$$= 1 + \int_0^t \mathbb{1}_{[X \geq u]} \lambda(u)\, du \leq 1 + \int_0^t \mathbb{1}_{[\tau \geq u]} \frac{f(u)}{P[\tau \geq u]}\, du$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ \mathbb{1}_{[\tau \geq u]} \cdot \mathbb{1}_{[U \geq u]} \leq \mathbb{1}_{[\tau \geq u]} \end{array}$$

$$E|M_t| \leq 1 + \int_0^t E\,\mathbb{1}_{[\tau \geq u]} \frac{f(u)}{P[\tau \geq u]}\, du \leq 2 \quad \forall t \in [0,T].$$

· martingalová vlastnost?

$$E\Big[N_{t+s} - N_t - \underbrace{\int_t^{t+s} \mathbb{1}_{[X \geq u]} \lambda(u)\, du}_{=} \,\Big/\, \mathcal{F}_t\Big] = 0$$

$$N_{t+s} - \cancel{M} A_{t+s} = \underbrace{N_t - A_t}_{\mathcal{F}_t\text{-měřitelné}} + (N_{t+s} - N_t) \cancel{+} (A_{t+s} - A_t)$$

→ stačí ukázat, že $E[N_{t+s} - \cancel{A_{t+s}} - N_t / \mathcal{F}_t] =$

$$= E\Big[\int_t^{t+s} \mathbb{1}_{[X \geq n]} \lambda(u)\, du / \mathcal{F}_t\Big]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall F \in \mathcal{F}_t : \int_F E[N_{t+s} - N_t / \mathcal{F}_t]\, dP =$$

$$= \int_F E\Big[\int \lambda(u)\, du / \mathcal{F}_t\Big] \cancel{=}$$

však $\mathbb{1}_{[X \geq u]}$

$$\Updownarrow$$

$$\int_F (N_{t+s} - N_t)\, dP = \int_F \Big(\int_t^{t+s} \mathbb{1}_{[X \geq u]} \lambda(u)\, du\Big)\, dP$$

$$F = F\cap[X\le t] \cup F\cap[X>t]$$

$F\in\mathcal{F}_t$

$\forall \omega\in[X\le t]$ platí $N_{t+s}-N_t=0$.

$$\int_{F\cap[X\le t]} N_{t+s}-N_t\,dP=0$$

$$\int_{F\cap[X\le t]}\int_t^{t+s}\mathbb{1}_{[X\ge u]}\lambda(u)\,du\,dP =$$

$$=\int_F \mathbb{1}_{[X\le t]}\left(\int_t^{t+s}\mathbb{1}_{[X\ge u]}\lambda(u)\,du\right)dP=$$

$$=\int_F\Bigg(\underbrace{\int_t^{t+s}\underbrace{\mathbb{1}_{[X\le t]}\mathbb{1}_{[X\ge u]}}_{\mathbb{1}_{[X=t=u]}}\lambda(u)\,du}_{\int_t^t \lambda(u)\mathbb{1}_{[X=u]}\,du=0}\Bigg)dP=0.$$

Pro $F\cap\underbrace{[X>t]}_{\text{k události nedošlo}}$

$[X>t]\in\mathcal{F}_t$, ale žádná vlastní netriviální podmnožina nemůže být v $\mathcal{F}_t$.

nevíme, co se stane v budoucnosti:

$$[X>t]=\begin{cases}\emptyset\\ [X>t]\end{cases}$$

$E[N_{t+s}-N_t|\mathcal{F}_t]$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelná náh. veličina.

pro $\omega \in [X>t]$ musí být $E[N_{t+s} - N_t | \mathcal{F}_t] = k$) konstanta

$$E\left[\int_t^{t+s} 1\!\!1_{[X \geq u]} \lambda(u)\, du \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] = k^*$$

$$\int_{[X>t]} N_{t+s} - N_t \, dP = \text{konstanta}$$

$$\| \qquad = E\left[1\!\!1_{[X>t]} \underbrace{(N_{t+s} - N_t)}_{\in\{0,1\}}\right] = P[X>t, N_{t+s} - N_t = 1]$$

$$\int_{[X>t]} \underbrace{E[N_{t+s} - N_t | \mathcal{F}_t]}_{k} dP = k \cdot P[X>t] \quad = \quad P[t<X\leq t+s, \delta = 1]$$

$$\rightarrow k = \frac{P[t<X\leq t+s, \delta=1]}{P[X>t]} \cdot \frac{P[t<T<t+s, U>t, \delta=1]}{P[\tau>t, U>t]}.$$

