

5. Řady

5.1. Úvod

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ nazveme *m-tým částečným součtem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je *konvergentní*. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je *divergentní*. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $|q| < 1$.

Motivace: 1) Rozvoj funkce do řady - Taylorův polynom.

2) Cena akcie v závislosti na výši dividendy a očekávaném výnosu.

Věta L 5.1 (nutná podmínka konvergence). *Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Varování: Z $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ neplyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Věta L 5.2 (konvergence součtu řad). (i) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \text{ konverguje} .$$

(ii) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ konverguje} \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

5.2. Řady s nezápornými členy

Pozorování: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Věta L 5.3 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak*

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}.$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ konverguje.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ diverguje.

Věta L 5.4 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbf{R}^*$. Pak*

$$(i) \text{ Jestliže } A \in (0, \infty), \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(ii) \text{ Jestliže } A = 0, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(iii) \text{ Jestliže } A = \infty, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}.$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}$ diverguje.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ konverguje.

Konec 1. přednášky 20.2.

Věta L 5.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

- (i) $\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (iv) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,

Poznámka: 1) Existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, tak o konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze nic říct. Například $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ konverguje.

Z této konvergence a Věty 3.1. plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$.

Věta L 5.6 (d'Alambertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

- (i) $\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro každé $x > 0$.

Věta T 5.7 (kondenzační kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy splňující $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje.}$$

Důsledek. Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$.

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
- (ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Konec 2. přednášky 23.2.

5.3. Neabsolutní konvergence řad

Definice. Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Věta L 5.8 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě tehdy, když je splněna následující podmínka

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall m, n \in \mathbf{N}, m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^m a_j \right| < \varepsilon.$$

Věta L 5.9 (vztah konvergence a absolutní konvergence). Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Důsledky. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

$$(1) \text{ Pokud } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

$$(2) \text{ Pokud } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Navíc platí i

$$(1') \text{ Pokud } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

$$(2') \text{ Pokud } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Příklad: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro každé $x < 0$.

2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ v závislosti na $x \in \mathbf{R}$.

Věta T 5.10 (Leibnizovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje. Tedy z konvergence řady neplyne absolutní konvergence.

Lemma (Abelova parciální sumace). *Nechť $m, n \in \mathbf{N}$ a $m \leq n$ a nechť $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n \in \mathbf{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^k a_i$. Pak platí*

$$\sum_{i=m}^n a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Konec 3. přednášky 27.2.

Věta T 5.11 (Abel-Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek*

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je konvergentní,}$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ má omezené částečné součty, tedy}$$

$$\exists K > 0 \ \forall m \in \mathbf{N} : |s_m| = \left| \sum_{i=1}^m a_i \right| < K.$$

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Příklad: 1) $\{\sin n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a $\{\cos n\}_{n \in \mathbf{N}}$ mají omezené částečné součty.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ konvergují neabsolutně.

5.4. Přerovnávání řad a součin řad

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ je bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme *přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* .

Věta T 5.12 (o přerovnání absolutně konvergentní řady). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní řada a má stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Věta BD 5.13 (Riemann). *Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu z \mathbf{R}^* . Neboli: Nechť pro konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. Pak pro libovolné $s \in \mathbf{R}^*$ existuje bijekce $p : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ taková, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s.$$

Konec 4. přednášky 1.3.

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. *Cauchyovským součinem* těchto řad nazveme řadu

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i \right).$$

Věta T 5.14 (o součinu řad). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně. Pak*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Příklady: 1) $e^x e^y = e^{x+y}$.

2) Nechť $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, pak řada Cauchyovských součtů diverguje.

Věta T 5.15 (zavedení exponenciely). *Existuje funkce $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ splňující:*

- a) $\exp(x)$ je rostoucí na \mathbf{R} ,
- b) $\forall x, y \in \mathbf{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$,
- c) $\exp(0) = 1$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$,
- e) $\exp(x)$ je spojitá na \mathbf{R} .

5.5. Limita posloupnosti a součet řady v komplexním oboru

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_n + i b_n$ je komplexní posloupnost. Řekneme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbf{R}$.

Příklady: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2i}{3+in}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$.

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + i b_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A + iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $q \in \mathbf{C}$, $|q| < 1$.

Konec 5. přednášky 5.3.

Věta L 5.16 (vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady). *Nechť c_n je komplexní posloupnost a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje.*

Příklad: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje pro všechna $z \in \mathbf{C}$.

6. PRIMITIVNÍ FUNKCE

Motivace: Obsah, objem, délka křivky, obsah povrchu ...

6.1. Základní vlastnosti

Definice. Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I . Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce* k funkci f , pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$. Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme $\int f(x) dx$.

Věta L 6.1 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu). *Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro všechna $x \in I$.*

Poznámka: 1. Značíme $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, nebo $\int x dx \stackrel{C}{=} \frac{x^2}{2}$.

2. Nechť F je primitivní k f . Pak F je spojitá.

3. Funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na \mathbf{R} primitivní funkci.

4. Funkce $F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pro $x \neq 0$ a $F(0) = 0$ je diferencovatelná na \mathbf{R} , ale její derivace není spojitá na \mathbf{R} .

