MARTINGALY A ČÍTACÍ PROCESY 21.2.2018

cíle: 1. Potřebné techniky pro analýzu dat o přežití
2. Doplnění některých partií ke stoch. analýze

I PROCESY SE SPOJ. ČASEM, MARTINGALY
II INTEGRÁLY VŮČI MARTINGALŮM S KON. VARIACÍ
III LIMITNÍ VĚTY PRO MARTINGALY
IV ÚVOD DO CENZOROVÁNÍ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděpodobnostní prostor
$X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodné veličiny
$t \in [0,T]$, T zde bude obvykle konečné, nenáhodné

$X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ t interpretujeme jako čas

X je proces se spojitým časem.

$X_t(\omega) \in \mathbb{R}$ ... stav procesu v čase t.
X_t ... náhodná veličina (měřitelné zobrazení $: \Omega \to \mathbb{R}$).

ω pevné ... $t \mapsto X_t(\omega)$ ... trajektorie procesu X.
každá ta trajektorie může dopadnout jinak,
$X(\omega)$ ... funkce $[0,T] \to \mathbb{R}$ (náhodná funkce).

Definice 1: Buď X stochastický proces.
X nazveme spojitý / zprava spojitý, pokud jeho trajektorie jsou takové, až na množinu míry 0.

$\equiv$ $P[\omega : X(\omega) \text{ není spojitá}] = 0$

$\{\omega : X(\omega) \text{ není spojitá}\} \in \mathcal{F}$ chceme měřitelnost té mn., aby

co když ne? pak definice znamená, že
$\exists N \in \mathcal{F}$ $P(N) = 0$, $\{\omega : X(\omega) \text{ není spoj.}\} \subset N$.

Pokud $A \subset \Omega$ a $\exists N \in \mathcal{F}, P(N) = 0, A \subset N, \dots$ A je P nulová množina.
(netrápíme se tím, že by ta A nemusela být měřitelná).

Definice 2: Buďte X a Y stochastické procesy

(a) X a Y mají stejná konečně rozměrná rozdělení, pokud $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$, $\forall B \in \mathcal{B}^n$:

$$P[\underbrace{(X_{t_1}, \dots X_{t_n})}_{\substack{\text{měřitelné} \\ \text{zobrazení } \Omega \to \mathbb{R}^n}} \in B] = P[(Y_{t_1}, \dots Y_{t_n}) \in B]$$

(! to ještě neznamená, že mají stejná rozdělení.)

(b) X je modifikací Y, pokud

$$P[X_t = Y_t] = 1 \quad \forall t \in [0,T]$$

- potřebujeme, aby byly na st. pstním prostoru (to v (a) nemusí).
- modifikace $\Rightarrow$ stejné kon. rozm. rozdělení
- i Y je modifikací X.

(c) X a Y jsou ekvivalentní, či nerozlišitelné, pokud

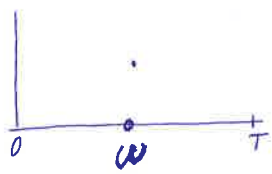
$$P[X_t = Y_t \quad \forall t \in [0,T]] = 1$$

- ekvivalence $\Rightarrow$ modifikace.

Příklad: $X \equiv 0$

$\Omega = [0,T]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, P = rovnoměrné rozdělení na $[0,T]$.

$Y_t(\omega) = \mathbb{1}_{[t=\omega]}$



$$P[X_t = Y_t] = P([0,T] \setminus \{t\}) = 1, \forall t \in [0,T]$$

$$P[X_t = Y_t \quad \forall t \in [0,T]] = P(\emptyset) = 0.$$

$\Rightarrow$ jsou modifikací, ale nejsou nerozlišitelné.

Tvrzení 3: (Postačující podmínka ekvivalence X a Y).
Nechť X je modifikací Y a oba procesy jsou zprava spojité. Pak X a Y jsou nerozlišitelné.

D.: $C_X \in \mathcal{F}$ taková, že $P(C_X) = 1$, $\omega \in C_X$ je $X(\omega)$ zprava spoj.
$C_Y \in \mathcal{F}$ $P(C_Y) = 1$, $\omega \in C_Y$ $Y(\omega)$ zprava spoj.

