ale pro Z spojitý, nebo předikovatelné $\|Z\|_{I_p} = (E|Z_\infty|^p)^{1/p}$.

$\square$

Tvrzení 4: (Charakterizace martingalu stoch. integrálu).
Buď M adaptovaný integrovatelný proces ($E|M_t|<\infty$) {M zprava spojitý} je $\mathcal{F}_t$-martingal, právě, když

$$E\int X\,dM = 0 \quad \forall\ X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t),\ X_0 = 0.$$

D: Nechť M je martingal.

$$\int X\,dM = 0\cdot M_0 + \sum_{i=1}^{N} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

$$E\int X\,dM = E\sum_{i=1}^{N} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) = \sum_{i=1}^{N} E\,\xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} E\left[E[\xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) / \mathcal{F}_{t_i}]\right] = \sum_{i=1}^{N} E[\xi_i \underbrace{E[M_{t_{i+1}} - M_{t_i} / \mathcal{F}_{t_i}]}_{=0 \text{ s.j.}}] = 0$$

ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$-měřitelná.

martingal
$= E[M_{t_{i+1}} - M_{t_i} / \mathcal{F}_{t_i}] \overset{s.j.}{=} 0$

opačná implikace:

$E\int X\,dM = 0$ musí platit speciálně i pro $X = \xi_s \cdot 1\!\!1_{(s,t]}$,
ξ_s je jednoduchá $\mathcal{F}_s$ měřitelná n. velič.

$$0 = E[\xi_s \cdot (M_t - M_s)] = E\left[E[\xi_s (M_t - M_s) / \mathcal{F}_s]\right] =$$

$$= E\left[\xi_s (E[M_t / \mathcal{F}_s] - M_s)\right]$$

$\mathcal{F}_s$-měř. $\qquad$ $\mathcal{F}_s$ měřitelná

$\xi_s = 1_F$, $F \in \mathcal{F}_s$

$$\forall F \in \mathcal{F}_s \qquad \int_F E[M_t / \mathcal{F}_s]\,dP = \int M_s\,dP$$

$$\int_F E[M_t / \mathcal{F}_s]\,dP = \int_F M_t\,dP \quad\Rightarrow\quad E[M_t / \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=} M_s$$

(integrovatelnost a adaptovanost a spoj. zprava jsme předpokládali.)

$\square$

Pozn: Pokud $E\int X\,dM \geq 0 \quad \forall X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)\ X_0 = 0$,
pak jde o charakterizaci submartingalu.
$\leq$ ... supermartingalu.

Tvrzení 5:
Zprava spojitý L_2-martingal M, ($E M_t^2 < \infty\ \forall t$), je L_2-integrátor.
(Tedy $\sup\{E(\int X\,dM)^2,\ X \in \mathcal{E},\ |X| \leq 1\} \leq K < \infty$).

D. Buď $X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$

$$E\left(\int X\,dM\right)^2 = E\left(\xi_0 M_0 + \sum_{i=1}^{N} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\right)^2 =$$

$$= E\Big(\xi_0^2 M_0^2 + \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \sum_{i=1}^{N} \xi_0 \xi_i M_0 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) +$$

$$+ \sum_{i \neq j}\sum \xi_i \xi_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\Big) = (*)$$

- $$E\left(\xi_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right) = E\left[E\left[\xi_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] =$$

$$= E\left[\xi_i^2 E\left[M_{t_{i+1}}^2 - 2M_{t_{i+1}} M_{t_i} + M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] =$$

$$= E\left[\xi_i^2 \left(E\left[M_{t_{i+1}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] - 2 M_{t_i} \underbrace{E\left[M_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]}_{\overset{s.j.}{=} M_{t_i}} + M_{t_i}^2\right)\right] =$$

$$= E\left[\xi_i^2 \left(E\left[M_{t_{i+1}}^2 \mid \mathcal{F}_t\right] - E\left[M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)\right] =$$

$$= E\left[E\left[\xi_i^2 (M_{t_i}^2 - M_{t_i}^2) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] = E\,\xi_i^2 (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2).$$

- $$E\left[\xi_i \xi_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\right] =$$

$$= E\Big[E\big[\underbrace{\xi_i \xi_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})}_{\mathcal{F}_{t_j}\text{ měř.}} \underbrace{(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}\big]}_{E[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}] \overset{s.j.}{=} 0}\Big) \overset{s.j.}{=} 0$$

$$(*) = E\left(\xi_0^2 M_0^2 + \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2)\right) \overset{|\xi_i| \le 1}{\underset{\forall i}{\le}} E\left(M_0^2 + \sum_{i=1}^{N}(M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2)\right) =$$

$$= EM_T^2 < \infty$$

⑤ 21. 3. 2018

$\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ $\quad \xi_0 \mathbb{1}_{[t=0]} + \sum_{i=1}^{N} \xi_i \mathbb{1}_{(t_i < t < t_{i+1}]}$

$0 = t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1} = T$

ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$ měřitelná (jednoduchá)

$\int X \, dZ$ $\quad Z$ stochastický integrátor

Post. podm.

tvrzení 3: Z zprava spoj. adapt., s kon. variací

$(|Z|_V(\omega) < \infty \ \forall \omega$, $E(|Z_V|)^p < \infty$ pro něj. $p \ge 1$.