Věta T 6.2 (o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce). *Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I . Pak f má na I primitivní funkci.*

Poznámka: Primitivní funkce k e^{-x^2} existuje, ale nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta L 6.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak $\alpha f + \beta g$ má na I primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

Tabulkové integrály:

$$\begin{aligned} \int x^n dx &\stackrel{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ na } \mathbf{R} \text{ pro } n \in \mathbf{N} \text{ a na } (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty) \text{ pro } n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\} \\ \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{C}{=} \log|x| \text{ na } (-\infty, 0) \text{ a na } (0, \infty), \quad \int e^x dx \stackrel{C}{=} e^x \text{ pro } x \in \mathbf{R} \\ \int \sin x dx &\stackrel{C}{=} -\cos x \text{ pro } x \in \mathbf{R}, \quad \int \cos x dx \stackrel{C}{=} \sin x \text{ pro } x \in \mathbf{R} \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &\stackrel{C}{=} \tan x \text{ pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx &\stackrel{C}{=} \cot g x \text{ pro } x \in (0, \pi) + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &\stackrel{C}{=} \arctan x \text{ pro } x \in \mathbf{R} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &\stackrel{C}{=} \arcsin x \text{ pro } x \in (-1, 1), \quad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{C}{=} \arccos x \text{ pro } x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Příklad: Spočtěte $\int |x| dx$ na \mathbf{R} .

Věta T 6.4 (nutná podmínka existence primitivní funkce). *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ interval.*

Konec 6. přednášky 8.3.

Věta L 6.5 (integrace per partes). *Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I . Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k g na I . Pak platí*

$$\int g(x)F(x)dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)dx \text{ na } I.$$

Příklady: 1) Spočtěte $\int xe^{2x} dx$ na \mathbf{R} .

2) Spočtěte $\int \log x dx$ na $(0, \infty)$.

Věta L 6.6 (první věta o substituci). *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b) , která má v každém bodě z (α, β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Příklad: Spočtěte $\int xe^{x^2} dx$ na \mathbf{R} .

Věta L 6.7 (druhá věta o substituci). *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) vlastní nenulovou derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Poznámka: Při použití druhé věty o substituci je vždy nutné ověřit, že φ je prostá a na!

Příklady: 1. Spočtěte $\int \sqrt{1-x^2} dx$ na $(-1, 1)$.

2. Nechť F je primitivní k f . Spočtěte $\int f(ax+b) dx$ pro $a, b \in \mathbf{R}$.

3. Spočtěte $\int e^x \cos x dx$ na \mathbf{R} .

4. Spočtěte $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ na \mathbf{R} pro $n \in \mathbf{N}$.

6.2. Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkci rozumíme podíl dvou polynomů P/Q , kde Q není nulový polynom.

Věta (základní věta algebry). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{C}$ tak, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Konec 7. přednášky 12.3.

Lemma (o komplexních kořenech polynomu) Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbf{N}$. Pak i \bar{z} je kořen násobnosti k .

Věta T 6.8 (o rozkladu na parciální zlomky). *Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

- (i) stupeň P je ostře menší než stupeň Q ,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$,
- (iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,
- (v) žádné dva z mnohočlenů $x - x_1, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen.
- (vi) mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_j^i \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, p_i\}$ a $B_j^i, C_j^i \in \mathbf{R}$, $i \in \{1, \dots, l\}$, $j \in \{1, \dots, q_i\}$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}. \end{aligned}$$

Postup při integraci racionální funkce:

1. Vydělit polynomy

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_1(x) dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx,$$

kde stupeň $P_2 <$ stupeň Q .

2. Rozklad na parciální zlomky podle předchozí věty.

3. Integrace parciálních zlomků. Stačí umět integrovat x^n , $\frac{1}{x^n}$, $\frac{2x}{(1+x^2)^k}$, $\frac{1}{(1+x^2)^k}$ a použít lineární substituci.

Příklady: 1. Vydělte polynomy $\frac{x^4+1}{x^2+2x}$.

2. Zintegrujte $\frac{1}{x+1}$ a $\frac{x+1}{x^2+x+1}$.

3. Spočtěte primitivní funkci $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$.

6.3 Substituce, převádějící na racionální funkce

- (1) Nechť $a \in \mathbf{R}$. Při integraci funkcí typu

$$\int R(e^{ax}) dx$$

používáme substituci

$$t = e^{ax}.$$

- (2) Při integraci funkcí typu

$$\int R(\log x) \frac{1}{x} dx$$

používáme substituci

$$t = \log x.$$

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{1}{x(\log^2 x - 5 \log x + 6)} dx$.

2. Spočtěte $\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}} dx$.

Konec 8. přednášky 15.3.

6.4. Integrace trigonometrických funkcí

Definice. Racionální funkci dvou proměnných rozumíme podél dvou polynomů $R(a, b) = \frac{P(a, b)}{Q(a, b)}$, kde $P(a, b)$ a $Q(a, b)$ jsou polynomy dvou proměnných a Q není identicky nulový.

- (3) Při integraci funkcí

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

používáme substituce:

(i) pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \cos x$

- (ii) pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \sin x$
 (iii) pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \tan x$
 (iv) vždy funguje substituce $t = \tan \frac{x}{2}$.

Dobrá rada: Pokud je možné použít (i) nebo (ii), je výpočet většinou nejsnazší. Substituci (iv) je dobré používat jen, když nelze použít (i), (ii) ani (iii).

Poznámka: Po substituci $t = \tan x$ a $t = \tan \frac{x}{2}$ je většinou nutné primitivní funkci po formálním spočtení ještě 'lepit'.