$A_q \in \mathcal{F}$: $P(A_q) = 1$, $\omega \in A_q$, $X_q(\omega) = Y_q(\omega)$
... existence A_q zaručena tím, že X je modifikací Y.

$$\Omega_0 = C_X \cap C_Y \cap \Big(\bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q \in [0,T]}} A_q\Big) \cap A_T$$ ... spočetný průnik množin míry 1.
$\Rightarrow P(\Omega_0) = 1$

$\omega \in \Omega_0$: $\forall q \in \mathbb{Q} \cap [0,T]$: $X_q(\omega) = Y_q(\omega)$
$\forall t \in [0,T]$: $X_t(\omega) = \lim_{q \to t+} X_q(\omega)$

$Y_t(\omega) = \lim_{q \to t+} Y_q(\omega)$

rovnost pravých stran máme
$\Rightarrow$ i rovnost levých stran

$$P[X_q(\omega) = Y_q(\omega) \ \forall q \in \mathbb{Q}] = 1. \qquad \square$$

Je-li X spojitý / zprava spojitý, pak existuje jeho modifikace Y, taková, že všechny trajektorie Y jsou spojité, nebo zprava spojité. (a ta modifikace onde dohonu ekvivalencí).

Budeme potřebovat $E \int_0^T X_t \, dt$ $\Rightarrow$ potřebujeme $t \mapsto X_t$ měřitelný
$$\| \qquad \int_\Omega \int_0^T X_t \, dt \, dP.$$
To, že $\forall t \in T$ je $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ měřitelné nestačí!

Definice 4: (Měřitelný proces)

Stochastický proces X je měřitelný, pokud je zobrazení

$(\omega, t) : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ měřitelné, neboli

$\forall a \in \mathbb{R} : \{(\omega, t) : X_t(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$.

(pak už se nemusíme bát těch dvoj. integrálů)

Lemma 5: (zprava spoj. proces je měřitelný)

Buď X stoch. proces, který je zprava spojitý.

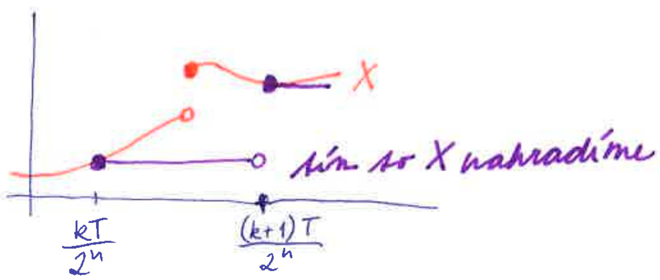
Pak X je měřitelný. (tedy má měřitelnou modifikaci).

(mohlo by se stát, že množina, kde traj. spoj. nejsou je neměřitelná → pak by ten důkaz nefungoval.)

D. BÚNO všechny trajektorie jsou zprava spojité (bereme modifikaci)

Ozn. $X_t^n(\omega)$; rozdělme interval $[0,T]$ na intervaly $\left[\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right)$, $k = 0, 1, \dots 2^n - 1$ a $\{0\}$ $\left(\left(\frac{-T}{2^n}, \frac{0}{2^n}\right], k = -1\right)$.

$$X_t^n(\omega) = X_{\frac{kT}{2^n}}(\omega) \quad , t \in \left[\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right)$$



Potom $X_t^n(\omega) \longrightarrow X_t(\omega) \quad \forall \omega, \forall t$

$$\{(\omega, t), X_t^n(\omega) \leq a\} = \bigcup_k \underbrace{\{\omega : X_{\frac{kT}{2^n}}(\omega) \leq a\} \times \left[\frac{kT}{2^n}, \frac{(k+1)T}{2^n}\right)}_{\in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}}$$

Zobrazení $X^n : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$

je měřitelné a X je jeho limitou $\Rightarrow$ X je měřitelné. $\square$

Proces X považujeme za měřitelný, existuje-li jeho měřitelná modifikace.

Spojitost zprava v Tvrzení 3 a Lemmatu 5 lze nahradit spojitostí zleva. V tvrzení 3 ale nelze mít trajektorie X a Y jak zleva, tak zprava spojité. (jako pomíchané).

~~Ekta~~

Definice 6: (integrovatelnost a omezenost)

Stochastický proces X je

(a) integrovatelný, pokud $\sup_{0\le t\le T} E|X_t| < \infty$.

(b) kvadraticky integrovatelný, pokud $\sup_{0\le t\le T} E X_t^2 < \infty$

(c) omezený, pokud pro nějakou konst. K:

$$P\left[\sup_{0\le t\le T} |X_t| \le K\right] = 1$$

(nepotř. pro $\forall \omega$, ale stačí s pstí 1).

Proces se "vyvíjí v čase" ... $t \mapsto X_t$.

Definujeme „posloupnost" σ algeber zachycující události spojené s procesem X.

Definice 7:

Buď $\{\mathcal{F}_t, t\in[0,T]\}$ třída σ-algeber na Ω.

Platí-li, že $\forall\, 0\le s\le t\le T$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, pak $\{\mathcal{F}_t\}$ nazveme filtrací.