$p = 1$ pro nás základní.

Tvrzení 5: Z zprava spoj. martingal a $E(M_T)^2 < \infty$.

$\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ elementární integrandy

$X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ $\quad \int X \, dZ = \xi_0 (Z_0 - Z_{0-}) + \sum_{i=1}^{N} \xi_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})$

$\mathcal{E}^{\uparrow}(\mathcal{F}_t)$ procesy, které jsou bodovými limitami neklesajících posloupností v $\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$

$\{X_t^n\} \subset \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ $\ \forall \omega \ X_t^n(\omega) \nearrow X_t(\omega) \in \mathcal{E}^{\uparrow}(\mathcal{F}_t)$.

$H \in \mathcal{E}^{\uparrow}(\mathcal{F}_t)$ $\quad \|H\|_{Z-p}^{*} = \sup\left\{ E\left(\int X \, dZ\right)^p \right)^{1/p}, X \in \mathcal{E}, X \le |H| \}$

~~+ H nezáporné.~~

Pro libovolný měřitelný a $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

$$\|F\|^*_{Z-p} = \inf\{\|H\|^*_{Z-p},\ H \in \mathcal{E}^{\uparrow}(\mathcal{F}_t),\ H \ge |F|\}$$

Měřitelný adaptovaný proces F je integrovatelný vůči Z, existuje-li posloupnost elementárních integrandů $\{X^n\}$, taková, že

$$\|F - X^n\|^*_{Z-p} \longrightarrow 0.$$

Proč? Protože potom

$$\|X^n - X^m\|^*_{Z-p} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0, \text{ cauchyovská;}$$

$$\|$$

$$\left(E\left(\int X^n dZ - \int X^m dZ\right)^p\right)^{1/p} \longrightarrow 0$$

$\{\int X^n dZ\}$ je L_p-cauchyovská

$\exists$ limita : $\int F dZ$ $\quad \left(E\left(\int X^n dZ - \int F dZ\right)^p\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Speciálně: stačí omezenost F + $\begin{cases} \text{martingal } EZ_T^2 < \infty \\ |Z|_V < \infty,\ E|Z|_V < \infty \\ \forall \omega \end{cases}$

k existenci $\int F dZ$.

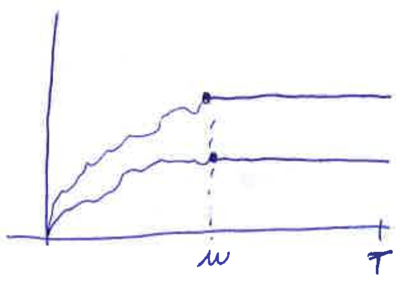
Stochastický integrál jako proces

Zastavený proces: $Z = \{Z_t, t \in [0,T]\}$

Vezmeme $u \in [0,T]$ a označme

$$Z^u = \{Z_{u\wedge t},\ t \in [0,T]\}, \text{ kde}$$

$$Z_{u\wedge t}(\omega) = \begin{cases} Z_t(\omega), & t \le u \\ Z_u(\omega), & t > u \end{cases}$$



Existuje-li $\int F\,dZ$, pak můžeme definovat stochastický proces

$$\left\{ \int_0^t F\,dZ,\ t \in [0,T] \right\}, \text{ kde } \int_0^t F\,dZ = \int F\,dZ^t,$$
(Z zastavené v t)

kde $\int_0^t F\,dZ = \int F\,dZ^t$

$$X \in \mathcal{E}:\ \int_0^t X\,dZ = \int X\,dZ^t = \xi_0(Z_0 - Z_{0-}) + \sum_{i=1}^{N} \xi_i (Z_{t\wedge t_{i+1}} - Z_{t\wedge t_i}) =$$

$$= \xi_0 (Z_0 - Z_{0-}) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) + \xi_k \cdot (Z_t - Z_{t_k})$$

$t_k < t \leq t_{k+1}$

$\mathcal{F}_t$ - měřitelná n. vel.