- Příklady:** 1. Spočtěte $\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx$.
 2. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$.

6.5. Integrace funkcí obsahujících odmocniny

- (4) Nechť $q \in \mathbf{N}$ a $ad \neq bc$. Při integraci funkci typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right) dx$$

používáme substituci

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

- (5) (Eulerovy substituce) Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkci typu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

používáme následující substituce:

- a) Polynom $ax^2 + bx + c$ má dvojnásobný kořen α a $a > 0$, pak

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - \alpha|$$

a jedná se v podstatě o integraci běžné racionální funkce.

- b) Polynom $ax^2 + bx + c$ má dva reálné kořeny α_1 a α_2 . Pak úpravou převedeme na tvar (4) pro odmocninu $\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}}$.

- c) Polynom $ax^2 + bx + c$ nemá reálný kořen a $a > 0$. Pak použijeme substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t.$$

Poznámka: Substituce (3) (iii), (iv) a (5) c jsou substituce 2. druhu a je vždy potřeba ověřit, že vnitřní funkce je monotónní a na.

- Příklady:** 1. Spočtěte $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx$.
 2. Spočtěte $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx$.

7. URČITÝ INTEGRÁL

7.1. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme *dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ *zjemňuje* dělení D intervalu $[a, b]$, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D' .

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Definujme *horní a dolní součty*

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^n \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^n \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

horní Riemannův integrál

$$(R) \overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \left\{ S(f, D); D \text{ je dělení } [a, b] \right\}$$

a dolní Riemannův integrál

$$(R) \underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \left\{ s(f, D); D \text{ je dělení } [a, b] \right\}.$$

Pokud $(R)\overline{\int_a^b}f(x) dx = (R)\underline{\int_a^b}f(x) dx$, pak řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná a klademe

$$(R)\int_a^b f(x) dx = (R)\underline{\int_a^b}f(x) dx.$$

Množinu funkcí majících Riemannův integrál značíme $R([a, b])$.

Poznámka: Omezenost f je nutně potřeba.

Příklady: 1. $(R)\int_0^1 1 dx = 1$.

2. Nechť D je Dirichletova funkce, pak $(R)\overline{\int_0^1}D(x) dx = 1$ a $(R)\underline{\int_0^1}D(x) dx = 0$.

Konec 9. přednášky 19.3.

Věta L 7.1 (o zjemnění dělení). Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a, b]$ a D' zjemňuje D . Pak

$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D).$$

Věta L 7.2 (o dvou děleních). Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a D_1 , D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2).$$

Důsledek: Nechť f je omezená na $[a, b]$, D_1 a D_2 jsou dělení $[a, b]$,

$$m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ a } M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Pak

$$m(b-a) \leq s(f, D_1) \leq (R)\int_a^b f(x) dx \leq (R)\overline{\int_a^b}f(x) dx \leq S(f, D_2) \leq M(b-a).$$

Definice. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Číslo $\nu(D) = \max_{j=1, \dots, n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme *normou dělení* D .

Věta T 7.3 (aproximace R integrálu pomocí součtu). Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení $[a, b]$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$. Potom

$$(R)\overline{\int_a^b}f(x) dx = \inf_{n \in \mathbf{N}} S(f, D_n) \text{ a } (R)\underline{\int_a^b}f(x) dx = \sup_{n \in \mathbf{N}} s(f, D_n).$$

Příklad: Spočtěte $(R)\int_0^1 x^2 dx$.

Důsledek: Z předchozí věty a Věty 7.1 dostaneme:

Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení $[a, b]$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n . Potom

$$(R)\overline{\int_a^b}f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) \text{ a } (R)\underline{\int_a^b}f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n).$$

Důkaz: Z Věty 7.1. víme

$$s(f, D_n) \leq s(f, D_{n+1}) \leq S(f, D_{n+1}) \leq S(f, D_n).$$

Posloupnost $s(f, D_n)$ je tedy neklesající, a proto $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n) = \sup_{n \in \mathbf{N}} s(f, D_n)$. Analogicky $S(f, D_n)$ je nerostoucí, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = \inf_{n \in \mathbf{N}} S(f, D_n)$. \square

Věta L 7.4 (kritérium existence R integrálu). Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ dělení } D [a, b] : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Definice. Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámky: 1. Spojitost a stejnoměrná spojitost na intervalu I se liší pořadím kvantifikátorů:

Spojitost: $\forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

Stejnoměrná spojitost: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2. Nechť f je stejnoměrně spojitá na I , pak f je spojitá na I .

3. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na $(0, 1)$, ale není tam stejnoměrně spojitá.

Konec 10. přednášky 22.3.

Věta T 7.5 (o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti). *Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

Věta L 7.6 (o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je spojitá na $[a, b]$, pak $f \in R([a, b])$.*

Věta L 7.7 (vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je (omezená) monotónní funkce na intervalu $[a, b]$. Pak $f \in R([a, b])$.*

Konec 11. přednášky 26.3.