Podobně k^*

$$\int_{[X>t]} \underbrace{E\left[\int_t^{t+s} 1\!\!1_{[X\geq u]} \lambda(u)\, du \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]}_{k^*} dP = k^* \cdot P[X>t]$$

$$\int_{[X>t]} \left(\int_t^{t+s} 1\!\!1_{[X\geq u]} \lambda(u)\, du\right) dP = \int_\Omega \left(\int_t^{t+s} 1\!\!1_{[X\geq u]} \lambda(u)\, du\right) dP$$

$$\rightarrow k^* = \frac{\int_t^{t+s} P[X\geq u] \lambda(u)\, du}{P[X>t]} \qquad \text{martingal} \Leftrightarrow k = k^*$$

tedy $\int_t^{t+s} P[X\geq u] \lambda(u)\, du = \int_t^{t+s} P[\tau \geq u, U \geq u] \lambda(u)\, du$

$$\| $$

$$P[t<\tau \leq t+s, U>t, \delta=1]$$

$\forall t, \forall s \geq 0 \ldots$ tedy i pro

$$P[\tau \geq t, U \geq t]\,\lambda(t)\cdot s + o(s) = P[t < T \leq t+s, U > t, \delta = 1]$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = \lim_{h \to 0+} \ldots$$

$\square$

Otázka: Je A_t $\mathcal{F}_t$-predikabilní?
(pak budem moct použ. lim. věty)

9.5.2018

τ … čas do selhání
U … čas do cenzorování
$X = \tau \wedge U$ … čas do události

$$N_t = 1\!\!1_{[\tau \leq t]} \underbrace{1\!\!1_{[\tau \leq U]}}_{\delta}$$

$$\lambda(u) = \frac{f(u)}{1 - F(u)}$$

F je dist. fu τ
f je hustota τ

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$$

$$M_t = N_t - \int_0^t 1\!\!1_{[X \geq u]}\,\lambda(u)\,du$$

je martingal tehdy a jen tehdy

$$\lambda(u) = -\frac{d}{dt} \frac{P[\tau \geq t, U \geq u]}{P[\tau \geq u, U \geq u]}\Big|_{t=u}$$

τ není absolutně spojitá

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{1 - F(u-)}\,dF(u)$$

Věta: Buďte τ a U nezáporné náhodné veličiny

$$N_t = 1\!\!1_{[X\le t]}\cdot\delta\,, \quad N_t^u = 1\!\!1_{[X\le t]}\cdot(1-\delta)\,,$$

$$F_t^u = \sigma\{N_s\,, N_s^u\,; s\le t\}$$

Pak proces $M_t = N_t - \int_0^t 1\!\!1_{[X\ge u]}\, d\Lambda(u)$

$$\left(= \int_0^t 1\!\!1_{[X\ge u]} \frac{1}{1-F(u-)}\, dF(u)\right)$$

je martingal tehdy a jen tehdy, je-li

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{P[\tau\ge u, U\ge u]}\, dP(u, U\ge u) \quad \forall t\ge 0.$$

neboli

$$d\Lambda(t) = \frac{-dP[\tau\ge u, U\ge t]}{P[\tau\ge t, U\ge t]}\Big|_{u=t}$$

neboli $\int_0^t \frac{1}{P[\tau\ge u]}\, dP_\tau(u) = \int_0^t \frac{1}{P[\tau\ge u, U\ge u]}\, dP_{\tau,U}[u, U\ge u]$ $\forall t\ge 0.$

$$P[\tau\le u, U\ge u] = P[\tau\le u \mid U\ge u]\cdot P[U\ge u] =$$

$$= F_{\tau|U\ge u}(u)\cdot P[U\ge u] =$$

$$= \int_0^t \frac{P[U\ge u]}{P[\tau\ge u, U\ge u]}\, dF_{\tau|U\ge u}(u)$$

Pokud τ nabývá pouze celočíselných hodnot ($\in\mathbb{N}$), pak Λ je po částech konstantní se skoky $\frac{P[\tau=n]}{P[\tau\ge n]}$, $n\in\mathbb{N}$.