(zvětšují se s časem a jsou uvnitř $\mathcal{F}$.)

Označme $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{t+h}$. (je σ-algebra (průnik σ alg.)).

$\{\mathcal{F}_t\}$ je zprava spojitá, pokud $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, $\forall t \in [0,T)$.

Ozn. $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{h>0} \mathcal{F}_{t-h}\right)$. $\{\mathcal{F}_t\}$ je zleva spojitá, pokud $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$ $\forall t \in (0,T]$.

pozor na polouz. intervaly!

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je úplný, pokud $\mathcal{F}$ obsahuje všechny P-nulové množiny. (tj. $\forall N \in \mathcal{F}: P(N)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall A\subset N, A \in \mathcal{F}$ a definujeme $P(A)=0$.)

ZÚPLNĚNÍ FILTRACE:

Označme $\mathcal{N} = \{A : \exists N \in \mathcal{F}, A \subset N, P(N) = 0\}$

$\mathcal{N}_t = \{A : \exists N \in \mathcal{F}_t, A \in N, P(N) = 0\}$

$\mathcal{F}_t^o := \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{F}_t)$

$\mathcal{F}_t^a := \sigma(\mathcal{N}_t \cup \mathcal{F}_t)$ (jen nul. mn. do času t.)

② 28. 2. 2018

Filtrace: $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$.

Máme-li proces $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$

Víme X_t je $\mathcal{F}$ měřitelná n. veličina.

$\sigma(X_t)$ nejmenší σ algebra, vůči které je X_t měřitelná n. v.

$\forall B \in \mathcal{B}$ platí $X^{-1}(B) \in \sigma(X_t)$.

$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ = nejmenší σ algebra, vůči které je měřitelná X_s $\forall 0 \leq s \leq t$.

Očividně $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s) \subset \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$ $= \mathcal{F}_t^X$ $\forall s \leq t$.

$\mathcal{F}_t^X$ je kanonická filtrace procesu X.

Definice 8 (Adaptovanost procesu)

Buď X stochastický proces. $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrace na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pak X je adaptovaný na $\{\mathcal{F}_t\}$, pokud $\forall t$ je X_t měřitelná vůči $\mathcal{F}_t$.

(Nutně tedy $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$ $\forall t$).

Platí tedy: $E[X_s | \mathcal{F}_t] \overset{s.j.}{=} X_s$ $\forall s \leq t$, je-li X $\mathcal{F}_t$-adaptovaný.

Tedy ta filtrace zachycuje chování (historii) procesu.

Čítací procesy

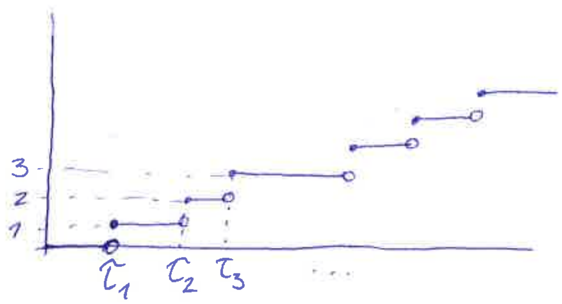
Příklad: Poissonův proces $N=\{N_t, t\ge 0\}$

je charakterizován vlastnostmi

- $P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{(\lambda(t-s))^k}{k!}$, $s<t$

  (poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t-s)$, $\lambda>0$).

- Přírůstky $N_t - N_s$ na disj. intervalech jsou nezávislé
- Trajektorie N jsou zprava spojité
- $N_0 = 0$.



Čítací proces ... v náh. okamž. poskočí o 1.

N_t je počet událostí nastávajících do času t.

... • $\tau_k - \tau_{k-1}$ má exponenciální rozdělení s parametrem λ $\left(f(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda x}\right)$.

Poissonův proces je Markovský proces. (matice $\begin{pmatrix}\lambda & -\lambda & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \lambda\end{pmatrix}$)
(změna stavu jen o 1 výše).

Poissonův proces s proměnnou intenzitou

- $P(N_t - N_s = k) = \exp\Big\{\underbrace{-\int_s^t \lambda(u)\,du}_{\Lambda(t)-\Lambda(s)}\Big\}\cdot\dfrac{\left(\int_s^t \lambda(u)\,du\right)^k}{k!}$

(Λ riziko... zde je Λ spojitá funkce, lze i zobecnit).

→ ! už doba mezi přírůstky není exponenc. rozdělená!

doba čekání na 1. událost $P[\tau_1 > t] = P[N_t = 0] =$
$= \exp(-\Lambda(t))$.