Věta T 7.8 (vlastnosti R integrálu).

a) *Linearita:* $f, g \in R([a, b]), \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow f + g \in R([a, b]), \alpha f \in R([a, b])$ a

$$(R) \int_a^b f + g = (R) \int_a^b f + (R) \int_a^b g \quad a \quad (R) \int_a^b \alpha f = \alpha (R) \int_a^b f.$$

b) *Monotonie:* $f, g \in R([a, b]), f \leq g$, pak $(R) \int_a^b f \leq (R) \int_a^b g$.

c) *Aditivita vzhledem k intervalům:* Nechť $a < c < b$. Pak

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow f \in R([a, c]) \text{ a } f \in R([c, b]),$$

$$(R) \int_a^b f = (R) \int_a^c f + (R) \int_c^b f.$$

Úmluva: 1. Nechť $b < a$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

2. Dále definujeme $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Věta T 7.9 (o derivaci integrálu podle horní meze). *Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha, \beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci*

$$F(x) = (R) \int_c^x f(t) dt.$$

Pak platí

(i) F je spojitá na J ,

(ii) Jestliže je f spojitá v bodě $x_0 \in \text{int } J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek:

(i) Je-li f spojitá na (a, b) , pak má na (a, b) primitivní funkci (Věta T 6.2).

(ii) Nechť f je spojitá na intervalu $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak

$$(R) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \beta^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha^+} F(x),$$

kde F je primitivní funkce k f na (α, β) .

7.2. Newtonův integrál

Definice. Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) *Newtonův integrál*, jestliže má na (a, b) primitivní funkci F a $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

$$(N) \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Množinu funkcí majících Newtonův integrál značíme $N(a, b)$.

Poznámky: 1. Jestliže f je spojitá na $[a, b]$, pak existují oba integrály a rovnají se $(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx$.

2. Existuje $(N) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, ale neexistuje Riemannův integrál, protože f není omezená.

3. Existuje $(R) \int_{-1}^1 \text{sgn}(x) dx$, ale neexistuje Newtonův integrál, protože $\text{sgn } x$ nemá primitivní funkci.

Konec 12. přednášky 2.4.

Věta L 7.10 (per partes pro určitý integrál). *Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a, b]$. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx,$$

kde $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ a obecněji $= \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x)$.

Příklad: $\int_0^1 \log x dx$

Věta BD 7.11 (o substituci pro určitý integrál). (i) Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ je funkce, která má na intervalu $[\alpha, \beta]$ spojitu první derivaci. Pak

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

(ii) Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ je na a má na $[\alpha, \beta]$ vlastní spojitu nenulovou derivaci. Pak

$$\int_a^b f(x) dx = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

kde Φ je primitivní funkce k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Příklady: 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$.

2. obsah kruhu: $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

Pozorování: Nechť f je spojitá funkce na (a, b) a $a < c < b$. Pak

$$(i) f \in N(a, c) \text{ a } f \in N(c, b) \Rightarrow f \in N(a, b).$$

$$(ii) f \in N(a, b) \Rightarrow f \in N(a, c).$$

7.3. Konvergance integrálu

Cílem této kapitoly je určit, kdy je integrál $(N) \int_a^b f(x) dx$ konečný. V tomto případě říkáme, že $(N) \int_a^b f(x) dx$ konverguje.

Připomeň: Je-li $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu, pak $(N) \int_a^b f(x) dx$ konverguje.

Příklady: 1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^{\alpha}(x)} dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

3. $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 1$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x |\log x|^{\alpha}} dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Věta L 7.12 (srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu). Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ spojité na $[a, b]$ a nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$. Potom

$$g \in N(a, b) \Rightarrow f \in N(a, b).$$

Příklad: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ konverguje

Věta L 7.13 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu). Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ spojité a nezáporné funkce na $[a, b]$. Jestliže existuje $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak

$$g \in N(a, b) \Leftrightarrow f \in N(a, b).$$

Příklad: $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2} dx$ konverguje

Konec 13. přednášky 5.4.

Lemma (odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí) Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq g(b) \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x f(t) dt.$$

Věta T 7.14 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu). Nechť $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Dále nechť $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je na $[a, b]$ monotónní a spojitá. Pak platí

(A) Jestliže $f \in N(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in N(a, b)$.

(D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, pak $fg \in N(a, b)$.

Příklad: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Věta L 7.15 (věta o střední hodnotě integrálního počtu). Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in N(a, b)$ a $fg \in N(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Konec 14. přednášky 9.4.

7.4. Aplikace určitého integrálu

Definice. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je nezáporná spojitá funkce, pak *obsahem plochy* pod grafem funkce f nazveme

$$\text{Obsah}(f, [a, b]) = (R) \int_a^b f(x) dx. = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Definice. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$. Označme

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}.$$

Délkou křivky f nazveme

$$L(f([a, b])) = \sup \{L(f, D); D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

Věta T 7.16 (délka křivky). Nechť f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak

$$L(f([a, b])) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Věta BD 7.17 (délka křivky v \mathbf{R}^n). Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak

$$L(\varphi([a, b])) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(x))^2 + (\varphi'_2(x))^2 + \dots + (\varphi'_n(x))^2} dx$$

Příklad: Spočtete délku kružnice.

Poznámka: Stejná křivka může mít různé parametrizace. Je vhodné ukázat, že délka křivky nezávisí na parametrizaci.

Věta BD 7.18 (objem a povrch rotačního tělesa - bez důkazu). Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : x \in [a, b] \text{ a } \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\text{Objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\text{Obsah povrchu}(T) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Příklad: Spočtete objem a obsah povrchu koule.

Konec 16. přednášky 28.4.