$\Rightarrow$ proces $\int X\,dZ = \left\{ \int_0^t X\,dZ,\ t \in [0,T] \right\}$

je $\mathcal{F}_t$ - adaptovaný.

Dvě pomocná lemmata na rozšiřování:

Lemma A1: Buď E neprázdná množina, $\mathcal{S}$ systém podmnožin na E uzavřený na průniky. Buď $\mathcal{H}$ vektorový prostor funkcí na E takový, že

(1) $\mathbb{1}_E \in \mathcal{H}$, $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}$ $\forall A \in \mathcal{S}$

(2) Pro neklesající posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$, $0 \leq f_n$, $\sup f_n < \infty$ (případně $\sup_n f_n \leq K < \infty$) $\Rightarrow$ $\sup_n f_n \in \mathcal{H}$.

Pak $\mathcal{H}$ obsahuje všechny $\sigma(\mathcal{S})$ měřitelné (případně omezené $\sigma(\mathcal{S})$-měřitelné funkce).

Lemma A2: Buď $\mathcal{V}$ třída funkcí uzavřená na bodové limity posloupností (≡ podm. (2)) Nechť $\mathcal{V}$ tvoří vektorový prostor a $1 \in \mathcal{V}$ (tady zahrnuta podm. z A1). Nechť $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ je třída funkcí uzavřených na součin, pak $\mathcal{V}$ obsahuje všechny funkce měřitelné vůči σ-algebře generované $\mathcal{M}$.

(jsou ty dvě lemmata hodně podobné).

Je-li Z proces s konečnou variací, existuje interpretace $\int F\,dZ$, „po trajektoriích", jako Lebesgueův-Stieltjesův integrál.
$(= \int \dots dF(x))$.

Jediná potíž může nastat s

$$\left(\int F\,dZ\right)(\omega) = \left\{\left(\int_0^t F\,dZ\right)(\omega),\ t\in[0,T]\right\}$$

$$\Vert ?$$

$$\int F(\omega)\,dZ(\omega) = \left\{\int_0^t F_s(\omega)\,dZ_s(\omega),\ t\in[0,T]\right\}$$

(alespoň pro skoro všechny trajektorie?)

Věta 6: Buď Z ($\mathcal{F}_t$-adapt., zprava spoj., ~~[illegible]~~) s konečnou variací $|Z|_V$ a $E|Z|_V<\infty$.
Buď X $\mathcal{F}_t$-prediktabilní s konečnými limitami zprava.
Pak $\int X\,dZ$ existuje a $\forall t\in[0,T]$ platí

$$\left(\int_0^t X\,dZ\right)(\omega) \overset{s.j.}{=} \int_0^t X(\omega)\,dZ(\omega)$$

, jestliže integrál vpravo existuje v Leb. Stilt. smyslu pro s. v. ω..

(Vidíme, že ten integrál opravdu splňuje to, co bychom očekávali) pro deterministické fce, nebo konečné mn. ω to dává stejnou hodnotu – je to rozumné rozšíření Leb. Stilt. integrálu)

D. Pro elementární integrandy
$X\in\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ plyne okamžitě z definice.

$\mathcal{J}$ třída procesů splňujících tuto větu.
$\mathcal{E}\subset\mathcal{J}$. Je-li $\{X^n\}\subset\mathcal{E}$, $0\le X^n\nearrow X$, $|X|\le u \Rightarrow X\in\mathcal{J}$.

Existence L-S integrálu $\int_0^t X(\omega)\,dZ(\omega)$ v sobě obsahuje

$$\int_0^t |X(\omega)|\,d|Z|_V(\omega)<\infty \quad \forall t\ge 0.$$

$\{X^n\} \subset \mathcal{J}$, $0 \le X^n \nearrow X$, $\overset{|X| \le n,}{\text{monotónní konvergence}}$ $X \in \mathcal{J}$
(uzavřenost systému na monotónní konvergence).

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}$ obsahuje všechny omezené procesy, které jsou adaptované na σ-algebru generovanou $\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$
↑ obsahuje všechny indikátory typu
$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{[t=0]}$, $A \in \mathcal{F}_0$
$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{(s,t]}$, $A \in \mathcal{F}_s$
generátor $\mathcal{F}_t$-predikt. σ-algebry.

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}$ obsahuje všechny omezené $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.

$X = \mathcal{F}_t$-prediktabilní, obecný

$X^n = (X \wedge n) \vee (-n)$ $\quad$, $|X^n| \le n$

$X^n \xrightarrow[n \to \infty]{} X$ $\qquad$ $\int X(\omega)\, dZ(\omega)$ existuje $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\int X^n(\omega)\, dZ(\omega)}_{\text{existuje řady.}}$ konverguje (pro s.vš. ω).

