$Z_{n,j}$ je $\mathcal{F}_{n,j}$ mit.

$E Z_{n,j}^2 \le E X_{n,j}^2 < \infty$

$E[Z_{n,j} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}] = E[X_{n,j} \cdot \mathbb{1}[\sum_1^{j-1} X_{n,k}^2 \le 2] \mid \mathcal{F}_{n,j-1}] = 0$ s.j.

$$P[\max_j |Z_{n,j} - X_{n,j}| > 0] = P[\exists j : \sum_{k=1}^{j-1} X_{n,k}^2 > 2] \le$$

$$\le P[\sum_{k=1}^{r_n} X_{n,k}^2 > 2] \xrightarrow[n\to\infty]{(iii)} 0$$

$$P[|\sum_{j=1}^{r_n} Z_{n,j} - \sum_{j=1}^{r_n} X_{n,j}| > 0] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pokud $\sum_{j=1}^{r_n} Z_{n,j} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ Cramér–Slucký $\sum_{j=1}^{r_n} X_{n,j} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$.

b) Ukážeme, že $E \exp\{it \sum_{j=1}^{r_n} Z_{n,j}\} \longrightarrow e^{-t^2/2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

trik: $\log(1+ix) = ix - \frac{(ix)^2}{2} - r(x)$,

$r(x) = x^3 [i(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{7} - \dots) + x(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{8} \dots)]$

$|r(x)| \le |x|^3$ pro $|x| < 1$.

$ix = \log(1+ix) - \frac{x^2}{2} + r(x)$

$e^{ix} = (1+ix)\, e^{-\frac{x^2}{2} + r(x)}$

$$\exp\{it \sum_{j=1}^{r_n} Z_{n,j}\} = \prod_{j=1}^{r_n} e^{itZ_{n,j}} = \prod_{j=1}^{r_n} (1+itZ_{n,j}) \cdot$$

$$\cdot \exp\{-\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{r_n} Z_{n,j}^2 + \sum_{j=1}^{r_n} r(t \cdot Z_{n,j})\} =$$

$$= \underbrace{\prod_{j=1}^{r_n} (1+itZ_{n,j}) \cdot e^{-t^2/2}}_{T_n} + \underbrace{\prod_{j=1}^{r_n} (1+itZ_{n,j})}\cdot$$

$$\underbrace{\cdot \left[\exp\{-\frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{r_n} Z_{n,j}^2 + \sum_{j=1}^{r_n} r(t Z_{n,j})\} - e^{-\frac{t^2}{2}}\right]}_{V_n}$$

Potřebujeme ukázat, že $ET_n \longrightarrow 1$, $EV_n \longrightarrow 0$

$$E|T_n|^2 = E\prod_{j=1}^{r_n}(1+t^2 z_{n,j}^2) \le \cancel{E\prod_{j=1}^{r_n} e^{t^2 z_{n,j}^2} = E\exp\{t^2\sum_{j=1}^{r_n} z_{n,j}^2\}}$$

$1+x \le e^x, \forall x$

$$\le E\prod_{j=1}^{J-1} e^{t^2 z_{n,j}^2}(1+t^2 z_{n,j}^2)\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 =$$

ostatní $z_{n,j}=0$

$z_{n,j}=0$, $j>J$

$$= E\exp\{t^2\underbrace{\sum_{j=1}^{J-1} z_{n,j}^2}_{\le 2}\}(1+t^2X_{n,j}^2) \le e^{2t^2}\cdot E(1+t^2X_{n,j}^2) =$$

$$= e^{2t^2}(1+t^2EX_{n,J}^2)$$

$\Rightarrow E|T_n|^2$ je stejn. omezená (protože $\sup_n E(\max_j X_{n,j}^2) < \infty$

$\sup_n E|T_n|^2 < \infty \Rightarrow \{T_n\}$ je stejnoměrně integrovatel. posl.

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n E|T_n|\cdot 1_{(|T_n|>N)} = 0.$$

$$V_n = \exp\{it\sum_{j=1}^{r_n} z_{n,j}\} - \underbrace{T_n}_{\text{je stejnom. integr.}}$$

$$\underbrace{|\exp\{it\sum_{j=1}^{r_n} z_{n,j}\}| \le 1}_{\text{stejnoměrně integrovatelná posloupnost}}$$

V_n je stejnom. integrovatelná posloupnost.