Věta L 7.19 (integrální kritérium konvergence řad). Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na intervalu $[n_0 - 1, \infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost a_n platí $a_n = f(n)$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak

$$(N) \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Příklady: 1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$
 2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^{\alpha}(x)} dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Příklady: 1. Stirlingova formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

2. Wallisova formule

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{2m}}.$$

Konec 17. přednášky 30.4.

8. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Motivace: 1. Volný pád s odporem vzduchu. Pozice v čase t je $y(t)$:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g + \alpha\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2.$$

2. Růst populace

$$\frac{dn(t)}{dt} = kn(t)(M - n(t)).$$

3. kyvadlo délky l , $x(t)$ je úhel kyvadla v čase t :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin x(t).$$

Spousta jevů ve fyzice, chemii, biologii, nebo ekonomii je popsána pomocí diferenciálních rovnic.

8.1. Řešení, existence a jednoznačnost

Definice. Nechť $\Phi : \Omega \subset \mathbf{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{R}$. *Obyčejnou diferenciální rovnicí* (ve zkratce ODR) n -tého rádu nazveme

$$(8.1) \quad \Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Definice. *Řešení ODR* na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$ je funkce $y(x)$ splňující

- (i) existuje $y^{(k)}(x)$ vlastní pro $k = 1, \dots, n$ a všechna $x \in I$,
- (ii) (8.1) platí pro všechna $x \in I$.

Řešení je dvojice (y, I) .

Definice. Řekneme, že (\tilde{y}, \tilde{I}) je *rozšířením* (y, I) , pokud

- (i) \tilde{y} je řešení (8.1) na \tilde{I} ,
- (ii) $I \subsetneq \tilde{I}$,
- (iii) $y = \tilde{y}$ na I .

Řekneme, že (y, I) je *maximální řešení*, pokud nemá rozšíření.

Cíle studia ODR:

- sestavit rovnici
- existují řešení a kolik jich je?
- najít všechna maximální řešení
- diskuse o jednoznačnosti a kvalitě řešení
- případná fyzikální interpretace

Definice. Řekneme, že $I \subset \mathbf{R}^n$ je *otevřený interval*, pokud existují otevřené intervaly I_1, I_2, \dots, I_n tak, že $I = I_1 \times \dots \times I_n$.

Nechť $c \in \mathbf{R}^n$ a $r > 0$. Definujme *kouli* jako

$$B(c, r) := \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \|x - c\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r \right\}.$$

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}^n$ je otevřený interval a $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce. Řekneme, že $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je *spojitá funkce v bodě x_0* , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta) \cap I \text{ platí } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že f je *spojitá na I* , pokud je spojitá ve všech bodech I .

Příklady: 1. Nechť $h(x), g(y)$ jsou spojité z \mathbf{R} do \mathbf{R} . Pak $f(x, y) = h(x)$ a $\tilde{f}(x, y) = g(y)$ jsou spojité z \mathbf{R}^2 do \mathbf{R} .

2. Nechť $f_1(x), f_2(x)$ jsou spojité z \mathbf{R}^n do \mathbf{R} . Pak $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ a $\tilde{f}(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jsou spojité z \mathbf{R}^n do \mathbf{R} . Specielně například polynomy funkcí více proměnných jsou spojité funkce.

2. $\int_2^\infty \frac{1}{x \log^\alpha(x)} dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Věta T 8.1 (Peano s $y^{(n)}$ - důkaz později). Nechť $I \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřený interval, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá a $[x_0, y_0, \dots, y_{n-1}] \in I$. Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

a počáteční podmíinku

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

- Poznámky:** 1) Tato věta je lokální a δ může být velmi malé.
 2) Tato věta nedává jednoznačnost řešení.
 3) Každé řešení lze rozšířit do maximálního řešení.

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je oteřený interval. Řekneme, že funkce $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je *lokálně lipschitzovská* vůči y , pokud pro všechny omezené množiny $U \subset I$, existuje $K \in \mathbf{R}$ tak, že

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K|y - \tilde{y}| \text{ pro všechna } [x, y] \in U \text{ a } [x, \tilde{y}] \in U.$$

- Příklady:** 1) $f(y) = \sqrt[3]{y}$ není lipschitzkovská v 0.
 2) Nechť má $f(y)$ spojitou derivaci (vzhledem k y). Pak je f lokálně lipschitzovská vůči y .

Věta T 8.2 (Picard - důkaz později). *Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je otevřený interval a $[x_0, y_0] \in I$. Nechť $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči y . Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ s počáteční podmínkou } y(x_0) = y_0.$$

Navíc y je jediné řešení na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Konec 18. přednášky 5.5.

8.2. Rovnice prvního rádu

Nechť $I \subset \mathbf{R}^2$ je otevřený interval a $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá. V této kapitole studujeme pouze rovnice typu

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Speciální tvary:

- (i) $y' = f(x)$
- (ii) $y' = g(y)$
- (iii) $y' = g(y)h(x)$ (separované proměnné)
- (iv) $y' = h(\frac{y}{x})$ (homogenní rovnice) - substitucí $z = \frac{y}{x}$ převedeme na (iii)
- (v) $y' = a(x)y + b(x)$ (lineární rovnice 1. rádu)
- (vi) $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, (Bernouliho rovnice) - substitucí $z = y^{1-\alpha}$ převedeme na (v)

Věta T 8.3 (o existenci řešení separované rovnice). *Nechť $h : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá, $g : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá a nenulová. Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in \Omega := (a, b) \times (c, d)$ prochází právě jedno řešení rovnice*

$$y' = g(y)h(x).$$

Postup pro řešení rovnice $y' = h(x)g(y)$ se separovanými proměnnými:

- (1) Určime maximální intervaly I v D_h .
- (2) Najdeme body, kde $g(c) = 0$. Pak $y(x) \equiv c$ je řešení. Určime maximální intervaly J , kde je g nenulová.
- (3) Pro $x \in I$ hledáme řešení s hodnotami v J rovnice

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Integrováním dostaneme

$$G(y(x)) = H(x) + c,$$

kde H je primitivní k h na I a G je primitivní k $\frac{1}{g}$ na J .