Základní vlastnosti stochastických integrálů.

Tvrzení 7:
Buď $\mathcal{F}_t$ zprava spoj. filtrace, $X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$, M zprava spojitý martingal, $E|M_t| < \infty$, ($\Rightarrow M$ je vhodný stoch. integrátor)
$\Delta M_0 = M_0 (- M_{0-}) = 0$.
Pak $\int X dM$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

D. Stačí vzít X
- $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{[s=0]}$ ... $\int X dM = 0$ a není co dokazovat
- $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{(s,t]}$ ... $\int X dM = \mathbb{1}_A (M_t - M_s)$, $A \in \mathcal{F}_s$.

$$\int_0^u X dM = \mathbb{1}_A \cdot (M_{(u \wedge t) \vee s} - M_s) = \begin{cases} \mathbb{1}_A \cdot (M_t - M_s), & u \ge t \\ \mathbb{1}_A \cdot (M_u - M_s), & u \in (s,t] \\ 0, & u \le s. \end{cases}$$

je $\mathbb{1}_A \cdot (M_{(u\wedge t)\vee s} - M_s)$ $\mathcal{F}_u$-měřitelná n. vel.?

$\mathbb{1}_A \cdot (M_t - M_s)$ je $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_u$ měř. (v př. $u \geq t$)

$\mathbb{1}_A \cdot (M_u - M_s)$ je $\mathcal{F}_u$ měř. $(+ A \in \mathcal{F}_s.)$

0 je $\mathcal{F}_u$-měř.

$$E \left| \int_0^u X \, dM \right| < \infty$$

$$\leq E \int_0^T 1 \cdot d|M|_V = E|M|_V < \infty$$

$$E\left[\int_0^{u+h} X \, dM \,\Big|\, \mathcal{F}_u\right] \overset{?}{=} \int_0^u X \, dM \quad \text{s.j.}$$

$$E\left[\mathbb{1}_A \left(M_{((u+h)\wedge t)\vee s} - M_s\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_u\right]$$

se otázka přepíše, jako

$$E\left[\int_0^{u+h} X \, dM - \int_0^u X \, dM \,\Big|\, \mathcal{F}_u\right] \overset{?}{=} 0 \text{ s.j.}$$

$$E\left[\mathbb{1}_A \left(M_{((u+h)\wedge t)\vee s} - M_{(u\wedge t)\vee s}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_u\right]$$

$u+h < s$, $u < s$ … $E[0 \mid \mathcal{F}_u] = 0$.

$u > s$

$$\mathbb{1}_A E\left[M_{(u+h)\wedge t} - M_{u\wedge t} \mid \mathcal{F}_u\right] = 0.$$

$u < s < u+h$

$$E\left[\mathbb{1}_A (M_{u+h} - M_s) \mid \mathcal{F}_u\right] =$$

$$= E\left[\mathbb{1}_A \underbrace{E\left[M_{u+h} - M_s \mid \mathcal{F}_s\right]}_{=0} \mathcal{F}_u\right] = 0$$

máme dokázanou martingalovou vlastnost.

$\square$

Lemma A1:

$\mathcal{H}$ je prostor funkcí, $\mathcal{S}$ systém ~~fcí~~ množin uz. na průniky.
$\mathcal{H}$ vektorový $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H}\ \forall A \in \mathcal{S}$, $1 \in \mathcal{H}$, $\forall\, 0 \leq H_n \nearrow H$, $H_n \in \mathcal{H}$
OMEZ $\Rightarrow H \in \mathcal{H}$

Potom $\mathcal{H}$ obsahuje všechny $\sigma(\mathcal{S})$ měřitelné omezené fce.

Věta 8:

Buď M $\mathcal{F}$-martingal, $EM_t^2 < \infty$, $\Delta M_0 = M_0 - M_{0-} = 0$ (to samé, jako $M_0 = 0$ je zprava spojitý) a X omezený $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces.
Pak $\int X\, dM$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

D.: $\mathcal{S}$ bude systém prediktabilních obdélníků

$$\mathcal{S} \begin{cases} A \times \{0\} & A \in \mathcal{F}_0 \\ A \times (s,t] & A \in \mathcal{F}_s \end{cases} \subset \Omega \times [0,T].$$

- $A \times \{0\}$, $B \times \{0\}$ ... $\cap$ ... $A \cap B \times \{0\}$
- $A \times \{0\} \cap B \times (s,t] = \emptyset$, $s > 0$.
- $(A \times (u,v]) \cap (B \times (s,t])$ ... $= \emptyset$, pokud $(u,v] \cap (s,t] = \emptyset$.
  $A \cap B \times (u,v]$, pokud $(u,v] \subset (s,t]$
  ... atd.