Teď ukážeme $V_n \xrightarrow{P} 0$

Tedy i $EV_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Nejprve $\sum_{j=1}^{r_n} r(t; z_{n,j})$ $\quad P[|\sum_{j=1}^{r_n} r(t\cdot z_{n,j})| \ge |t|^3\sum_{j=1}^{r_n}|z_{n,j}|^3] \to 0$,

protože $|r(t; z_{n,j})| < |t|^3|z_{n,j}|^3$, pokud

$|t\cdot z_{n,j}| < 1$.

a my předpokládáme $\max_j |Z_{n,j}| \le \max_j |X_{n,j}| \xrightarrow{P} 0$

$$|t|^3 \sum_{j=1}^{r_n} |Z_{n,j}|^3 \le |t|^3 \underbrace{\max_j |Z_{n,j}|}_{\xrightarrow{P} 0} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{r_n} (Z_{n,j})^2\right)}_{\to 1} \xrightarrow{P} 0$$

S pravděpodobností jdoucí k 1 je $\left| \sum_{j=1}^{r_n} r(t \cdot Z_{n,j}) \right| \le$

$$\le |t|^3 \cdot \sum_{j=1}^{r_n} |Z_{n,j}|^3 \xrightarrow{P} 0.$$

Celkem $\sum_{j=1}^{r_n} r(t \cdot Z_{n,j}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

$$|V_n| = \underbrace{|T_n|}_{\xrightarrow{P} e^{t^2/2}} \underbrace{\left| \exp\left\{-\frac{t^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{r_n} Z_{n,j}^2}_{\xrightarrow{P} 1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{r_n} r(t \cdot Z_{n,j})}_{\xrightarrow{P} 0}\right\} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|}_{\xrightarrow{P} 0} \xrightarrow{P} 0$$

$$|T_n| = \left(\prod_{j=1}^{r_n} (1 + t^2 Z_{n,j}^2)\right)^{1/2} \le \left(\prod_{j=1} \exp\{t^2 Z_{nj}^2\}\right)^{1/2} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2} t^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{r_n} Z_{nj}^2}_{\xrightarrow{P} 1}\right\} \longrightarrow e^{t^2/2}.$$

$$E T_n = E \prod_{j=1}^{r_n} (1 + it Z_{nj}) = E\Big[E\Big[\overbrace{\prod_{j=1}^{r_n} (1 + it Z_{nj})}^{T_n} \Big| \mathcal{F}_{n,r_n-1}\Big]\Big] =$$

$$= E\left(\prod_{j=1}^{r_n-1} (1 + it Z_{n,j})\right) \cdot \overbrace{E\left[(1 + it Z_{n,r_n}) \middle| \mathcal{F}_{n,r_n-1}\right]}^{1 \text{ s.j.}} =$$

$\mathcal{F}_{n,r_n-1}$ měřitelná

$= \ldots =$ postupným podmiňováním

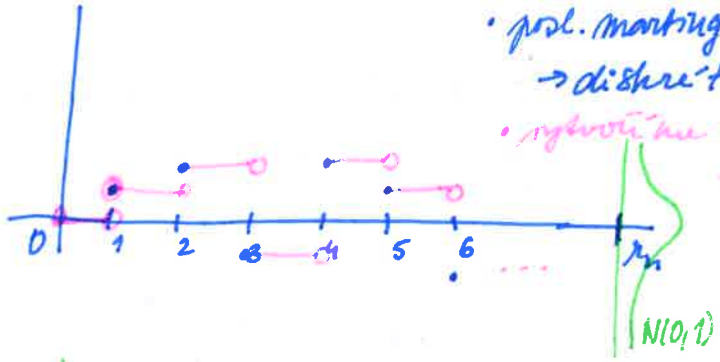
$$= E\left[\prod_{j=1}^{l} (1 + it Z_{n,j})\right] = E\left(\prod_{j=1}^{l-1} (1 + it Z_{n,j})\right) \cdot E\left[(1 + it Z_{n,l}) \middle| \mathcal{F}_{n,l-1}\right]$$

$$= \ldots = 1 \qquad \square$$

$$S_{n,r_n} = \sum_{j=1}^{r_n} X_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$$

$$S_{n,t} = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,t} \qquad t \in [0,1]$$

$$r_n(t) = \max\{k : k \le t \cdot r_n\}$$



• posl. marting. diferencí → diskrétní martingal.

• vytvoříme takovýto proces...

pokud to $r_n \longrightarrow \infty$, budeme si představovat, jako by to bylo furt (0,1) → zahustí se to a bude tam N(0,1)...