Potřebujeme, aby $\Lambda(t) \to \infty$, $t \to \infty$, aby došlo k nek. událostem s $P=1$.

$\Rightarrow$ hustota τ_1 je $\lambda(t) \cdot \exp\{-\Lambda(t)\} = \lambda(t) \cdot \exp\{-\int_s^t \lambda(u)\,du\}$

není exponenciální

$\to$ semimarkovský proces.

(ale ještě pořád máme nezávislost přírůstků).

$U_1, U_2, \ldots U_K$ iid $\quad P(U>0)=1$

$N_t = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{1}[U_i \le t]$ $\quad$ pokud U_i abs. spojité

$\Rightarrow N_t - N_{t-} = N_t - \lim_{s \to t-} N_s \in \{0,1\}$.

$$Cov(N_s, N_t - N_s) = cov\left(\sum_{i=1}^{K} \mathbb{1}[U_i \le s], \sum_{i=1}^{K} \mathbb{1}[U_i \in (s,t]]\right) =$$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{K}}\, K \cdot Cov\left(\mathbb{1}_{[U_i \le s]}, \mathbb{1}_{[U_i \in (s,t]]}\right) =$$

$$= \underbrace{E\left(\mathbb{1}_{[U_i \le s]} \cdot \mathbb{1}_{[U_i \in (s,t]]}\right)}_{=0} - E\,\mathbb{1}[U_i \le s] \cdot E\,\mathbb{1}_{[U_i \in (s,t]]} =$$

$$= -K \cdot P[U_1 \le s] \cdot P[s < U_1 \le t] \quad \text{může být } \neq 0.$$

Definice 9:

Stochastický proces $N = \{N_t, t \in [0,T]\}$ nazveme $(\mathcal{F}_t\text{-})$ čítacím procesem, kde $\{\mathcal{F}_t\}$ je daná filtrace,

Pokud:

(i) $N_0 = 0$ s.j.

(2) $N_t < \infty \quad \forall t \in [0,T]$ s.j. (ne nekon. mnoho událostí v kon. čas. úseku)

(iii) Trajektorie N jsou zprava spojité, po částech konstantní a jejich skoky $N_t - N_{t-} \in \{0,1\}$ (jsou jen jednotkové) s.j. $\forall t$.

(iv) N je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný.

Pozn. Proces splňující (i)-(iii) je $\mathcal{F}_t^N$-čítací, (vůči kanonické filtraci)
což je vidět z definice $\mathcal{F}_t^N$.
(Řekneme-li, že N je čítací, tak buď je $\mathcal{F}_t$ zřejmá z kontextu, nebo je kanonická).

Definice 10:
Buď X ~~[illegible]~~ càdlàg (zprava spojitý s limitami zleva) proces a $\{\mathcal{F}_t\}$ nějaká filtrace.

automaticky předpokl. regularitu trajektorií. (pro nás není nijak omezující.)

X je $\mathcal{F}_t$ martingal, pokud
(i) X je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný
(ii) $E|X_t| < \infty \quad \forall t \geq 0$ (je v L^1)
(iii) $E[X_t | \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=} X_s \quad \forall s \leq t$.

(Nespecifikujeme-li filtraci, pak je buď kanonická, nebo zřejmá z kontextu.)

Pokud platí (i), (ii),
(iii)' $E[X_t | \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{\geq} X_s \quad \forall s \leq t$, pak X je submartingal
(iii)'' $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s \quad \forall s \leq t$, pak X je supermart.

(Submartingal a Supermartingal současně $\Rightarrow$ martingal)

Čítací proces je určitě submartingal, (pokud je integrovatelný:)
N je adaptovaný, $E[N_t | \mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s + N_s | \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=}$

$$= E[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] + E[N_s | \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=} E[\underbrace{N_t - N_s}_{\geq 0 \text{ s.j.}} | \mathcal{F}_s] + N_s \overset{s.j.}{\geq} N_s$$

Je-li X martingal, pak $|X|$ je submartingal
$$E[|X_t| \,|\, \mathcal{F}_s] \underset{\substack{\text{Jensenova}\\ \text{nerovnost,}\\ |\cdot| \text{ konvexní}}}{\geq} |E[X_t | \mathcal{F}_s]| \overset{s.j.}{=} |X_s|$$ (podle (ii) $E|X_s| < \infty$.

DOOBOOV MEYERŮV ROZKLAD A KVADRATICKÁ VARIACE.

Doobovův Meyerův rozklad říká, že každý submartingal X lze rozložit na součet $X = M + A$, kde M je martingal a A je neklesající proces (a to hezky měřitelný).

Definice 11 : (prediktabilita)

Buď $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor s filtrací $\{\mathcal{F}_t\}$.