$\mathbb{1}_S$, $S \in \mathcal{S}$
Víme, že $\int_0 \mathbb{1}_S\, dM$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Označme $\mathcal{H}$ prostor procesů, pro něž $\int H\, dM$ je $\mathcal{F}_t$-martingal, $H \in \mathcal{H}$.

$\Rightarrow \mathbb{1}_S \in \mathcal{H}\ \forall S \in \mathcal{S}$, $1 \in \mathcal{H}$, $\int 1\, dM = M$

$H, G \in \mathcal{H}$, z vlastností integrálu $\int (aH + bG)\, dM = a\int H\, dM + b\int G\, dM$
$a, b \in \mathbb{R}$

Z vlastností martingalů $(E(X+Y|\mathcal{F}_0)) = E(X|\mathcal{F}_0) + E(Y|\mathcal{F}_0))$
(součet martingalů je martingal)
$\Rightarrow \mathcal{H}$ je v.pr. nad $\mathbb{R}$.

H proces takový, že H_n jsou v $\mathcal{H}$, omezené a $0 \le H_n \nearrow H$.
chceme uk., že je to vz. na monot. konv. ... že $H \in$
Potřebujeme ukázat, že $\int H\,dM$ je martingal

(i) Adaptovanost $\int H\,dM$

$$\int_0^t H\,dM = \int_0^t \sup H_n\,dM = \int_0^t \underbrace{\lim_n H_n}_{\text{omezené}} \overset{\text{znaménková míra}}{dM} = \lim_n \int_0^t H_n\,dM$$ jsou $\mathcal{F}_t$-měř.

Znaménková míra ν s kon. total. variací $\Rightarrow \exists$ koneč. míry ν_+, ν_-, t. že
$\nu(B) = \nu_+(B) - \nu_-(B)$ $\forall B \in \mathcal{B}$. (jako rozklad na 2 neklesaj. fce).
$|\nu|_V(B) = \nu_+(B) + \nu_-(B)$.

(ii) Integrovatelnost $\int H\,dM$.

$$E\left|\int_0^t H\,dM\right| \le E\int_0^t \underbrace{|H|}_{\text{omezené}}\, d|M|_V \underset{(*)}{\le} k \cdot E|M|_V < \infty$$

$H_n \nearrow H \le k$
$\uparrow$
omezené (stejně) $0 \le H_n \le k$ $\forall n$.

(iii) $E\left[\int_0^t H\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \overset{\text{s.j.}}{=} \int_0^0 H\,dM$

$$E\left[\int_0^t H\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = E\left[\int_0^t \sup H_n\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = E\left[\lim_n \int_0^t H_n\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] =$$

máme integrovatelnou majorantu vzhledem k E (jako v $(*)$)

$$= \lim_n E\left[\int_0^t H_n\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] \overset{\text{s.j.}}{=} \lim_n \int_0^0 H_n\,dM =$$

$$= \int_0^0 \sup H_n\,dM = \int_0^0 H\,dM.$$

platí předpoklad A1 $\Rightarrow \mathcal{H}$ obsahuje všechny omezené $\sigma(\mathcal{Y})$ měřitelné, $\sigma(\mathcal{Y}) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ (predikovatelné).

$\square$

Poznámka: Předpoklad omezenosti X může být nahrazen předpokladem $E\int_0^T |X|\, d|M|_V < \infty$ (hůře ověřitelná podm.)

Připomeňme:

M L_2 martingal $E\underbrace{(M_T)^2}_{\text{submartingal}} < \infty$

$\Rightarrow E(M_t^2)$ je neklesající $\ldots$ $E(M_t)^2 \le E(M_T)^2 \ \forall t$.

Doobův Meyerův rozklad $\exists \langle M,M\rangle$ a $M^2 - \langle M,M\rangle$ je martingal.

$\int X\,dM \ldots$ martingal

$M_0 = 0 \Rightarrow E\int_0^t X\,dM = 0$.

$$E\left(\int_0^t X\,dM\right)^2 = \operatorname{var}\left(\int_0^t X\,dM\right)$$

$\parallel \leftarrow$ DM rozklad

$$E\left\langle \int_0^t X\,dM, \int_0^t X\,dM\right\rangle_t \text{, pokud } E\left(\int_0^t X\,dM\right)^2 < \infty.$$

Věta 9:

Buďte H, G omezené (viz pozn.) $\mathcal{F}_t$ prediktabilní procesy, M, N $\mathcal{F}_t$-martingaly (zprava spojité) takové, že $E|M|_V < \infty$, $E|N|_V < \infty$, $\underbrace{E(M_T)^2 < \infty, E(N_T)^2 < \infty}_{L_2 \text{ martingaly}}$, $M_0, N_0 = 0$.