$S^*_{n,1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ (Mc Leishova věta)

$\{S^*_{n,t}, t \in [0,1]\}$ také konverguje v distribuci

proces zprava spoj. (càdlàg) $\longrightarrow G$
limes zleva

(princip invariance) $\quad (S^*_{n,t} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(t)))$

$$\max_t S^*_{n,t} \xrightarrow{d} \max_t G_t .$$

⑨ 18. 4. 2018

Máme Mc Leishovu větu (V1).

Otázka: Pokud bychom měli $r_n(t) \le r_n$

$\forall t$ pevné $r_n(t) \longrightarrow \infty$

$$\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2_t), \text{ pokud } \sum_{j=1}^{r_n(t)} X^2_{n,j} \xrightarrow{P} \sigma^2_t.$$

$t \in [0,1]$

$$W^{(n)}_t = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}, \text{ kde } r_n(t) : [0,1] \to \{0,1,\dots,r_n\}$$

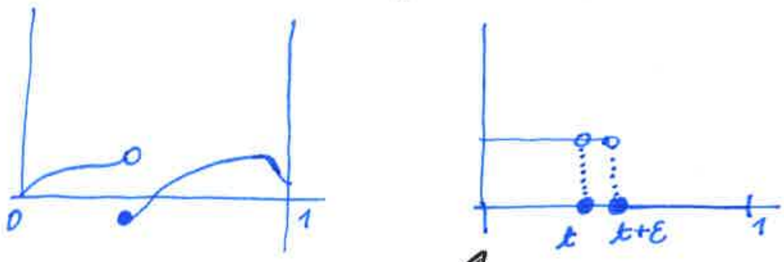
rostoucí (např. $r_n(t) = \lfloor t \cdot r_n \rfloor$)

$\forall t$ ~~pro~~ pevné $r_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$W_t^{(n)}$ je zprava spojitý proces na $[0,1]$ s limitou zleva, a protože $\{X_{n,j}\}$ je s.m.d., jde o martingal.

Konvergence stochastických procesů.

$D[0,1]$ prostor funkcí spojitých zprava s limitami zleva.



dvě funkce, které jsou si blízké

$\mathbb{1}_{[0,t)}$ a $\mathbb{1}_{[0,t+\varepsilon)}$

ale v supremové metrice platí

$\sup |\mathbb{1}_{[0,t)} - \mathbb{1}_{[0,t+\varepsilon)}| = 1$

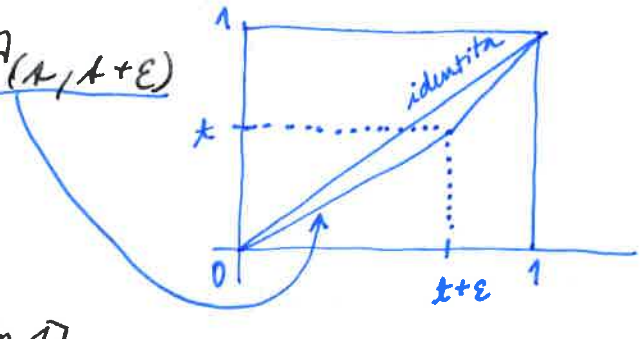
$\forall \varepsilon > 0.$

chceme vyřešit...

Skorochodova metrika

$\Lambda = \{\lambda : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ spojité, neklesající, $\lambda(0)=0, \lambda(1)=1\}$

$\mathbb{1}_{[0,t)} = \mathbb{1}_{[0,t+\varepsilon)} \circ \lambda_{(t,t+\varepsilon)}$



$d_D(f,g)$, $f,g \in D[0,1]$,

$$d_D(f,g) = \inf \{\varepsilon > 0 : \exists \lambda \in \Lambda, \sup_{t\in[0,1]} |\lambda(t) - t| \le \varepsilon, \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(\lambda(t))| \le \varepsilon\}$$

• vzdálenost když $\lambda(t)$ od identity.

$(D[0,1], d_D)$ je úplný metrický, separabilní.

P_n, P pravděpodobnostní míry na $(D[0,1], d_D)$ nebo obecné ú.m.S.p.

$$P_n \xrightarrow{W} P \iff \int f(x)\, dP_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int f(x)\, dP(x)$$

$$\forall f : D[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ je omezená, spojitá}$$

Existují ekvivalentní podmínky

$$P_n \xrightarrow{W} P \iff \limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F) \quad \forall F \text{ uzavřenou}$$

$$\iff P_n(A) \longrightarrow P(A) \quad \forall A \in \mathcal{B},\ P(\partial(A)) = 0$$

$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ je hranice A

$A^\circ = (\overline{A^C})^C$

Q_n, Q na $\mathbb{R}$, $Q_n \xrightarrow{W} Q$ z definice

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dQ_n \longrightarrow \int f(x)\, dQ$$

$$\Rightarrow Q_n(-\infty, a] \longrightarrow Q(-\infty, a]$$

$\forall a$ takové, že $Q(\{a\}) = 0$.