Prediktabilní σ-algebra $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je nejmenší σ-algebra (nejmenší syst. množin) taková, že obsahuje množiny typu

$$\{0\} \times A, \quad A \in \mathcal{F}_0$$

$$(s, t] \times A, \quad A \in \mathcal{F}_s, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

($\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je σ-algebra na $[0,T] \times \Omega$; není to pod sigma algebra $\mathcal{F}$, ale je $\subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$.)

Proces $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ je $\mathcal{F}_t$ prediktabilní, je-li měřitelný vůči $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ (neboli $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \leq a\} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ $\forall a \in \mathbb{R}$).

a proces $X = \{X_t, t \in [0,T]\}$ je jednoduchý $\mathcal{F}_t$-prediktabilní, pokud

$$X_t = \xi_0 \cdot 1\!\!1_{[t=0] \times A_0} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot 1\!\!1_{[t_i < t \leq t_{i+1}] \times A_i},$$

kde $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} \leq T$, $A_0 \in \mathcal{F}_0$, $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$,

ξ_0 je $\mathcal{F}_0$-měřitelná n. vel. a ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$-měřitelná n. vel.

$$X_t(\omega) = \xi_i(\omega) \cdot 1\!\!1_{A_i}(\omega)$$

pro $t \in (t_i, t_{i+1}]$

což znamená, že na základě znalostí z času t_i známe hodnotu X na celém intervalu $(t_i, t_{i+1}]$.

~~Definice~~ Tvrzení 12:

Buď X $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces.
Pak platí $\forall t>0$ je X_t $\mathcal{F}_{t-}$-měřitelná náh. vel.

Připomeňme $\mathcal{F}_{t-}$ je $\sigma\left(\bigcup_{h>0} \mathcal{F}_{t-h}\right)$, ale $\mathcal{F}_t$ tam být nemusí
(může být $\mathcal{F}_{t-}$ ostře podsigma algebra $\mathcal{F}_t$.)

Speciálně X je $\mathcal{F}_{t-}$ a také $\mathcal{F}_t$ adaptovaný proces.

D: X můžeme zapsat, jako limitu ~~ze~~ vhodných jednoduchých funkcí, tzn.

$$X(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k_{i,n} \cdot \mathbb{1}_{B_{i,n}}(t,\omega), \quad B_{i,n}\in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t), \quad k_{i,n}\in\mathbb{R}.$$

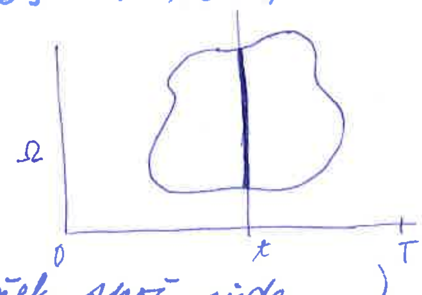
Stačí ukázat, že $\mathbb{1}_{B_{i,n}}(t,\omega)$ je $\mathcal{F}_{t-}$-měřitelné zobrazení (pro dané t).

Vezměme $B\in\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ chceme ukázat:

$\forall t: \{\omega: \mathbb{1}_B(t,\omega)=1\}\in \mathcal{F}_{t-}$. (automaticky z toho potom $\{\omega:\mathbb{1}_B(t,\omega)=0\}\in\mathcal{F}_{t-}$)

$\mathbb{1}_B(t,\omega) = B_t = \{\omega: (t,\omega)\in B\}$ t-řez množinou B.

Ozn. $\mathcal{A} = \{B: B_t \in \mathcal{F}_{t-}\}$



$\mathcal{A}$ je σ-algebra, protože $\mathcal{F}_{t-}$ je σ-algebra. ($\emptyset$, doplněk, spoč. sjedn. ...)

stačí ukázat, že množina typu $(s,u]\times A$, $A\in\mathcal{F}_s$ $\in \mathcal{A}$.

$$\underbrace{((s,u]\times A)_t}_{t\text{-řez}} = \begin{cases} \emptyset, & t\notin (s,u] \dots \emptyset\in\mathcal{F}_{t-} \ \forall t. \\ A, & t\in(s,u] \dots A\in\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_{t-}, \text{ protože } s<t. \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}\supset\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$.

$\square$

(3) 7.3.2018

Jaká podmínka je postačující pro prediktabilitu?

σ-alg. $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$, $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ filtrace, je nejmenší nad množinami $A \times \{0\}$, $A \in \mathcal{F}_0$
$A \times (s,t]$, $A \in \mathcal{F}_s$, $s < t \le T$

$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$.