+ raději přidejme předp. $E|M_V|^2 < \infty$, $E|N|_V^2 < \infty$.

Pak $\left\langle \int H\,dM, \int G\,dM\right\rangle_t = \int_0^t H\cdot G\, d\langle M,N\rangle$

a speciálně $\left\langle \int H\,dM, \int H\,dM\right\rangle_t = \int_0^t H^2\, d\langle M,M\rangle$.

D.: $(|H_t|_V\, |G_t|) \le k$; $E\left(\int_0^t H\,dM\right)^2 \le 2k^2 E\left(\int_0^t dM\right)^2 =$

$= 2k^2 E(M_t)^2 < \infty$

$(a-b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$

Chceme dokázat, že $\int H\,dM \cdot \int G\,dM - \int H \cdot G\, d\langle M,N\rangle$ je $\mathcal{F}_t$ martingal.

$\Big(\int H\,dM \cdot \int G\,dM - \underbrace{\langle \int H\,dM, \int G\,dM \rangle}_{\text{je až na modifikaci jediný } \mathcal{F}_t\text{-prediktabil., s konečnou variací + začíná v 0.}} \Big)$ je $\mathcal{F}_t$-martingal

$\int H \cdot G\, d\langle M,N\rangle$ je $\mathcal{F}_t$ predikt., s konečnou variací a začíná v nule $\Rightarrow \int H\cdot G\, d\langle M,N\rangle = \langle \int H\,dM, \int G\,dM\rangle$.

(i) adaptovanost ok.
(ii) integrovatelnost z omezenosti H, G a předp. $EM_T^2 < \infty$, $EN_T^2 < \infty$ ok.

$$? \quad E\Big[\int_0^t H\,dM \cdot \int_0^t G\,dN - \int_0^s H\,dM \int_0^s G\,dM \;\Big|\; \mathcal{F}_s\Big] \overset{?}{\underset{s.j.}{=}}$$

$$\overset{?}{\underset{s.j.}{=}} E\Big[\int_0^t HG\, d\langle M,N\rangle - \int_0^s HG\, d\langle M,N\rangle \;\Big|\; \mathcal{F}_s\Big]$$

H, G jsou typu $H = \xi_0 \cdot \mathbb{1}_{[t=0]} + \sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$

$G = \eta_0 \cdot \mathbb{1}_{[t=0]} + \sum_{i=1}^{m} \eta_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$ $\quad + \; s = t_k,\; t = t_l,\; k < l.$

$$\int_0^t H\,dM = \sum_{i=1}^{l-1} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

$$\int_0^s H\,dM = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

$$\int_0^t H\,dM \cdot \int_0^t G\,dN - \int_0^s H\,dM \int_0^s G\,dM =$$

$$= \Big(\int_0^s H\,dM + \int_s^t H\,dM\Big)\Big(\int_0^s G\,dN + \int_s^t G\,dN\Big) - \int_0^s H\,dM \int_0^s G\,dN =$$

$$= \int_0^s H\,dM \cdot \int_s^t G\,dN + \int_s^t H\,dM \cdot \int_0^s G\,dN + \int_s^t H\,dM \int_s^t G\,dN =$$

$$E\Big[= \int_0^s H\,dM \cdot \underbrace{\int_s^t G\,dN}_{} + \underbrace{\int_s^t H\,dM}_{} \cdot \underbrace{\int_0^s G\,dN}_{} + \int_s^t H\,dM \int_s^t G\,dN \Big| \mathcal{F}_s\Big] \overset{s.j.}{=}$$

$E[\int_s^t G\,dN \mid \mathcal{F}_0] = 0$ s.j.

marting. přír. $(s,t]$

$$\overset{s.j.}{=} E\Big[\int_s^t H\,dM \cdot \int_s^t G\,dN \,\Big|\, \mathcal{F}_s\Big] =$$

$$= E\Big[\sum_{i=k}^{l-1} \xi_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \cdot \sum_{j=k}^{l-1} \eta_j (N_{t_{j+1}} - N_{t_j}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{t_k}\Big] =$$

$$= E\Big[\sum_{i=k}^{l-1} \xi_i \eta_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{t_k}\Big] +$$

$$+ E\Big[\sum_{i \neq j} \underbrace{\xi_i}_{}\,\underbrace{\eta_i}_{}\,\underbrace{(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})}_{}\underbrace{(N_{t_{j+1}} - N_{t_j})}_{} \,\Big|\, \mathcal{F}_{t_k}\Big] =$$

např. $i < j$

$$E\Big[E\Big[\underbrace{\qquad}_{\mathcal{F}_{t_j}\text{-měř.}} (N_{t_{j+1}} - N_{t_j}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{t_j}\Big] \Big| \mathcal{F}_{t_k}\Big] \overset{s.j.}{=} 0$$

n. rel.