$F_n(a) \longrightarrow F(a)$ $\forall$ bod spojitosti a dist. fce F

F odpovídá $N(\cdot,\cdot) \Rightarrow F$ je spojitá všude

... CLV.

Věta: Buďte P_n a P pravděpodobnostní míry na $(D[0,1], d_D)$.

Nechť (i) konečně rozměrná rozdělení P_n konvergují slabě ke konečněrozměrným rozdělením P

$(\forall k\ \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leq 1,\ \forall B \in \mathcal{B}^k)$

$$P((X_{t_1}, \ldots X_{t_k}) \in B) \longrightarrow P((X_{t_1}, \ldots X_{t_k}) \in B)$$

$$\boxed{\forall B : P(\partial B) = 0}$$

konverg. náhod. vektorů (v $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$).

(ii) $\{P_n\}$ je relativně kompaktní.

$\Longrightarrow$ Pak $P_n \xrightarrow{W} P$ (konvergence na $D[0,1]$).

Speciální (ii) je těžko ověřitelná.

Tvrzení: Je-li $\{P_n\}$ těsná, pak je i relativně kompaktní.

Těsnost: Každá pravděpodobnostní míra na separabilním metrickém prostoru je těsná, tj.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K$ kompaktní $P(K) > 1 - \varepsilon$.

Těsnost $\{P_n\}$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K$ kompaktní : $\sup_n P_n(K) > 1 - \varepsilon$.

Ověření těsnosti na $D[0,1]$.

Věta: Buď $W^{(n)}$ posloupnost stoch. procesů s hodnotami v $(D[0,1], d)$ a $P_{W^{(n)}}$ jejich rozdělení.
Pak $\{P_{W^{(n)}}\}$ je těsná, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} P\Big[\sup_{\substack{0 \le |s-t| < \delta \\ s,t \in [0,1]}} |W_t^{(n)} - W_s^{(n)}| > \varepsilon\Big] = 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \eta \ \exists \delta_\eta : \delta < \delta_\eta :$$

$$: \limsup_{n \to \infty} P\Big[\sup_{\substack{0 \le |s-t| < \delta \\ s,t \in [0,1]}} |W_t^{(n)} - W_s^{(n)}| > \varepsilon\Big] < \eta$$

$$\forall \gamma > 0 \ \exists n_\gamma \ \forall n > n_\gamma :$$

$$: P\Big[\sup_{\substack{0 \le |s-t| < \delta \\ s,t \in [0,1]}} |W_s^{(n)} - W_s^{(n)}| > \varepsilon\Big] < \eta + \gamma.$$

Kupodivu se tohle ověřuje líp, než ta těsnost.

Jak zjistit konvergenci konečně rozměrných rozdělení:

Tvrzení (Cramér-Wold; Cramér-Wald device)

Buď $(Y_1^n, \dots Y_k^n)$ posloupnost náhodných vektorů

Pak $(Y_1^n, \dots Y_k^n) \xrightarrow{d} (Y_1, \dots Y_k)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \{a_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k \quad \sum_{i=1}^k a_i Y_i^n \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^k a_i Y_i .$$

Gaussovské procesy na $[0,1]$.

Definice: (Wienerův proces na $[0,1]$)

Stochastický proces $W = \{W_t, t \in [0,1]\}$ nazveme Wienerův, pokud:

(i) $W_0 = 0$ s.j.,

(ii) $E W_t = 0 \ \forall t$,

(iii) $W_t - W_s$, $W_u - W_v$ jsou nezávislé, pokud $[s,t) \cap (v,u) = \emptyset$

(nezávislost přírůstků na disj. intervalech).

(iv) $W_t - W_s \sim N(0, t-s) \quad \forall 0 \leq s < t \leq 1$.

(v) W je spojitý.

(Brownův pohyb; chování trhu je diskretizovaný Wiener. proces).

Vlastnosti:

$W_t \sim N(0,t) \quad \forall t$ (marginální rozdělení)

$(W_t - W_s, W_u - W_v) \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t-s & 0 \\ 0 & u-v \end{pmatrix}\right)$, pokud $(v,u) \cap (s,t) = \emptyset$.

