

Problém 1 Existuje spojitě surjektivní zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ („Peanova křivka“) takové, že všechny množiny $f([a, b])$, $0 \leq a < b \leq 1$, jsou konvexní? **Komentář** V práci

[J. Pach, C.A. Rogers: Partly convex Peano curves, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 321–328 (je na internetu)]

je sestrojena f , pro kterou podmínka platí, pokud $a = 0$ nebo $b = 1$. Před pokusem o řešení je vhodné se seznámit s

[A. Vince, J. Pach, C.A. Rogers; Problems and Solutions: Solutions of Elementary Problems: E3139. Amer. Math. Monthly 95 (1988), no. 8, 765–767 (je na internetu v JSTORu)].

L.Z., 19.10.09

Problém 2a Pro funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ nechť $C(f) := \{x \in [0, 1] : f'(x) = 0\}$ je množina kritických bodů funkce f a nechť $CV(f) := f(C(f))$ je množina kritických hodnot funkce f . Pro $n \in \mathbb{N}$ charakterizujte systém množin

$$S_{dif_n} := \{CV(f) : f \text{ má } n - \text{tou derivaci na } [0, 1]\}.$$

Komentář Je možné, že řešení je známo, ale já jsem je v literatuře nenalezl. Je známo, že $S_{C^1} := \{CV(f) : f \in C^1[0, 1]\}$ je systém všech kompaktních množin nulové míry. Charakterizace systémů $S_{C^s} := \{CV(f) : f \in C^s[0, 1]\}$, $s \in (0, \infty]$ je také známa, ale složitější; viz

[S.M. Bates, A. Norton: On sets of critical values in the real line, Duke Math. J. 83 (1996), 399–413 (v knihovně MFF není, MÚ AV ano, mám kopii)].

Také nevím, zda jsou známy (asi snadnější) charakterizace analogicky definovaných systémů $S_{libov.}$, $S_{spoj.}$, $S_{lipsch.}$

Problém 2b Nechť $k \geq n$ jsou přirozená čísla. Charakterizujte systém

$S_{n,k} := \{CV(f) : f \in C^k(\mathbb{R}^n), f \text{ má omezený nosič}\}$,
kde definice $CV(f)$ je analogická jako výše.

Komentář

Ve výše uvedeném článku je uvedena hypotéza k tomuto problému, převzatá z nepublikovaného preprintu Y. Yomdina. Autoři tam píší, že se k problému vrátí, ale zatím o něm nic nepublikovali. Zdá se, že v preprintu

[A Ainouline: Necessary and sufficient condition of Morse-Sard theorem for real valued functions, Arxiv preprint math/0405012, 2004 (lze stáhnout z Arxivu)]

jsou charakterizovány množiny, které jsou částí některé množiny z $S_{n,k}$.

L.Z., 19.10.09

Problém 3

The maximal operator on $\mathbb{R}$ is defined on integrable functions by

$$Mf(x) = \sup_{r>0} (2r)^{-1} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| dy.$$

Let $\bigvee g$ denote the usual total variation of a function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Does there exist a constant C such that $\bigvee(Mf) \leq C \bigvee f$ whenever $f \geq 0$ has compact support? As a modification of this problem we may assume in addition that f is absolutely continuous. Then it would be also interesting to know whether Mf is also locally absolutely continuous.

Jan Malý, 22.10.09

Problém 4

(Viz str. 115 článku M. Elekes, T. Keleti, Borel sets which are null or non- σ -finite for every translation invariant measure, Adv. Math. 201 (2006), no. 1, 102–115.)

Řekneme, že borelovská množina $B \subset \mathbb{R}$ je *měřená* (is measured), jestliže existuje translačně invariantní míra μ definovaná na nějaké σ -algebře obsahující všechny borelovské množiny taková, že $\mu(B) > 0$ a restrikce μ na B je σ -konečná míra.

- a) Je sjednocení dvou měřených množin měřená množina ?
- b) Je množina Liouvilleových čísel sjednocením konečně (resp. spočetně) mnoha měřených množin ?
- c) Je každá neprázdná borelovská $B \subset \mathbb{R}$ sjednocením konečně (resp. spočetně) mnoha měřených množin ?