- (4) Zafixujeme c a hledáme řešení

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

Toto je řešení na

$$\{x \in I : H(x) + c \in G(J)\}.$$

- (5) Z řešení z (4) a konstantních řešení z (2) slepíme všechna maximální řešení.

Příklady: 1. $y' = y^2$

2. $y' = x^2y$

3. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

4. padák

Konec 19. přednášky 7.5.

Věta L 8.4 (o řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu). *Nechť $(c, d) \subset \mathbf{R}$ je interval, $x_0 \in (c, d)$, $y_0 \in \mathbf{R}$ a $a, b : (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$ jsou spojité funkce. Maximální řešení rovnice $y' = a(x)y + b(x)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ má tvar*

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt \right) e^{A(x)} + y_0 e^{A(x)} \text{ pro } x \in (c, d),$$

kde A je primitivní k a splňující $A(x_0) = 0$.

Postup pro řešení rovnice $y' = a(x)y + b(x)$:

- a) Výřešíme rovnici $y' = a(x)y$ (separované proměnné). Vyjde

$$y(x) = K e^{A(x)} \text{ pro } K \in \mathbf{R}, \text{ kde } A(x) \text{ je primitivní k } a(x).$$

- b) Hledáme jedno partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = K_0(x) e^{A(x)}.$$

Dosazením

$$y'(x) = (K_0(x) e^{A(x)})' = K'_0(x) e^{A(x)} + K_0(x) e^{A(x)} a(x)$$

do rovnice vyjde

$$K'_0(x) e^{A(x)} + K_0(x) e^{A(x)} a(x) = y'(x) = a(x)y(x) + b(x) = a(x)K_0(x) e^{A(x)}.$$

Odtud $K'_0(x) = e^{-A(x)}b(x)$, a tedy K_0 spocteme jako primitivní funkci k $e^{-A(x)}b(x)$.

- c) Řešení je celkově partikulární řešení z b) plus obecné řešení homogenní rovnice z a)

$$y(x) = K_0(x) e^{A(x)} + c e^{A(x)}.$$

Příklady: 1. $y' + xy = x$

2. šnek na gumě

8.3. Systémy lineárních ODR a lineární rovnice řádu n

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a mějme funkce $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbf{R}$. Lineární ODR řádu n nazvu rovnici

$$y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \text{ pro } x \in I.$$

Je-li $b \equiv 0$ na I , pak se rovnice nazývá homogenní.

Příklad: $y'' + y = 1$.

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, mějme funkce $b, y : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ a mějme maticovou funkci $A : I \rightarrow \mathbf{R}^{n^2}$. Systémem ODR prvního řádu nazveme systém rovnic

$$y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1,n}y_n + b_1$$

$$y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2,n}y_n + b_2$$

⋮

$$y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{n,n}y_n + b_n$$

neboli v maticovém zápisu

$$y' = Ay + b.$$

Je-li $b \equiv 0$ na I , pak se rovnice nazývá homogenní.

Příklad:

$$y'_1 = y_1 + y_2$$

$$y'_2 = -y_1 + y_2 - x$$

neboli

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

Poznámka: Řešení jedné rovnice řádu n lze převést na řešení systému n rovnic řádu 1: Nechť y řeší

$$y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Pak n funkcí

$$u_1(x) = y(x), \quad u_2(x) = y'(x), \dots, \quad u_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

řeší soustavu

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_2 \\ u'_2 &= u_3 \\ &\vdots \\ u'_{n-1} &= u_n \\ u'_n &= b(x) - a_{n-1}(x)u_n(x) - \dots - a_0(x)u_1(x) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$u_1(x_0) = y_0, \quad u_2(x_0) = y_1, \dots, \quad u_n(x_0) = y_{n-1}.$$

V dalším si tedy vyslovíme věty pro soustavy n rovnic řádu 1, které mají okamžitě analogické důsledky pro jednu rovnici řádu n .

Naopak řešení systému n rovnic řádu 1 lze občas, ale ne vždy, převést na jednu rovnici řádu n .

Konec 20. přednášky 14.5.

Věta T 8.5 (o existenci řešení systému ODR 1. řádu). *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij} : I \rightarrow \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbf{R}^n$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je spojitá maticová funkce. Pak existuje právě jedno řešení rovnice*

$$y' = Ay + b \text{ s počáteční podmínkou } y(x_0) = y^0$$

definované na celém I .