$(W_s, W_t) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} s & s\wedge t \\ s \wedge t & t \end{pmatrix}\right)$, $s \wedge t = \min\{s,t\}$.

($s < t$: $\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \operatorname{cov}(\underbrace{W_t - W_s}_{\text{nezáv.}} + W_s, W_s) = \operatorname{var} W_s$.

Definice: (Centrované, spojité, gaussovské procesy)

X je centrovaný gaussovský na $[0,1]$, pokud

(i) $X_0 = 0$ s.j.

(ii) $E X_t = 0$ $\forall t$.

(iii) sdružené rozdělení přírůstků je normální.

(např. $(X_t - X_s, X_u - X_v) \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{(\,\vdots\,)}_{\Sigma})$)

Σ je dána kovarianční strukturou X, tj. fí $\rho(s,t) = cov(X_s, X_t)$).

ρ musí být positivní semidefinitní funkce.

(iv) X je spojitý.

Jak Gaussovský proces dostaneme z Wienerova?

$X_t = \int_0^t f(s)\, dW_s$, kde f je deterministická funkce taková, že $\int_0^1 f^2(s)\, ds < \infty$.

(tj. $f \in L_2[0,1]$)

$$\int_0^t f(s)\, dW_s = \text{„}\lim\text{"} \underbrace{\sum_{i=1}^{k_n} \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{f^n(t_i)}} \overbrace{(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}^{N(0,\, t_{i+1} - t_i)}}_{\sim N(0, \sum_{i=1}^{k_n} (f^n(t_i))^2 (t_{i+1} - t_i))}$$

čili pro X_t platí: $X_t \sim N(0, \int_0^t f^2(s)\, ds)$,

$$cov(X_s, X_t) = \int_0^{t \wedge s} f^2(u)\, du .$$

Věta: (základní princip invariance pro s.m.d).

Buď $\{X_{n,j}\}$ schéma martingalových diferencí t.ž. $\forall t \in [0,1]$:

(i) $E\left[\max\limits_{0 \le j \le r_n(t)} X_{n,j}^2\right] \longrightarrow 0$ (zanedbatelnost)

(ii) $\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} t$

Potom $\{W_t^n, t\in[0,1]\} = \left\{\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}, t\in[0,1]\right\} \xrightarrow{d} W,$

kde W je Wienerův proces na $[0,1]$.

$(W^n \xrightarrow{d} W \iff P_{W^n} \xrightarrow{w} P_W)$.

V čem je důležitost?

$\forall t: \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,t)$

ale z definice slabé konvergence se dá ukázat, že $\forall f$ spojitou na $C[0,1]$

$$f(W^n) \xrightarrow{d} f(W).$$

např. $\underset{0\le t\le 1}{\max^{(\sup)}} W_t = f(W)$.

$\Rightarrow \sup_{0\le t\le 1} W_t^n \xrightarrow{d} \sup_{0\le t\le 1} W_t$ ... už jsme potkali v Kolmogor. Smirnov. statistice.

$\sup_t \sqrt{n}\, |\hat{F}_n(t) - F(t)| \xrightarrow{d} \sup (B_t^0)$ (kolmogorov smirnov.)

25. 4. 2018

Věta: (Princip invariance pro martingaly I) (znění na předch. straně).

D. Musíme ukázat konvergenci konečně rozměrných rozdělení (Cramér Wold + Mc Leish) a těsnost.

2 podmínky $E \max_{1\le j\le r_n(t)} X_{n,j}^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \sup_n \mathbb{E} \max_{1\le j\le r_n(t)} X_{n,j}^2 < \infty$

$+ \max |X_{n,j}| \xrightarrow{P} 0$.

Důkaz: Definujeme $\tilde{X}_{n,j} = X_{n,j} \cdot \mathbb{1}\left[\sum_{k=1}^{j-1} X_{n,k}^2 \le 2\right]$ $j = 1, 2, \dots, r_n = r_n(1)$

$$\tilde{W}_t^n = \sum_{j=1}^{r_n(t)} \tilde{X}_{n,j}$$

$$P[\tilde{W}_t^n \neq W_t^n \text{ pro nějaké } t] = P\Big[\sum_{k=1}^{r_n(t)} X_{n,k}^2 > 2 \text{ pro nějaké } t\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Čili stačí dokázat $\tilde{W}^n \xrightarrow{d} W$ (+ Cramérova-Sluckého věta).