X je prediktabilní, je-li zobrazení $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ měřitelné vůči $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$.

Tvrzení 13: Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrace a X zleva spoj. $\mathcal{F}_t$-adapt. stoch. proces. Pak X je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.

blížíme se zleva ... víme líp a líp, co se stane ... těsně před tímto časem se změní ten stav.

Důkaz: aproximujeme X posloupností procesů X^n

$$X_t^n = \underbrace{X_0}_{\mathcal{F}_0\text{-měř. náh. vel.}} \cdot \mathbb{1}_{[s=0]} + \sum_{i=0}^{2^n-1} \underbrace{X_{\frac{iT}{2^n}}}_{\mathcal{F}_{\frac{iT}{2^n}}\text{ měřitelná náh. vel.}} \cdot \mathbb{1}_{\left(\frac{iT}{2^n}, \frac{(i+1)T}{2^n}\right]}(t).$$

Jednoduchý prediktabilní proces.

X_t^n je měřitelné zobrazení $(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

X_t je měřitelné, protože $X_t^n \to X_t$ $\forall t$ $\forall \omega$

(viz. diskuse o P-nul. množ.).

$\square$

Tvrzení 14:

Proces X je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní právě, když je měřitelný vůči nejmenší σ-algebře na $\Omega \times [0,T]$, kterou generují $\mathcal{F}_t$-adaptované procesy.

Y je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný, zleva spojitý $\overset{T13}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.

$\sigma(Y)$ je nejmenší σ-alg. na $\Omega \times [0,T]$ taková, že $\forall a \in \mathbb{R}$
$\{(\omega,t);\ Y_t(\omega) \le a\} \in \sigma(Y)$.

Ozn.
$\mathcal{L}$ je nejmenší σ-algebra taková, že $\forall$ zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces je $\mathcal{L}$-měřitelný.

Z tvr. 13. snadno $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je generována množinami $A \times \{0\}$, $A \times (s,t]$.

Libovolné dělení $[0,T]$: $0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{1}_{A_0} \cdot \mathbb{1}_{[t=0]} + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{B_i} \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$, tvoří jednoduchý zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adapt. proces.

$A_0 \in \mathcal{F}_0$ $\qquad B_i \in \mathcal{F}_{t_i}$

Tento proces generuje σ-alg. $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$.
Je složen z generátorů $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ a zároveň musí být $\mathcal{L}$-měř.

$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_t) = \mathcal{L}$ $\qquad \square$

(Vedlejší výsledek σ-alg. $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ je generována zleva spoj. predikt. procesy.)

Zprava spoj. procesy obecně $\mathcal{F}_t$-prediktabilní nejsou.

Př. M martingal zprava spojitý a s limitou zleva.

$E[M_t \mid \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=} M_s$
$s < t$. $\qquad s \to t$-(zleva)
$E[M_t \mid \mathcal{F}_{s-}] \overset{s.j.}{=} M_{t-}$ (limitu zleva máme zaruč.)

obecně ale $P[M_t \neq M_{t-}] > 0$.

M_{t-} je $\mathcal{F}_t$ měř. n.v., ale M_t nemusí být.

Tvrzení 15:

Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrace. Pak $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je generována množinami typu $A \times \{0\}$ $A \in \mathcal{F}_0$

$A \times [s,t)$ $A \in \mathcal{F}_{s-}$, (stačí [ ) a [ ])

$0 < s < t \leq T$.

Důkaz: nebude.

Věta 16: (Doobův Meyerův rozklad).

Buď X zprava spojitý nezáporný $\mathcal{F}_t$-submartingal. (nezáporný = zdola om.)

Pak existují zprava spoj. $\mathcal{F}_t$-martingal M

a zprava spojitý neklesající ~~proc~~ $\mathcal{F}_t$-~~adaptovaný~~ predikovatelný proces A, takové, že:

$$EA_t < \infty \ , \ A_0 \overset{s.j.}{=} 0 \ \text{(pro jednoznač. } A_0 = 0)$$

a $\boxed{X_t = M_t + A_t}$ s.j.

a navíc tento rozklad je jednoznačný až na modifikaci.

Pokud X navíc je omezený, pak M je stejnoměrně integrovatelný, a A je integrovatelný.

! připomenout

stejn. integrovatelnost:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_t E\left(|M_t| \cdot 1\!\!1_{[|M_t|>n]}\right) = 0$$

jde hlavní o to sup., jinak to pl.

integrovatelnost:

A je proces s kon. variací, variace je rovna jeho hodnotě...