Věta L 8.6 (prostor řešení systému ODR 1. řádu). *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij} : I \rightarrow \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Označme*

$$L(y) = y' - Ay \text{ a } H = \text{Ker } L = \{y \in C^1(I, \mathbf{R}^n) : L(y) = 0 \text{ na } I\}.$$

Pak H je vektorový prostor (nad tělesem \mathbf{R}) dimenze n . Označme M množinu všech řešení nehomogenního systému rovnic $Ly = b$ a nechť y_0 je jedno pevné řešení $L(y_0) = b$. Pak

$$M = y_0 + \text{Ker } L.$$

Definice. Libovolnou bázi $\{y_1, \dots, y_n\}$ prostoru $H = \text{Ker}(y' - Ay)$ (tedy libovolných n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice $y' = Ay$) nazýváme *fundamentálním systémem řešení FSŘ homogenní rovnice $y' = Ay$* .

8.4. Rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

Definice. Nechť $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

nazveme *charakteristickým polynomem* rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Konec 21. přednášky 19.5.

Věta T 8.7 (FSŘ pro rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty). *Mějme zadány $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různé kořeny charakteristického polynomu násobnosti s_1, \dots, s_k (tedy $s_1 + \dots + s_k = n$). Pak funkce*

$$e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}, \dots, \quad x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}, \dots, \quad e^{\lambda_k x}, \dots, \quad x^{s_k-1}e^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y^{(n)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \text{ na } \mathbf{R}.$$

Věta T 8.8 (o speciální pravé straně pro rovnici n -tého řádu - bez důkazu). *Mějme zadány $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, nechť $P_m(x)$ je polynom m -tého stupně a $(\alpha + i\beta)$ je k -násobný kořen charakteristického polynomu (lze i $k = 0$, $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$). Pak rovnice*

$$y^{(n)} + \dots + a_1y' + a_0y = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (\text{popřípadě } P_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x)$$

má na \mathbf{R} řešení ve tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_m(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^k R_m(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde Q_m a R_m jsou polynomy stupně m .

Poznámka: Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i(x),$$

kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Příklady: 1. $y'' - y = e^x + e^{2x}$

2. $y'' + y = \sin ax$, $a \in \mathbf{R}$

3. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$

Konec 22. přednášky 21.5.

8.5. Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Věta L 8.9 (FSŘ pro soustavu rovnic s konstantními koeficienty). *Nechť má matici A všechna vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá a nechť v_1, \dots, v_n jsou příslušné (nenulové) vlastní vektory. Pak vektorové funkce*

$$v_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, v_n e^{\lambda_n x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y' = Ay \text{ na } \mathbf{R}.$$

Poznámka: Nemá-li matice A všechna vlastní čísla různá, pak lze fundamentální systém také algoritmicky sestrojit. Nechť λ je k -násobné vlastní číslo matice A .

a) Pokud existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů v_1, v_2, \dots, v_k pak do FSŘ dáme funkce

$$v_1 e^{\lambda x}, v_2 e^{\lambda x}, \dots, v_n e^{\lambda x}.$$

b) Pokud existuje pouze jeden vlastní vektor v_1 , tak nalezneme řetězec vektorů v_2, \dots, v_k , aby

$$(A - \lambda E)v_1 = 0, (A - \lambda E)v_2 = v_1, \dots, (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}$$

a do FSŘ dáme funkce

$$v_1 e^{\lambda x}, v_1 x e^{\lambda x} + v_2 e^{\lambda x}, v_1 \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} + v_2 x e^{\lambda x} + v_2 e^{\lambda x}, \dots, v_1 \frac{x^k}{k!} e^{\lambda x} + \dots + v_k e^{\lambda x}.$$

c) Pokud existuje více vlastních vektorů, ale ne k tak provedeme něco mezi. Záleží to na Jordanově tvaru matice $A = R^{-1}JR$, kde R je matice rotace. Je-li například

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

pak existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory (jeden pro druhý v_1 a jeden pro třetí rádek v_2). Pro ten první vlastní vektor nalezneme příslušný řetězec délky 2 ($(A - \lambda E)u = v_1$) a do FSŘ dáme

$$v_1 e^{\lambda x}, v_1 x e^{\lambda x} + u e^{\lambda x}, v_2 e^{\lambda x}.$$

Obecně pro každou Jordanovu buňku velikosti $m \times m$ nalezneme řetězec délky m a příslušné funkce jako v b) dáme do FSŘ.

Odůvodnění: Počítání s exponenciellou matice.

Příklady: 1. $y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y$ s počáteční podmínkou $y(0) = (3, 0)$. 2. $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} y$

3. $y' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} y$ 4. $y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} y$

Konec 23. přednášky 26.5.

Definice. Nechť y^1, y^2, \dots, y^n tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y' = Ay$. Pak matici

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

nazveme *fundamentální maticí soustavy* $y' = Ay$.

Lemma. Nechť φ je fundamentální matici soustavy $y' = Ay$ na otevřeném intervalu I . Pak $\varphi(x)$ je regulární pro každé $x \in I$.

Věta L 8.10 (tvar řešení pro soustavu ODR). Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $A : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$, $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ jsou spojité funkce, $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení rovnice $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ má tvar

$$y(x) = \varphi(x)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi(x) \int_{x_0}^x \varphi^{-1}(t)b(t) dt,$$

kde φ je fundamentální matici soustavy.