Jsou-li τ a U nezávislé, podmínka (M) je splněna
(M) ... nezávislé cenzorování

D-M rozklad

N submartingal $\exists$ (až na modifikaci jediný) neklesající $\mathcal{F}_t$-prediktabilní A_t takový, že $A_0 = 0$ $\quad N_t - A_t$ je martingal.

$$A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{[X \geq u]} \, d\Lambda(u) = \int_0^t \underbrace{\mathbb{1}_{[X \geq x]} \frac{1}{1-F(u-)}}_{\geq 0} \underbrace{dF(u)}_{\text{nekles.}}$$

je neklesající.

$A_0 = 0 \qquad (F(0) = F(0+) = 0 = F(0-)$ (τ nenabývá hodnoty 0

A je $\mathcal{F}_t^U$-adaptovaný

Λ je zprava spojitý $\Rightarrow$ A je také zprava spojitý
(nevíme prediktabilitu).

Ukážeme, že A je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní a tedy jde o proces z Doobova ~~a~~ Meyerova rozkladu.

Je-li τ absolutně spojitá náh. veličina, pak ~~A_t~~

$$A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{[X \geq u]} \lambda(u) \, du$$, což je spojitá funkce

$\Rightarrow$ A je $\mathcal{F}_t$ prediktabilní.

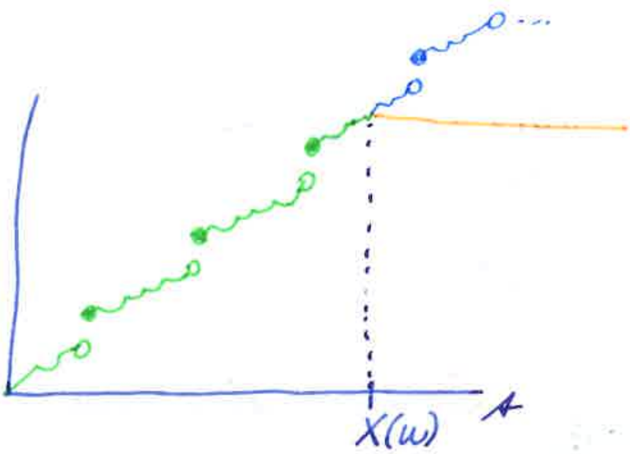
$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{1-F(u-)} \, dF(u)$$

Λ má skoky ve stejných bodech, jako F a to o velikosti $\dfrac{P[\tau = t]}{P[\tau \geq t]}$.

kde je ta náhodnost.

$A(t) = \Lambda(t \wedge X)$

A má skoky přesně, jako Λ. jen s tím rozdílem, že v čase X to skončí.

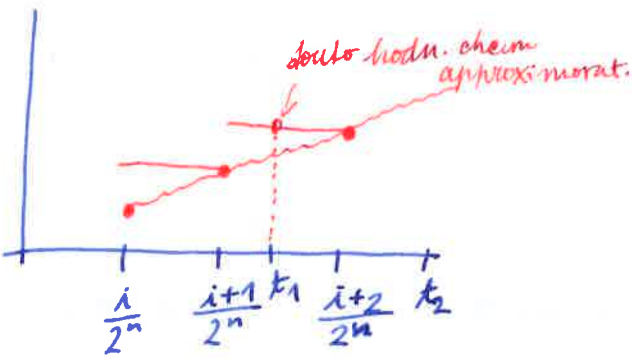


Λ funkce } obě.
A funkce

Věta: Nechť τ, U, Λ jsou jako v předch. větě.
Pak proces $A_t = \int_0^t 1_{[X \geq u]}\, d\Lambda(u)$ je $\mathcal{F}_t$-prediktabil.