Důsledek 17:

Buď N čítací proces, $N = \{N_t, t \in [0,T]\}$, N je adaptovaný na zprava spoj. filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$ $(\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t)$,

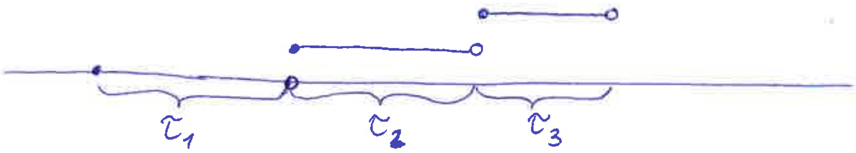
$$EN_t < \infty \ \forall t \geq 0.$$

Pak existuje až na modifikaci jednoznačný rozklad

$N_t = M_t + A_t$, M_t ... martingal,

A_t ... neklés., $A_0 = 0$, $\mathcal{F}_t$-predikt.

Poissonův proces



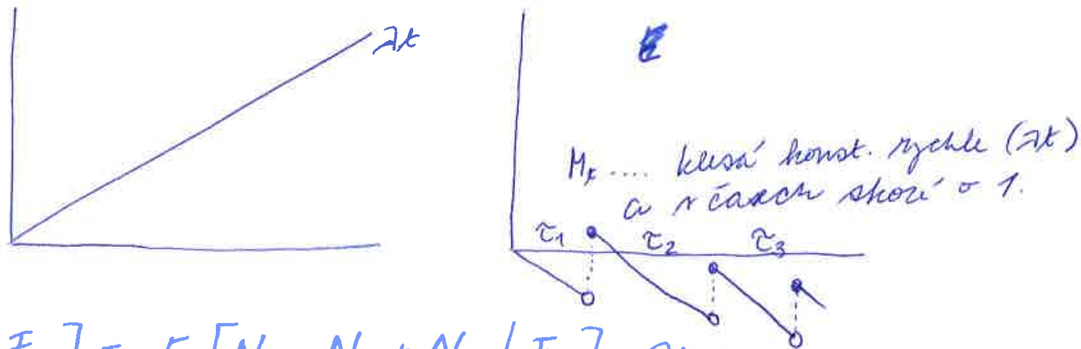
$\tau_1 \sim \exp(\lambda)$,

$\tau_2 \sim \exp(\lambda)$, $\quad \tau_1, \tau_2, \tau_3 \perp\!\!\!\perp$.

$\tau_3 \sim \exp(\lambda)$,

$M = 0$, by skoky A $\to$ NE ať A není prediktabilní takto!

$M_t = N_t - \lambda t$, $A_t = \lambda t$ (spojitý $\Rightarrow$ prediktabilní).



$$E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = E[N_t - N_s + N_s \mid \mathcal{F}_s] - \lambda t =$$

$$= E[\underbrace{N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s}_{\substack{\perp\!\!\!\perp \text{ přír.} \\ \lambda(t-s)}}] + N_s - \lambda t = \lambda(t-s) + N_s - \lambda t =$$

$$= N_s - \lambda s = M_s.$$

Pokud M je martingal a $EM_t^2 < \infty \Rightarrow M^2$ je submartingal (nezáporný)

$\Rightarrow$ Takže existuje jeho rozklad.

Důsledek 18:

Buď M zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal a $EM_t^2 < \infty \; \forall t$. Pak podle věty 16 existuje až na modifikaci jediný $\mathcal{F}_t$-prediktabilní neklesající proces začínající v 0, značený

$$\langle M \rangle_t = \langle M, M \rangle_t \;, \; t \geq 0.$$ nazývá se prediktabilní (kvadratická) variace procesu M

Pro $\langle M, M \rangle$ platí:

$$M^2 - \langle M, M \rangle = \{ M_t^2 - \langle M, M \rangle_t \}$$ je zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal.

Speciálně $E\langle M, M \rangle_t < \infty$ a $\langle M, M \rangle_0 = 0$ s.j.

Vezmeme dva martingaly M, N (zprava spoj., $\mathcal{F}_t$-adapt.)
$EM_t^2 < \infty$, $EN_t^2 < \infty$.

$M+N$, $M-N$ jsou opět $\mathcal{F}_t$-martingaly s kon. 2. momenty.

$\exists$ $\langle M+N, \cancel{M}M+N \rangle$, $\langle M-N, M-N \rangle$ tak, že $(M+N)^2 - \langle M+N, M+N \rangle$, $(M-N)^2 - \langle M-N, M-N \rangle$ jsou martingaly
(součet marting. je martingal.

odečteme je:

$$M^2 + 2MN + N^2 - (M^2 - 2MN - N^2) = 4MN$$

$$4MN - (\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle)$$ je martingal

$$MN - \frac{1}{4}(\underbrace{\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-\cancel{\ast}N, M-N \rangle}_{})$$ je martingal.

rozdíl dvou neklesajících procesů je proces s kon. variací (může být klesající).