$$= \sum_{i=k}^{l-1} E\Big[\xi_i \eta_i \underbrace{E\big[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \,\big|\, \mathcal{F}_{t_i}\big]} \,\Big|\, \mathcal{F}_{t_k}\Big] = (\square)$$

$$E[M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} - M_{t_{i+1}} N_{t_i} - M_{t_i} N_{t_{i+1}} + M_{t_i} N_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] =$$

$$= E[M_{t_{i+1}} N_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}] - N_{t_i} E[M_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}] - \cancel{M_{t_i} N_{t_i}} + \cancel{M_{t_i} N_{t_i}}$$

$$- E[N_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}] =$$

$$= E[M_{t_{i+1}} N_{t_i} - M_{t_i} N_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] =$$

$$= E[\langle M, N\rangle_{t_{i+1}} - \langle M, N\rangle_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] \longrightarrow \text{dosadíme zpět.}$$

$$(\square) = \sum_{i=k}^{l-1} E\big[\xi_i \eta_i (\langle M, N\rangle_{t_{i+1}} - \langle M, N\rangle_{t_i}) \,\big|\, \mathcal{F}_{t_k}\big] =$$

$$= E\Big[\int_s^t H \cdot G \, d\langle M, N\rangle \,\Big|\, \mathcal{F}_{t_k}\Big] = E\Big[\int_0^t \; - \int_0^s \; \Big| \mathcal{F}_s\Big]$$

$t_k = s$

$\langle \int H\,dM, \int G\,dN \rangle = \int HG\,d\langle M,N\rangle$ pro HG elementární integrandy, spec. pro indik. predikt. obdél.

$\mathcal{H}$ prostor procesů t. ž. platí $\forall G$ elementární

$X \in \mathcal{H}$, když $\int X\,dM \int G\,dN - \int XG\,d\langle M,N\rangle$ martingal

ind. pred. ~~obd~~ obdélníky jsou v $\mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ je vektorový $\Leftarrow \int$ je lineární.

$0 \le X_n \nearrow X$ omezený $\Rightarrow$ opět lze provést limitní přechody

$\mathcal{H}$ obsahuje vš. $\mathcal{F}_t$ pred. omezené

G ... t. ž. $\forall H$ $\mathcal{F}_t$ - pred. om.

$\int H\,dM \cdot \int X\,dN - \int HX\,d\langle M,N\rangle$ je martingal.

$\square$

(7) 4.4.2018

Čítací proces N je submartingal

Doobův Meyerův rozklad: $\exists$ (až na modifikaci jedn.) proces A $\mathcal{F}_t$ - predikt., rostoucí, $A_0 = 0$, zprava spoj:

$N - A = \{N_t - A_t,\ t \in [0,T]\}$ je $\mathcal{F}_t$ - martingal

$M = N - A$ je martingal, $\mathcal{F}_t$ - adaptovaný, zprava spojitý, s konečnou variací.

$E|M_T| < \infty$? K tomu stačí $EN_T < \infty$ a $EA_T < \infty$.

Pokud přidáme, že $EM_T^2 < \infty$, pak z D-M rozkladu existuje jednoznačný proces $\langle M,M\rangle$ ... prediktabilní (kon.) variace.

Věta 10:

Buď N čítací proces, $EN_T < \infty$

A je kompenzátor N ($N - A$ je martingal ... z D-M rozkladu).

Nechť $EM_T^2 < \infty$, $E|M|_V^2 < \infty$ $(M = N - A)$.

a nechť A je spojitý.

Pak $\langle M, M \rangle = A$

D. Vyjdeme z per partes pro L-S. integrál

X, Y dva procesy s konečnou variací

$$\int_{[0,t]} X(s+)\, dY(s) + \int_{[0,t]} Y(s-)\, dX(s) = X(t+)\, Y(t+) - X(0-) Y(0-).$$

M je zprava spojitý $(M(t+) = M(t))\ \forall t)$

a nemá skok v 0 $(M(0-) = M(0) = 0)$

použijeme $X = Y = M$:

$$M_t^2 = \int_{[0,t]} M_s\, dM_s + \int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s =$$

$$= 2 \cdot \int_{[0,t]} M_s\, dM_s - \int_{[0,t]} (M_s - M_{s-})\, dM_s =$$

$$= 2 \int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s + \int_{[0,t]} (M_s - M_{s-})\, dM_s =$$

$$= 2 \int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s + \sum_{s \le t} (\Delta M_s)^2$$

zleva spoj. ⇒ $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.