Důkaz: (1) Aproximace Λ pomocí dyadických čísel

$t_i^n = \frac{i}{2^n}$ $\quad i = 0, \dots, 2^n$ $\quad$ přírůstek Λ na intervalu $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]$ je $\Lambda\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \Lambda\left(\frac{i}{2^n}\right) \geq 0$.



$$\Lambda^n(t) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\Lambda\left(\tfrac{i+1}{2^n}\right) - \Lambda\left(\tfrac{i}{2^n}\right)\right) \cdot 1_{[t \geq \frac{i}{2^n}]}$$

aproximuje Λ shora.

... budeme zahušťovat

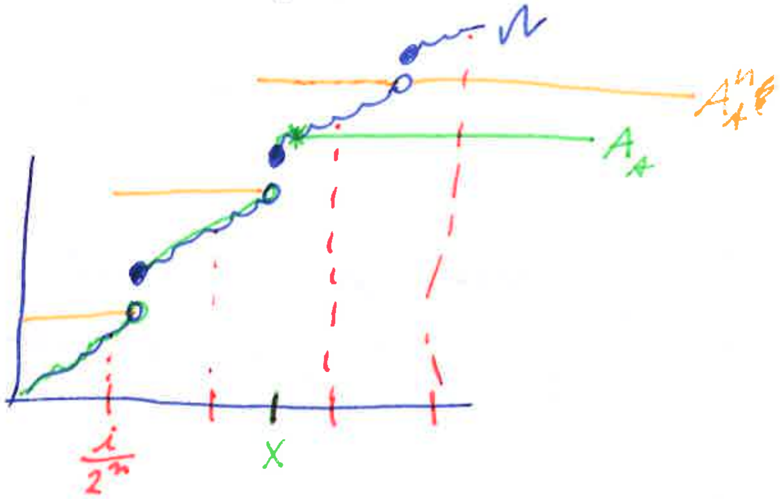
$\Lambda^n(t) \searrow \Lambda(t)$, pokud $n \longrightarrow \infty$.
(s měřitelností není problém... Λ je deterministická funkce.)

(ii) aproximace A

$$A_t = \Lambda(t \wedge X)$$

$$A_t^n = \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\Lambda\left(\tfrac{i+1}{2^n}\right) - \Lambda\left(\tfrac{i}{2^n}\right)\right) \cdot 1\!\!1_{[t \geq \frac{i}{2^n}]} \cdot 1\!\!1_{[X \geq \frac{i}{2^n}]} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} \overbrace{k(i,t)}^{\text{const.}} \cdot \overbrace{1\!\!1_{[X \geq \frac{i}{2^n}]}}^{(*)}$$



(zase je to o kousek větší, než A_t)

$$(*) = 1 - 1[X < \tfrac{i}{2^n}] \in \mathcal{F}^u_{\frac{i}{2^n}-} = \sigma\Big(\bigcup_{h>0} \mathcal{F}^u_{\frac{i}{2^n}-h}\Big) \subset \mathcal{F}_{t-}$$

A_t^n je měřitelná $(\mathcal{F}_t)$

$\Rightarrow A^n$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces $\Rightarrow A^n$ je $\mathcal{F}_t$-predikt.

pak i $\lim A^n = A$ je

$\mathcal{F}_t$-predikatbilní.

$(N_1, \dots, N_n)$ mnohorozměrný čítací proces.

$(\tau_1, U_1), \dots, (\tau_n, U_n)$ nezávislé, stejně rozdělené jako (τ, U)

$$N_{i,t} = 1\!\!1_{[X_i \leq t]}\, \delta_i = 1\!\!1_{[X_i \leq t]} \cdot 1\!\!1[\tau_i \leq U_i]$$

$$X_i = \tau_i \wedge U_i$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{1-F(u-)}\, dF(u) \quad \left(\equiv \int_0^t \frac{f(u)}{1-F(u)}\, du, \text{ je-li } \tau \text{ abs. spojitá}\right).$$

$$A_{i,t} = \int_0^t \mathbb{1}[X_i \geq u]\, d\Lambda(u) = \Lambda(t \wedge X_i)$$

Je-li cenzorování nezávislé (viz podmínka (M))
pak $M_{i,t} = N_{i,t} - A_{i,t}$ jsou martingaly.