Jako důsledek tohoto tvrzení lze odvodit Větu 8.8 i následující:

Věta T 8.11 (o speciální pravé straně pro soustavu n -tého řadu - bez důkazu). Nechť $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ je matici a, p, q jsou $n \times 1$ vektory polynomů. Pak soustava

$$y' = Ay + p(x)e^{ax} \cos bx + q(x)e^{ax} \sin bx$$

má řešení ve tvaru

$$y(x) = \tilde{p}(x)e^{ax} \cos bx + \tilde{q}(x)e^{ax} \sin bx,$$

kde \tilde{p}, \tilde{q} jsou vektory polynomů a

$$\max\{\text{st } \tilde{p}, \text{st } \tilde{q}\} = \max\{\text{st } p, \text{st } q\} + \text{násobnost } (a + ib) \text{ jako vlastního čísla } A.$$

Příklad: 1. $y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^x \\ 2 \sin x \end{pmatrix}$

Poznámka: Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)y_i(x),$$

kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ tvoří FSR rovnice $y' = Ay$.

Konec 24. přednášky 28.5.

9. METRICKÉ PROSTORY I

9.1. Základní pojmy

Definice. Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici (P, ϱ) , kde P je množina bodů a $\varrho : P \times P \rightarrow \mathbf{R}$ splňuje

- (i) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (ii) $\forall x, y \in P : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$, (symetrie)
- (iii) $\forall x, y, z \in P : \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$. (\triangle -nerovnost)

Funkci ϱ nazýváme metrika.

Příklady:

- 1) Euklidovská metrika na \mathbf{R}^n . Pro $x, y \in \mathbf{R}^n$ definujeme $\varrho_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.
- 2) Maximová metrika na \mathbf{R}^n . Definujeme $\varrho_\infty(x, y) = \max_{i=1 \dots n} |x_i - y_i|$.
- 3) Součtová metrika na \mathbf{R}^n . Definujeme $\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
- 4) Diskrétní metrika na libovolné množině P je definována jako $\varrho(x, x) = 0$ pro všechna $x \in P$ a $\varrho(x, y) = 1$ pro všechna $x \neq y$.
- 5) Supremová metrika na $C([0, 1])$ je definována $\varrho(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.
- 6) Metrika na $L^2([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R} : \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty\}$ je definována

$$\varrho(f, g) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

- 7) Definujme prostor obrázků $Obr = \{x \in \mathbf{R}^{1280 \times 1024} : x_i \in [0, 1]\}$ s metrikou $|x - y| = \varrho_e(x, y)$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$, $r > 0$. Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme

$$B(x, r) := \{y \in P : \varrho(x, y) < r\}.$$

Uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in P : \varrho(x, y) \leq r\}.$$

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subset P$ je otevřená (v (P, ϱ)), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$, že $B(x, r) \subset G$. Řekneme, že množina $F \subset P$ je uzavřená (v (P, ϱ)), pokud je $P \setminus F$ otevřená.

Příklady: 1. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak $B(x, r)$ je otevřená množina a $\overline{B(x, r)}$ je uzavřená množina.

2. Je $[0, 1]$ otevřená množina v \mathbf{R} s diskrétní metrikou?

Věta L 9.1 (vlastnosti otevřených množin). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak*

(i) \emptyset a P jsou otevřené.

(ii) Jsou-li G_1, \dots, G_n otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^n G_i$ je otevřená.

(iii) Nechť A je libovolná (i nekonečná) indexová množina.

Jsou-li G_α , $\alpha \in A$ otevřené, pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená.

Konec 25. přednášky 2.6.

Věta L 9.2 (vlastnosti uzavřených množin). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak*

(i) \emptyset a P jsou uzavřené.

(ii) Jsou-li F_1, \dots, F_n uzavřené, pak $\bigcup_{i=1}^n F_i$ je uzavřená.

(iii) Jsou-li F_α , $\alpha \in A$ uzavřené, pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená.

Příklad: $\bigcap_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) = \{0\}$ není otevřená v \mathbf{R} .

$\bigcup_{i=1}^{\infty} [\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}] = (0, 1)$ není uzavřená v \mathbf{R} .

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je *vnitřním bodem* množiny A , jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů A nazýváme *vnitřkem* A a značíme $\text{int } A$.

Příklad: Co je vnitřek $[0, 1]$ v $(\mathbf{R}, |.|)$, $Q(0, 1)$ v $(\mathbf{R}^2, |.|)$ a \mathbf{Q} v $(\mathbf{R}, |.|)$?

Věta L 9.3 (charakterizace vnitřku). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom $\text{int } A$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v A .*

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je *hraničním bodem* množiny M , jestliže pro každé $r > 0$ platí

$$M \cap B(x, r) \neq \emptyset \text{ a } (P \setminus M) \cap B(x, r) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů M nazýváme *hranicí* M a značíme ji ∂M .

Uzávěr množiny M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Příklad: Co je hraničce a uzávěr $[0, 1]$ v $(\mathbf{R}, |.|)$, $Q(0, 1)$ v $(\mathbf{R}^2, |.|)$ a \mathbf{Q} v $(\mathbf{R}, |.|)$?

Věta L 9.4 (uzávěr a uzavřené množiny). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak*

$$A \text{ je uzavřená v } P \Leftrightarrow \overline{A} = A.$$

Věta L 9.5 (vlastnosti uzávěru). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom platí*

(i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,

(ii) nechť $A \neq \emptyset$, pak $\overline{A} = \{x \in P : \varrho(x, A) = 0\}$,

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, tedy \overline{A} je uzavřená množina.

Konec 26. přednášky 4.6.