Označme $\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle)$ a tento proces budeme nazývat

Kovariací procesů M, N.
(!neplést s kovariancí!)

Důsledek 19:

Buďte M, N zprava spoj. $\mathcal{F}_t$-martingaly s kon. 2. mom. Pak existuje až na modifikaci jediný $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces s kon. variací, začínající v nule, značený

$$\langle M,N\rangle = \{\langle M,N\rangle_t, t \geq 0\}, \text{ takový, že}$$

$M \cdot N - \langle M,N\rangle$ je zprava spoj. $\mathcal{F}_t$-martingal.

Poznámka: z D19 víme, že

$$E[M_t \cdot N_t - M_s \cdot N_s \mid \mathcal{F}_s] = E[\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s \mid \mathcal{F}_s]$$

$s=0$

$$E\, M_t N_t - E M_0 N_0 = E\langle M,N\rangle_t$$

z martingalové vlastnosti: $E M_t = E M_0 \ \forall t$,
$E N_t = E N_0 \ \forall t$.

$$(E M_t N_t - E M_t \cdot E N_t) - (E M_0 N_0 - E M_0 E N_0) = E\langle M,N\rangle_t$$

$$\operatorname{cov}(M_t, N_t) - \operatorname{cov}(M_0, N_0) = E\langle M,N\rangle_t$$

pokud $M_0 = 0$, nebo $N_0 = 0$ $\implies \operatorname{cov}(M_t, N_t) = E\langle M,N\rangle_t$.

a podobně $\operatorname{cov}(M_t, N_t) - \operatorname{cov}(M_s, N_s) = E\langle M,N\rangle_t - E\langle M,N\rangle_s$.

~~Důsledek~~ Poznámka:

- $M \cdot N$ je martingal $\iff \langle M,N\rangle = 0$ s.j.
- M a N jsou nezávislé martingaly ($\sigma(M_t) \perp\!\!\!\perp \sigma(N_t)$ $\forall t \geq 0$).

$\implies$ $M \cdot N$ je martingal vůči sdružené filtraci obsahující $\{\mathcal{F}_t^M\}$, $\{\mathcal{F}_t^N\}$.

$E[M_t \cdot N_t \mid \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=} M_s \cdot N_s$

$$\int_F M_t \cdot N_t \, dP = \int_F M_s \cdot N_s \, dP \qquad F \in \sigma(\mathcal{F}_s^M \cup \mathcal{F}_s^N)$$

stačí pro $F = F_1 \cap F_2$, $F_1 \in \mathcal{F}_s^M$, $F_2 \in \mathcal{F}_s^N$.

speciálně pro nezávislé martingaly platí, že jejich kovariace je s.j. nulová.

④ 14. 3. 2018

II STOCHASTICKÝ INTEGRÁL

Chceme vystudovat $\int X_t \, dZ_t \; \dots \; \int X_t(\omega) \, dZ_t(\omega)$.

Elementární stochastický integrand

Mějme časový interval $[0,T]$.

$$P = \{0 = t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = T\}, \; N \in \mathbb{N}.$$

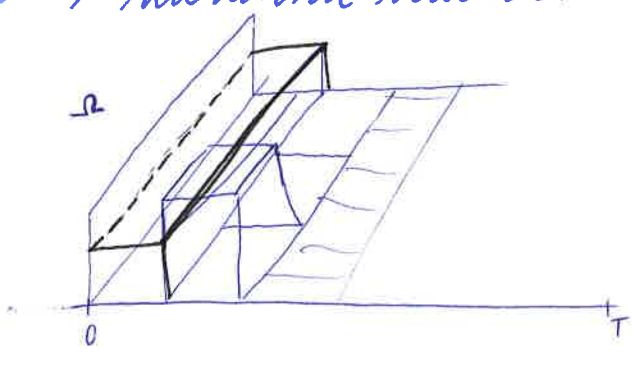
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ filtrovaný pravděpodob. prostor.

Def. 1: $(\mathcal{E}(\mathcal{F}_t))$:

Mějme dělení P, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Elementárním stochastickým integrandem vůči filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$ nazveme proces typu

$$X_t(\omega) = \begin{cases} \xi_0(\omega), & t = 0 \\ \xi_i(\omega), & t \in (t_i, t_{i+1}], \; i = 1, \dots N, \end{cases}$$

kde ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$ měřitelná jednoduchá (tj. s konečně mnoha hodnotami) náhodná veličina.



$\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ je množina všech elementárních integrandů.