Víme, že

(i) Je-li Λ spojitá funkce (tedy i A_i jsou spoj.),
pak

$$\langle M_i \rangle_t = A_{i,t}$$

$$\langle M_i, M_j \rangle_t = 0$$

(ii) nejsou-li A_i spojité (Λ není spojitá fce), pak

$$\langle M_i \rangle_t = \int_0^t (1 - \Delta A_i)\, dA_i = A_{i,t} - \int_0^t \Delta A_i\, dA_i =$$

$$= A_{i,t} - \sum_{s \leq t} (\Delta A_{i,s})^2$$

$$\langle M_i, M_j \rangle_t = -\int_0^t \Delta A_i\, dA_j = -\sum_{s \leq t} (\Delta A_{i,s} \cdot \Delta A_{j,s})$$

$$\Big(= -\sum_{s \leq X_i \wedge X_j \wedge t} (\Delta \Lambda(s))^2 \Big).$$

Mějme: H_i omezené $\mathcal{F}_t$-predikovatelné

$$U_t^n = \sum_{i=1}^n \underbrace{\int_0^t H_i\, dM_i}_{\text{martingal}} \quad , U^n \text{ je martingal.}$$

~~[illegible]~~

Věta: Nechť $N_i, (\tau_i, U_i), X_i, M_i, \Lambda, A_i, H_i, U^n$ jsou jako výše.
Nechť τ_i a U_i tvoří nezávislé cenzorování (viz (M)).
Pak U^n je martingal a

$$E\, U_t^n = 0.$$

Je-li τ absolutně spojitá náh. vel., pak

$$\operatorname{var} U_t^n = \sum_{i=1}^n \int_0^t E\left(H_{i,u}^2 \cdot \mathbb{1}_{(X_i \geq u)}\right) \lambda(u)\, du.$$

Důkaz: $E\, U_0^n = 0$, protože $U^n = 0$ s.j.

$$\operatorname{var} U_t^n = E(U_t^n)^2 = E\Big(\sum_{i=1}^n \int_0^t H_i\, dM_i\Big)^2 =$$

$$= E\Big(\sum_{i=1}^n \big(\int H_i\, dM_i\big)^2 + \sum_{i \neq j}\sum \int_0^t H_i\, dM_i \int_0^t H_j\, dM_j\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^n E\Big(\int_0^t H_i\, dM_i\Big)^2 + \sum_{i\neq j}\sum E\Big(\int_0^t H_i\, dM_i \int_0^t H_j\, dM_j\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^n E \int_0^t H_i^2\, \underbrace{d\langle M_i\rangle}_{dA_i} + \sum_{i \neq j}\sum E \int_0^t H_i H_j\, \underbrace{d\langle M_i, M_j\rangle}_{0} =$$

$$= \sum_{i=1}^n E \int_0^t \underbrace{H_i^2 \cdot \mathbb{1}_{[X_i \geq u]}}_{\text{náhodné}}\, \lambda(u)\, du \;=$$

$\uparrow$ nenáhodné

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^t E\left(H_{i,u}^2 \cdot \mathbb{1}_{[X_i \geq u]}\right) \lambda(u)\, du.$$

Není-li λ spojitá funkce (τ není abs. spoj. n. vel.) pak U^n je martingal, $E\, U_t^n = 0$

$$\operatorname{var} U_t^n = \sum_{i=1}^n \int_0^t E\Big(H_{i,u}^2 \underbrace{\Big(1 - \mathbb{1}_{[X_i \geq u]} \underbrace{\frac{P[\tau = u]}{P[\tau \geq u]}}_{\Delta\Lambda(u)}\Big)}_{\text{navíc oproti předchozímu}} \cdot \mathbb{1}_{[X_i \geq u]}\Big)\, d\Lambda(u).$$

$$- \sum_{i \neq j} \sum \int_0^t E\left(H_{i,u} H_{j,u} \cdot \mathbb{1}_{[X_i \geq u]} \cdot \mathbb{1}_{[X_j \geq u]} \right) \frac{P[\tau = u]}{P[\tau \geq u]} \, d\nu(u).$$

na ~~rozdyl~~ rozdíl od předchozího

$t \mapsto$ var U_t^n není spojité zobrazení. $\square$

chybí hodnota (? 16. 5.)

