

## Zkoušky z Teorie míry a integrálu 1, zimní semestr 2022/2023

### Obecné podmínky

Sylabus přednášky a doporučená literatura je k nalezení v Sisu. Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu. Pokud student nezískal zápočet před konáním zkoušky, může jej dostat i za úspěšné napsání písemné části, pokud bude ohodnocena alespoň 30 body.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Neprospěje-li student u ústní zkoušky, neprospěl u tohoto termínu. Pokud student při ústní zkoušce neuspěje, pak nemusí znovu absolvovat písemnou část.

Pokud student třikrát neuspěl u písemné části, může jít stejně k ústní zkoušce a počítá se mu nejlepší výsledek písemky. V tom případě musí z ústní zkoušky získat více bodů, aby byl celkový součet písemné a ústní části alespoň 50 bodů.

### Písemná část zkoušky

Písemná část zkoušky se skládá ze tří příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů:

- 1) Záměna limity a integrálu nebo řady a integrálu (15 nebo 20 bodů)
- 2) Funkce závislá na parametru - výpočet, spojitost, diferencovatelnost (15 nebo 20 bodů)
- 3) Vícerozměrný integrál - Fubini a věta o substituci (15 nebo 20 bodů)

Písemná část trvá 90 minut. Student může používat donesenou literaturu (učebnice, poznámky, zápisky ze cvičení), nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku. Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže indexem, nebo jiným dokladem totožnosti. Student uspěje u písemné části, pokud získal za písemnou část zkoušky alespoň 25 bodů.

### Vzor zadání písemky

- 1) (15 bodů) S použitím věty pro záměnu integrálu a řady spočtete

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx .$$

Výsledek stačí vyjádřit jako součet řady reálných čísel.

- 2) (20 bodů) Mějme funkci

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} dx .$$

- A. Určete pro která  $a \in \mathbf{R}$  daný integrál konverguje. (5 bodů)
- B. Spočtete  $F'(a)$ . (10 bodů)
- C. Spočtete  $F(a)$ . (Hint: K určení integrační konstanty možná budete muset spočítat  $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a)$ .) (5 bodů)

- 3) (15 bodů) Spočtete

$$\iiint_M z \, dx dy dz ,$$

kde  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 4z, x^2 + y^2 \leq 3z^2, x \leq 0\}$  .

### Ústní část zkoušky

Ústní část zkoušky se koná zpravidla následující den po části písemné. Student si vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení

již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.

*Skladba otázek a počty bodů :*

- 1) Klíčový pojem (nebuduje se)
- 2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 4 bodů)
- 3) Lehká věta a důkaz (4 bodů za znění a 8 bodů za důkaz)
- 4) Těžká věta a důkaz (4 bodů za znění a 12 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a těžkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic respektive vět se považuje jejich porozumění a schopnost je používat.

Pokud je součet bodů za písemnou a ústní část alespoň 60 bodů, dostane student ještě doplňkovou otázku na implikace za maximálně 10 bodů.

### Vzor zadání otázek

- 1) sigma algebra (0 bodů)
- 2) distribuční funkce, vztah  $\sigma$  algebry a Dynkinova systému, Leviho věta (12 bodů)
- 3) Fatouovo lemma (12 bodů)
- 4) Radon-Nikodymova věta (16 bodů)

Implikace:

I) Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí? Příslušná tvrzení dokažte, nebo uveďte protipříklad. Nechť  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  je měřitelné funkce.

$$(1) \int_0^1 f(x) dx < \infty$$

$$(2) \int_0^1 f^2(x) dx < \infty$$

$$(3) \|f\|_{L^\infty(0,1)} < \infty$$

### Celkové hodnocení zkoušky

- 1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.
- 2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 25 bodů z písemné zkoušky, alespoň 25 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.
- 3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 85 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.
- 4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 70 bodů, z toho alespoň 25 bodů za písemnou a alespoň 25 bodů za ústní část.

### Seznam klíčových pojmů

- $\sigma$ -algebra
- Borelovské množiny  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$
- míra
- měřitelné zobrazení
- jednoduchá funkce
- (abstraktní) Lebesgueův integrál
- Dynkinův systém
- $L^p(X, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$

### Definice

- úplná míra

- borelovské zobrazení
- charakteristická funkce množiny
- $L^1(X, \mu)$
- $f = g$  skoro všude
- nová definice měřitelnosti - úprava na množině nulové míry
- $\sigma$ -konečná míra
- obdélník a měřitelný obdélník
- součinná  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$
- řezy  $E_x$  a  $E^y$
- esenciální supremum a  $L^\infty(X, \mu)$
- konvergence podle míry
- absolutně spojitá míra ( $\nu \ll \mu$ ) a singulární míra ( $\nu \perp \mu$ )
- distribuční funkce
- borelovská míra

### Lehké věty

- Existence nejmenší  $\sigma$ -algebry
- Spojitost míry
- Zúplnění míry - bez důkazu
- Měřitelnost složeného zobrazení
- Měřitelnost složeného zobrazení v  $\mathbf{R}^2$
- Měřitelnost a limitní přechod
- Aproximace jednoduchými funkcemi
- Vlastnosti abstraktního integrálu
- Leviho věta pro řady
- Fatouovo lemma
- Linearita integrálu
- Lebesgueova věta pro řady
- O spojitě závislosti integrálu na parametru
- Vztah  $\sigma$ -algebry a Dynkinova systému
- O jednoznačnosti míry
- Existence a jednoznačnost součinné míry
- Fubiniova věta
- Vztah konvergence v  $L^p$  a konvergence v míře
- Vztah konvergence s.v. a konvergence v míře
- Existence distribuční funkce

### Těžké věty

- Kritérium měřitelnosti
- Leviho věta
- Lebesgueova věta
- O derivaci podle parametru
- O nejmenším Dynkinově systému
- O měřitelnosti míry řezu
- Věta o substituci - bez důkazu
- Radon-Nykodimova věta
- Lebesgueův rozklad
- Charakterizace distribuční funkce