$$\Delta M_s = \underset{\substack{\in \{0,1\} \\ (N_t \text{ čítací})}}{N_s - N_{s-}} - \underbrace{(A_s - A_{s-})}_{=0 \text{ protože je spojitý.}},$$

$$\sum_{s \le t} (\Delta M_s)^2 = \sum_{s \le t} (\Delta N_s)^2 = \sum_{s \le t} \Delta N_s = \underline{N_t}$$

$$M_t^2 = 2\int_{[0,t]}$$

$$M_t^2 - A_t = \underbrace{\underbrace{2\cdot\int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s}_{\text{martingal}} + \underbrace{(N_t - A_t)}_{\text{martingal}}}_{\text{martingal}}$$

$\downarrow$

martingal

$\downarrow$

$A_0 = 0$, A je $\mathcal{F}_t$ - prediktabilní, A je rostoucí

$\Rightarrow$ z jednoznačnosti D - M rozkladu $A = \langle M, M\rangle$.

$M = N - A$

$\int H\, dM$ H je $\mathcal{F}_t$ - omezený,

je martingal

$$E\int_0^t H\, dM = 0, \quad E\left(\int_0^t H\, dM\right)^2 = E\left\langle \int H dM, \int H dM\right\rangle_t =$$

$$= E\int_0^t H^2 d\langle M, M\rangle = E\int_0^t H^2\, dA$$

poissonův proces s konstantní intenzitou λ

$A_t = \lambda t$ $\quad dA = \lambda \underbrace{dt}_{\text{Lebesgueova míra}}$

A je spojitý.

Mnohorozměrný čítací proces:

Definice:

$N = (N_1, N_2, \dots N_k) = \{(N_1, \dots N_k)_t, t \in [0,T]\}$

nazveme k rozměrný čítací, pokud

(i) N_i je čítací proces $\forall i$

(ii) pokud $i \neq j$, pak N_i a N_j nemají skoky ve st. čase (s.j.).

Věta 11:

Buď (N_1, N_2) dvourozměrný čítací proces, A_1, A_2 kompenzátory ~~tu~~ jeho složek (z D. M. rozkladu)

A_1, A_2 spojité a nechť pro $M_1 = N_1 - A_1$, $M_2 = N_2 - A_2$ platí předp. věty 10.

Pak (i) $\langle M_1, M_1 \rangle = A_1$, $\langle M_2, M_2 \rangle = A_2$

(ii) $\langle M_1, M_2 \rangle = 0$.

D. (i) věta 10.

(ii) $N_1 + N_2$ je čítací proces, protože jeho skoky jsou $\in \{0,1\}$.
(skáčou jindy).

$\Rightarrow N_1 - A_1 + N_2 - A_2 = (N_1+N_2) - (A_1+A_2) \rightarrow$ z jednozn. D. M. rozkl. je $A_1 + A_2$ kompenzátor.

$M = N - A = (N_1+N_2) - (A_1+A_2)$ je martingal a můžeme na něj použít větu 10.

$\langle M, M \rangle = A_1 + A_2$

$M^2 - (A_1+A_2)$ je martingal

$$\underbrace{(M_1+M_2)^2 - (A_1+A_2)}_{\text{martingal}} = \underbrace{M_1^2 - A_1}_{\text{martingal}} + \underbrace{M_2^2 - A_2}_{\text{martingal}} + 2M_1M_2$$

$M_1 \cdot M_2 = \frac{1}{4}\left((M_1+M_2)^2 - (M_1-M_2)^2\right)$

$\underbrace{\langle M_1, M_2 \rangle}_{\text{martingal}} = \frac{1}{4}\left(\underbrace{\langle M_1+M_2, M_1+M_2 \rangle}_{\text{martingal}} - \langle M_1-M_2, M_1-M_2 \rangle\right)$

$2M_1M_2 - 2\langle M_1, M_2 \rangle$ je martingal

Z jednoznačnosti D-M rozkladu lze jedině $\langle M_1, M_2 \rangle = 0$ s.j.

$\square$

H, G $\mathcal{F}_t$ prediktabilní, omezené

$E\left(\int H \, dM_1 \cdot \int G \, dM_2\right) = \operatorname{cov}\left(\int H \, dM_1, \int G \, dM_2\right)$

$\| V9.$

$E \int HG \, d\langle M_1, M_2 \rangle \overset{V11.}{=} 0$ jsou nekorelované.