23.5.2018

N čítací proces

$M = N - A$ $\quad$ A prediktabilní, neklesající

$M = N - A$ je martingal

τ ... čas do selhání

U ... čas do cenzorování $\qquad A_t = \Lambda(t \wedge X).$

$X = \tau \wedge U$ ... čas do události

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{1}{1 - F_\tau(s-)} dF_\tau(s)$$

$U_t = \int_0^t H_s \, dM_s$ martingal

$\langle U \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, dA_s$ prediktabilní variace

$E\, U_t = 0$

$E\, U_t^2 = E\langle U \rangle_t$

Propojíme s limitními větami pro martingaly

$\{X_{n,j}\}$ schéma martingalových diferencí

$\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}$ $\quad , t \in [0,1]$ $\quad r_n(t)$ je neklesající

$[0,1] \longrightarrow \{1, \dots n\}$

$$W_t^n = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}$$

$W^n \xrightarrow{\mathcal{D}} W$, gaussovskému obecně

$\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} t$ $\quad$ nebo $\sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} \int_0^t f^2(s) \, ds \quad \forall t.$

Vezmíme (búno) $t \in [0,1]$

a nějaké dělení $[0,1]$ $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1\}$

$$X_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_s \, dM_s = U_{t_j} - U_{t_{j-1}}$$

X_j jsou martingalové diference

R - posloupnost dělení:

$Q^n = \{t_j^n, j = 0, \ldots k_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že

$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = 1$

$Q^n \subset Q^{n+1}$ (zjemňující se)

$|Q^n| = \max_j |t_j^n - t_{j-1}^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$X_{n,j} = U_{t_j^n} - U_{t_{j-1}^n}$ schéma marting. diferencí

Chceme tam udělat limitní přechody

$N^{\{1\}}, N^{\{2\}}, \ldots$ nezávislé čítací procesy

nechť k_n „roste dostatečně rychle"

$$U_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t H_s^j \, dM_s^j$$

dva limitní přechody:
① schéma mart. diferencí
② Počet pacientů.

H^j jsou omezené prediktabilní

$M^j = N^j - A^j$

$U^{(n)}$ je martingal vůči $\sigma(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{F}_t^j)$

$\mathcal{F}_t^1 - \sigma(N_s^1, N_s^{u,1}, s \le t)$... kanonická filtrace N^1, M^1, A^1

$\mathcal{F}_t^j \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t^i \quad \forall i \neq j$

$\Rightarrow$ tedy $U^{(n)}$ je martingal vůči $\sigma(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_t^j)$

(zbavili jsme se závislosti na n)

schéma martingalových diferencí

$$X_{n,j} = \sum_{l=1}^{n} \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} H_s^l \, dM_s^l \quad , j=1,\dots k_n .$$

Věta: $N^1, N^2, \dots$ nezávislé čítací procesy
$A^1, A^2, \dots$ spojité kompenzátory (např. pokud τ je absol. sp. n.
$M^i = N^i - A^i$ martingal
$H^i \dots$ omezená, predikovatelné (stačilo by $E\int_0^1 (H^i)^2 \, dA^i < \infty$)

$$U_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t H_s^j \, dM_s^j ,$$

$$U_t^{(n)}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t H_s^j \cdot 1\!\!1_{[|H_s^j| \geq \varepsilon]} \, dM_s^j , \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

(to co je blízko nuly vyhodí – ponechá jen nezanedbatelné části H.)