Platí také $P[\tilde{X}_{n,j} \neq X_{n,j} \text{ pro nějaké } j = 1, \dots r_n] \xrightarrow{n\to\infty} 0$

a samozřejmě $\max\limits_{1\le j\le r_n} |\tilde{X}_{n,j}| \xrightarrow{P} 0$.

a vidíme, že

$$E\sum_{j=1}^{r_n(t)} \tilde{X}_{n,j}^2 \le 2 + \underbrace{E\max_{1\le j\le r_n(t)} X_{n,j}^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \le K < \infty.$$

$\forall t \in [0,\infty]$
$\forall n$.

$$\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} t \Rightarrow \sum_{j=1}^{r_n(t)} \tilde{X}_{n,j}^2 \xrightarrow{P} t.$$

$$E\Big|\sum_{j=1}^{r_n(t)} \tilde{X}_{n,j}^2 - t\Big| \longrightarrow 0 \text{ (v } L_1 \text{ konvergence)}.$$

Použijeme Cramérovu-Woldovu větu:
vezměme $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots a_k \in \mathbb{R}$
$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \le 1$.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i (\tilde{W}_{t_i}^n - \tilde{W}_{t_{i-1}}^n) \xrightarrow{d ?} N\Big(0, \sum_{i=1}^{k} a_i^2 (t_i - t_{i-1})\Big)$$

$\|$ zaw.

$\sum_1^k a_i (W_{t_i} - W_{t_{i+1}})$

$$\tilde{W}^n_{t_i} = \sum_{j=1}^{r_n(t_i)} \tilde{X}_{n,j} .$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \left(\tilde{W}^n_{t_i} - \tilde{W}^n_{t_{i-1}} \right) = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=r_n(t_{i-1})+1}^{r_n(t_i)} \tilde{X}_{n,j} =$$

(představujte si $r_n(t) = \lfloor t \cdot n \rfloor$)

$$= \sum_{j=1}^{r_n(t_k)} Y_{n,j} \,, \text{ kde } Y_{n,j} = a_i \tilde{X}_{n,j} \text{ pro } j \in \{ r_n(t_{i-1})+1, \dots r_n(t_i) \}.$$

$Y_{n,j}$ tvoří stále schéma marting. diferencí, splňuje předpoklady McLeishovy věty.

kde $\displaystyle\sum_{j=1}^{r_n(t)} Y_{n,j}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 (t_i - t_{i-1})$

$\searrow N(0, \sigma^2)$

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{r_n(t)} Y_{n,j} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ podle McLeish.}$$

$$\max_{1 \le j \le r_n} |Y_{n,j}| = \max_j |a_i \tilde{X}_{n,j}| \le \overbrace{\max_{1 \le i \le k} |a_i|}^{\text{konstanta}} \cdot \underbrace{\max_j |\tilde{X}_{n,j}|}_{\xrightarrow{P} 0}$$

$$\sup_n E \max_j Y_{n,j}^2 \le \max_i |a_i|^2 \cdot \sup_n E \max_j \tilde{X}_{n,j}^2 < \infty .$$

$$\Rightarrow \left(\tilde{W}^n_{t_k} - \tilde{W}^n_{t_{k-1}}, \dots, \tilde{W}^n_{t_1} - \tilde{W}^n_{t_0} \right) \xrightarrow{d} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0} \right)$$

$\to$ lin. transformace je spojitá

$$\left(\tilde{W}^n_{t_k}, \dots, \tilde{W}^n_{t_1} \right) \xrightarrow{d} \left(W_{t_k}, \dots W_{t_1} \right).$$

Postačující podmínka pro těsnost

$$\lim_{\delta\to 0}\ \limsup_{n\to\infty} P\Big[\sup_{\substack{|t-s|\le\delta\\ t,s\in[0,1]}} |\tilde{W}_t^n - \tilde{W}_s^n| > \varepsilon\Big] = 0 \quad \forall \varepsilon>0.$$

Pomocné lemma:

Buď $U=\{U_i,\ i=0,1,\dots,n\}$ martingal, $U_0=0$.
Pak pro libovolné $c>0$ platí

$$P\Big[\max_{0\le j\le n} |U_j| > 2c\Big] \le \frac{2}{c}\, E\big[|U_n|\cdot 1\!\!1_{\{|U_n|\ge c\}}\big].$$

Buď $\delta>0$ pevné $s\le t$, $s,t\in[0,1]$, $|s-t|\le\delta$.

