ a tedy $r\in[1,3]$.

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3\int_{-\sqrt{1-(2-r^2)}}^{\sqrt{1-(2-r^2)}} r\,da\,dr\,d\varphi\ .$$

12. cvičení

Na tabuli jsme počítali následující příklady:
Spočtěte následující trojrozměrné objemy či integrály

1. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M=\{x^2+y^2+z^2\le 2z,\ x^2+y^2\le z^2\}$,
2. Spočtěte 1. jak přes sférické, tak i válcové souřadnice},
3. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M=\Big\{\Big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\Big)^2\le x^2y\Big\}$ a $a,b,c>0$,
4. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M=\{a(x^2+y^2)+z\le a,\ z\ge 0\}$ v závislosti na $a\in\mathbf{R}$.
5. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M=\Big\{(x+y+z)^2<y,\ x>0,\ y>0,\ z>0\Big\}$,
6. $\displaystyle\int_M e^{xyz}x^2y\,dxdydz$ pro $M=\{x\ge 0,\ y\ge 1,\ z\ge 1,\ xyz\le 1\}$ za použití substituce $x=u,\ y=\dfrac{u+v}{u},\ z=\dfrac{u+v+w}{u+v}$.

Návody:

1. π; Sférické souřadnice převedou $x^2+y^2+z^2\le 2z$ na $0<r<2\sin\psi$ a $x^2+y^2\le z^2$ na $\cos^2\psi<\sin^2\psi$. Odtud $\sin\psi>0$ a $\cos^2\psi<\sin^2\psi,$ tedy $\psi\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\psi} r^2\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi.$$

2. π; Válcové souřadnice převedou $x^2+y^2+z^2\le 2z$ na $r^2+a^2\le 2a$ a $x^2+y^2\le z^2$ na $r^2\le a^2$. Z první nerovnosti $2a-a^2\ge 0,$ tedy $a\in(0,2)$. Dále $r^2\le\min\{2a-a^2,a^2\}$ a $2a-a^2=a^2$ pro $a=1$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^a r\,dr\,da\,d\psi+\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{2a-a^2}} r\,dr\,da\,d\psi\ .$$

3. $\dfrac{\pi a^7b^4c}{192}$; Zobecněné sférické souřadnice $x=ar\cos\varphi\cos\psi,\ y=br\sin\varphi\cos\psi,$ $z=cr\sin\psi$ a $J_f=abcr^2\cos\psi$. Podmínku převedu na $0\le r^4\le a^2br^3\cos^2\varphi\cos^3\psi\sin\varphi$.

Odtud $\sin\varphi>0$. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{a^2b\cos^2\varphi\cos^3\psi\sin\varphi} abcr^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi$.

4. ∞ pro $a<0$ a $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{a(1-r^2)} r\,dz\,dr\,d\varphi=\frac{a\pi}{2}$ pro $a>0$ přes válcové souřadnice.

5. $\dfrac{1}{60}$; Zobecněné sférické souřadnice $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi,\ y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi,$

$z=cr\sin^2\psi$ a $J_f=4r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi$ pro $\varphi,\psi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\psi} 4r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\psi\sin\psi\,dr\,d\psi\,d\psi.$$

6. $\dfrac{e}{2}-1$; Jakobián vyjde $J_f=\dfrac{1}{u(u+v)}$. Z $x\geq 0$ plyne $u\geq 0$,

z $y\geq 1$ plyne $\dfrac{u+v}{u}\geq 1,$ tedy $v\geq 0,$ z $z\geq 1$ plyne $w\geq 0$ a z $xyz\geq 1$ plyne $u+v+w\leq 1$.

$$\int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v} e^{u+v+w}u^2\frac{u+v}{u}\frac{1}{u(u+v)}\,du\,dv\,dw\ .$$