Pokud je f měřitelná funkce taková, že

$$\alpha(t) = \int_0^t f^2(s) \, ds < \infty \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{(stačí pro } t=1)$$

a platí-li

$$\left.\begin{aligned} \langle U^{(n)} \rangle_t &\xrightarrow{P} \alpha(t), \\ \langle U^{(n)}(\varepsilon) \rangle_t &\xrightarrow{P} 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}\right\} (L)$$

pak $U^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \int f \, dW$, kde W je standardní wienerův proces na $[0,1]$ (konvergence je ve smyslu $D[0,1]$).

Důkaz:

$$\langle U^{(n)} \rangle_t = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t (H_s^j)^2 \, dA_s^j$$

$$\langle U^{(n)}(\varepsilon) \rangle_t = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t (H_s^j)^2 \cdot 1\!\!1_{[|H_s^j| \geq \varepsilon]} \, dA_s^j .$$

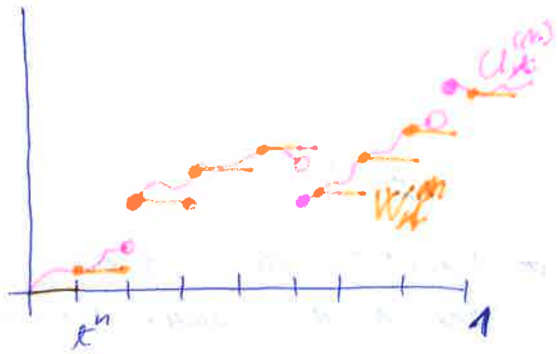
Označíme-li $X_{n,\ell} = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{\ell-1}^n}^{t_\ell^n} H_s^j \, dM_s^j = U_{t_\ell^n}^{(n)} - U_{t_{\ell-1}^n}^{(n)}$,

$\ell = 1, \dots k_n$

schéma martingalových diferencí

$$W_t^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{r_n(t)} X_{n,\ell} \qquad r_n(t) = \max\{\ell;\, t_\ell^n \le t\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_{r_n(t)}^n} H_s^j \, dM_s^j$$



Chceme zjistit, zda platí $\sup_{t \in [0,1]} |W_t^{(n)} - U_t^{(n)}| \xrightarrow{P} 0$

a poté využít martingalové limitní věty

a ukázat $W^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \int f \, dW$

Z Cramérovy sluchého věty $U^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \int f \, dW$.

$$W_t^{(n)} = U_{t_{r_n(t)}^n}^{(n)}$$

$$\sup |W_t^{(n)} - U_t^{(n)}| \le \sup_{\substack{s,t \in [0,1] \\ |s-t| \le |Q^n|}} |U_t^{(n)} - U_s^{(n)}| \xrightarrow{P} 0.$$

$$|Q^n| = \max_j |t_j^n - t_{j-1}^n|$$

$$E(U_t^{(n)} - U_s^{(n)})^2 = E(\langle U^{(n)}\rangle_t - \langle U^{(n)}\rangle_s) =$$

$$= E \sum_{j=1}^{n} \int_s^t (H^j)^2 \, dA \qquad \langle U_t^{(n)}(\varepsilon)\rangle \xrightarrow{P} 0$$

spojité

$$\sum_{j=1}^{n} \int_s^t (H^j)^2 \cdot \mathbb{1}_{[|H^j| \geq \varepsilon]} \, dA \xrightarrow{P} 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_s^t \varepsilon^2 \cdot \mathbb{1}_{[|H|^j < \varepsilon]} \, dA \qquad \varepsilon^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (A_t - A_s)$$

shlízkot malí

$|t-s| < |Q^n|$

$\Rightarrow W_n^{(n)}$ opravdu aproximuje $U^{(n)}$.

můžeme volit malí podle potřeby

Stačí (L) k platnosti marting. limitní věty?

podmínky, které bychom museli ověřit...