$$P\Big[\sup_{|t-s|\le\delta} |\tilde{W}_t^n - \tilde{W}_s^n| > \varepsilon\Big] = P\Big[\sup_{|t-s|<\delta} \Big|\sum_{j=r_n(s)+1}^{r_n(t)} \tilde{X}_{n,j}\Big| > \varepsilon\Big] \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{[1/\delta]} P\Big[\sup_{j\delta\le t\le (j+1)\delta} \Big|\sum_{j=r_n(j\delta)}^{r_n(t)} \tilde{X}_{n,j}\Big| > \frac{\varepsilon}{3}\Big] \le$$

využ. pomocné lemma $\left(\frac{\varepsilon}{3}=2c\right)$

$$\le \frac{12}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{[1/\delta]} E\Big|\sum_{j=r_n(j\delta)}^{r_n((j+1)\delta)} \tilde{X}_{n,k}\Big| \cdot 1\!\!1\Big[\Big|\sum_{r_n(j\delta)}^{r_n(j+1)\delta} \tilde{X}_{nk}\Big| > \frac{\varepsilon}{6}\Big]$$

$$\tilde{W}^n_{(j+1)\delta} - \tilde{W}^n_{j\delta} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\delta)$$

$$\longrightarrow 2\Big(1-\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{\delta}}\Big)\Big)$$

$$E\,\tilde{X}_{n,k}\cdot \tilde{X}_{n,l} = 0$$

$k\ne l$
$l<k$

$$\| \quad E\big[\tilde{X}_{n,l}\cdot \underbrace{E[\tilde{X}_{n,k}\,|\,\mathcal{F}_{n,l}]}_{=0 \text{ s.j.}}\big]$$

$$\leq \frac{12}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\lfloor 1/\delta \rfloor} \underbrace{\left(E\left(\sum_{k=r_n(j\delta)}^{r_n((j+1)\delta)} \tilde{X}_{nk}\right)^2\right)^{1/2}}_{(*)} \cdot \underbrace{\left(P\left[\left|\sum_{r_n(j\delta)}^{r_n((j+1)\delta)} \tilde{X}_{nk}\right| > \frac{\varepsilon}{6}\right]\right)^{1/2}}_{(*)} =$$

$$\tilde{W}^n_{(j+1)\delta} - \tilde{W}^n_{j\delta} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\delta)$$

$$(*) \to 2\left(1-\Phi\left(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{\delta}}\right)\right)$$

$$E\, \tilde{X}_{n,k} \cdot \tilde{X}_{n,\ell} = 0$$

$$\underset{\ell<k}{k\neq \ell} \quad = E\left[X_{n,\ell} \cdot \underbrace{E\left[\tilde{X}_{n,k} \mid \mathcal{F}_{n,\ell}\right]}_{=0 \text{ s.j.}}\right]$$

$$(*) = E\Big(\underbrace{\sum_{k=r_n(j\delta)}^{r_n((j+1)\delta)} \tilde{X}^2_{n,k}}\Big) \longrightarrow (j+1)\delta - j\delta = \delta.$$

$$= \frac{12}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\lfloor 1/\delta \rfloor} \left(E\left(\sum_{k=r_n(j\delta)}^{r_n((j+1)\delta)} \tilde{X}_{n,k}\right)^2\right)^{1/2} \cdot \left(P\left[\left|\sum_{k=r_n(j\delta)}^{r_n((j+1)\delta)} \tilde{X}_{n,k}\right| > \frac{\varepsilon}{6}\right]\right)^{1/2}.$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{12}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\lfloor 1/\delta \rfloor} \delta^{1/2} \left(2\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{\delta}}\right)\right)\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq k \cdot \frac{2}{\delta} \cdot \delta^{1/2} \cdot \left(1-\Phi\left(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{\delta}}\right)\right)^{1/2} = k \left(\frac{1-\Phi\left(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{\delta}}\right)}{\delta}\right)^{1/2} \longrightarrow \underline{\underline{0}}.$$

... limita "$\frac{0}{0}$" ... l'Hospital: $\frac{d}{d\delta}$

$$\frac{\varphi\left(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{\delta}}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{12\cdot\delta^{3/2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{72\delta}\right\} \cdot \frac{\varepsilon}{12\delta^{3/2}}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{\delta}\right\} \frac{1}{\delta^{3/2}} \Rightarrow \exp\{-x\}\, x^{3/2} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \ldots$$

$\square$

Obecnější gaussovské procesy:

$f: [0,1] \to R \qquad \int_0^1 f^2(t)\,dt < \infty$

$Y_s = \int_0^t f(s)\,dW_s$ gauss. proces

$$E Y_s = 0 \qquad E Y_t \cdot Y_s = \int_0^{s \wedge t} f^2(s)\,ds$$

Věta: Mnohorozměrný princip invariance

Buďte $W_1, \dots W_\ell$ nezávislé Wienerovy procesy na $[0,1]$, $f_1, \dots f_\ell$ reálná funkce

$$\int_0^1 f_j^2(s)\,ds < \infty \quad \forall j$$

Dále buď $\forall k \in \{1, \dots \ell\}$

$\{X_{\ell,n,j}\}_{j=1}^{r_n}$, $n \in N$ schéma martingalových diferencí vůči filtraci $\{\mathcal{F}_{k,n,j}\}$.

Definujme $W^n_{k,t} = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{k,n,j}$, $t \in [0,1]$

Nechť platí:

(1) $\forall t \in [0,1] \quad \sum_{j=1}^{r_n(t)} E\left[X^2_{k,n,j} / \mathcal{F}_{k,n,j-1}\right] \xrightarrow{P} \int_0^t f_k^2(s)\,ds$

(2) $\forall t \in [0,1] \quad \sum_{j=1}^{r_n(t)} E\left[X^2_{k,n,j} \mathbb{1}_{\{|X_{k,n,j}| > \varepsilon\}}\right] \longrightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$

(3) $\forall t \in [0,1] \ \forall k \neq k'$ (zkrátit $\mathcal{F}_{n,j} = \sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\ell} \mathcal{F}_{k,n,j}\right)$)

$$\sum_{j=1}^{r_n(t)} E\left[X_{k,n,j} \cdot X_{k',n,j} / \mathcal{F}_{k,n,j} \vee \mathcal{F}_{k',n,j}\right] \xrightarrow{P} 0$$

Pak $(W_1^n, \dots W_\ell^n) \xrightarrow{d} \left(\int f_1\,dW_1, \dots, \int f_\ell\,dW_\ell\right)$ na kartézském souč. $(D[0,1], d_D)^\ell$, $\ell = 1$.

4. Čítací procesy, cenzorování a limitní věty. 2.5.2018

Pro časový úsek $[0,T]$ máme čítací proces (s jednou událostí)

τ … okamžik ~~události~~ selhání $(\tau \le T)$.

U … čas cenzorování $(U \le T)$

… po čase U je další pozorování nemožné.

~~Ozn.~~ $X = \min\{U, \tau\}$ (min času do selhání a cenzorování)

$$N_t := \mathbb{1}_{[\tau \le T,\, X = \tau]} = \mathbb{1}_{[\tau \le T]} \cdot \delta, \quad \delta = \mathbb{1}_{[\tau \le U]}.$$

$\tau \le U$ došlo k selhání

Riziko a kumulativní riziko.

riziko v čase t

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{P[t \le \tau < t+h]}{h \cdot P[t \le \tau]} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} P[\tau \in [t, t+h) \mid \tau \ge t].$$

pokud je τ absolutně spojitá náh. veličina (nemá skoky) s dist. fcí F a s hustotou f, pak zřejmě

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h \cdot (1 - F(t))} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

pro skoro všechna t.

$$= \frac{(1-F(t))'}{1-F(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}$$, kde $S(t) = 1-F(t)$ je funkce přežití (survival fction).

$$= -(\log S(t))'$$

→ za podm. abs. spoj. τ dostaneme $\lambda(t) = -(\log S(t))'$

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\, ds\right\}$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$ ... kumulativní riziková fce.

$$\left(= \int_0^t \frac{f(x)}{1-F(s)}\, ds\right)$$

Není-li τ absolutně spojitá, pak definujeme

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{\underbrace{1-F(s-)}_{P[\tau \geq s]}}\, dF(s)$$

Je-li $P[\tau = t_i] = p_i$, $t_i \in [0,T]$, $\sum p_i = 1$

(čistě diskrétní rozdělení)

⇒ pak Λ je po částech konstantní, má skoky v bodech t_i o velikosti

$$\frac{P[\tau = t_i]}{P[\tau \geq t_i]} = \frac{p_i}{\sum_{j \geq i} p_j} =$$

$$= P[\tau = t_i \mid \tau \geq t_i] =$$

potřeba $\tau = t_i$, za podm. že τ je alespoň t_i

$$= \lambda_i$$

a $$\Lambda_t = \sum_{t_i \leq t} \lambda_i$$