• (i) $$\sum_{l=1}^{r_n(t)} E\left[X_{n,l}^2 \mid \mathcal{F}_{n,l-1}\right] \xrightarrow{P} \alpha(t) = \int_0^t f^2(s)\, ds$$

$$\mathcal{F}_{n,l-1} = \mathcal{F}^{(n)}_{t^n_{l-1}}.$$

• (ii) $$\sum_{l=1}^{r_n(t)} E\left[X_{n,l}^2 \cdot \mathbb{1}_{[|X_{n,l}| \geq \varepsilon]}\right] \mid \mathcal{F}_{n,l-1} \xrightarrow{P} 0.$$

podmínka (i) je $$\sum_{l=1}^{r_n(t)} E\left[(U_{t^n_l} - U_{t^n_{l-1}})^2 \mid \mathcal{F}^{(n)}_{t^n_{l-1}}\right]$$

$\mathcal{F}_{n,l-1} = \mathcal{F}^{(n)}_{t^n_{l-1}}$ (kanonická filtrace $U^{(n)}$)

$\langle U^{(n)}\rangle$ je spojitý proces

$$A_t^{(n)} = \sum_{l=1}^{r_n(t)} E\left[(U^{(n)}_{t^n_l} - U^{(n)}_{t^n_{l-1}})^2 \mid \mathcal{F}^{(n)}_{t^n_{l-1}}\right]$$

je $\mathcal{F}^{(n)}_{\underbrace{t^n_{r_n(t)-1}}_{<t}}$ měřitelná n. vel., spec. $\mathcal{F}^{(n)}_{t-}$

$|Q^n| \longrightarrow 0$ (při zjemňujícím se dělení)
pak by ten proces $A_t^{(n)}$ konvergoval ve pstí k predikt. variaci toho U.

ještě jednou bez (n):

$Y \ldots$ martingal $\quad E Y_t^2 < \infty$

$$B_t^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{k_n(t)} E\left[\left(Y_{t_\ell^n} - Y_{t_{\ell-1}^n}\right)^2 / \mathcal{F}_{t_{\ell-1}}\right]$$

filtrace toho Y.

Potom: pokud $|Q^n| \longrightarrow 0$
$B_t^n \xrightarrow{P} \langle Y_t \rangle$

Máme dvojí limitní přechod:

1. $|Q^n| \longrightarrow 0$ dostatečně rychle (zahušťujeme body)

$$\underbrace{\Rightarrow |A_t^{(n)} - \langle U_t^{(n)} \rangle| \xrightarrow{P} 0, \quad \langle U_t^{(n)} \rangle \xrightarrow{P} \alpha(t)}_{A_t^{(n)} \xrightarrow{P} \alpha(t)}$$

2. $(n) \longrightarrow \infty$ … přibývá nám pacientů

My potřebujem, aby se nám ty body zahušťovaly dost rychle, aby nám vyšly obě ty konvergence zároveň … neboco.

$$W^{(n)} = (W_t^{(n)}, t \in [0,1]] \xrightarrow{\mathcal{D}} \int f \, dW$$
na $D[0,1]$

Gaussovský proces s nulovou střední hodnotou, spojitými trajektoriemi
$$E\, G_s G_t = \int_0^{s \wedge t} f^2(u)\, du.$$

$$U_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t H_s^j \, dM_s^j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \underbrace{(H_s^j)^2}_{\approx \frac{1}{\sqrt{n}}} \, dA_s^j \xrightarrow{P} \alpha(t)$$

rostoucí, omezená, spoj.

$$\alpha(t) = \int_0^t f^2(s) \, ds$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^t (H_s^j)^2 \mathbb{1}_{[|H_s^j| \geq \varepsilon]} \, dA_s^j \xrightarrow{P} 0$$

Chceme vlastně, aby pro $\int_s^t H_u^j \, dM_u$, $j = 1, 2, \dots$ platila CLV.

Jak se využije?

Máme-li proces, co konv. k gaussovs. $\Rightarrow$ platí

věta o spoj. zobrazení $\varphi : D[0,1] \to R$ spojitá (aspoň na $C[0,1]$)

pak $W^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} G$ (G spojitý)

$$\Rightarrow \varphi(W^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(G)$$

např. $\max_t |W_t^{(n)}| \xrightarrow{\mathcal{D}} \max_t |G_t|$