L.Z., 4.12.2009

Problém 5

(viz. Remark 1.3. 1) z článku O. Kurka, On Borel classes of sets of Fréchet subdifferentiability, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 55 (2007), 201–209.)

Nechť f je spojitá reálná funkce na $\mathbb{R}^2$. Je množina $S(f)$ všech bodů fréchetovské subdiferencovatelnosti funkce f nutně typu $G_{\delta\sigma}$?

L.Z., 4.12.2009

Problém 6

Nechť X je Banachův prostor a $f : [a, b] \rightarrow X$. Pak limita

$$md(f, x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x+t) - f(x)\|}{|t|}$$

se nazývá *metrická derivace* f v bodě x . Pokud $md(f, x)$ existuje a

$$\|f(y) - f(z)\| - md(f, x)|y - z| = o(|y - x| + |z - x|), \quad (y, z) \rightarrow (x, x),$$

řekneme, že f je *metricky diferencovatelná* v x .

Otázka: Nechť f je lipschitzovská. Nechť A je množina bodů $x \in [a, b]$, ve kterých f má metrickou derivaci, ale není metricky diferencovatelná. Je množina A nutně 1. kategorie (resp. dokonce σ -pórovitá)?

Komentář: Podobné otázky (ale tato ne) jsou zkoumány v práci J. Duda, O. Maleva, Metric derived numbers and continuous metric differentiability via homeomorphisms, in: Banach spaces and their applications in analysis, 307–330, Walter de Gruyter, Berlin, 2007 (preprint je v ArXivu). (O této práci referoval na semináři M. Koc.)

Množina A je míry nula, protože každá lipschitzovská f je metricky diferencovatelná s.v. (viz. B. Kirchheim, Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure. Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), no. 1, 113–123).

L.Z., 4.12.2009

Problém 7 Je množina křivkově souvislých kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^2$ typu Σ_2^1 (tj. projekcí koanalytické množiny podle nějakého polského prostoru) v prostoru kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^2$?

Poznámka. Výsledek, že uvedená množina je Π_2^1 -úplná, pokud nahradíme $\mathbb{R}^2$ prostorem $\mathbb{R}^n$ s $n \geq 3$ dokázali Ajtai a Becker. Výsledek, že množina křivkově souvislých kontinuí v rovině je typu Π_2^1 a že není Π_1^1 ani Σ_1^1 dokázali Ajtai a Becker, resp. Darji. (Tyto informace s odkazy viz přehledový článek A. Marcone: Complexity of sets and binary relations in continuum theory: a survey a zčásti též knihu A.S. Kechris: Classical Descriptive Set Theory, vyd. 1994, str. 317-318).

Zapsal P. Holický, 22.10.2010

Problém 8 Existuje pro každý spočetný ordinál α spočetný ordinál $\beta(\alpha)$ tak, že platí:

Pokud lze podmnožinu $\mathbb{R}^2$ napsat ve tvaru $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n$, A_n, B_n jsou borelovské a M je aditivní borelovské třídy α , pak ji lze zapsat ve tvaru $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \times B'_n$, kde $A'_n, B'_n \subset \mathbb{R}$ jsou borelovské množiny aditivní třídy $\beta(\alpha)$.

Poznámka. Jde o problém vyslovený D. Lecomtem. Ten též upozornil, že pokud nahradíme spočetná sjednocení konečnými, pak má stejná otázka kladnou odpověď. V tuto

chvíli nevím, zda vypuštění předpokladu borelovskosti množin A_n, B_n by na problému něco změnilo.

Zapsal P. Holický, 22.10.2010

Problém 9 Nechť $\mathcal{B}$ je systém podmnožin úplného metrického prostoru, který je bodově spočetný a borelovsky-aditivní, tj. každý podsystém $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ má borelovské sjednocení $\bigcup \mathcal{C}$. Existuje pak σ -diskrétní zjemnění systému $\mathcal{B}$, které je pokrytím $\bigcup \mathcal{B}$?

Jde o Hansellův problém, ke kterému existuje pozitivní řešení ve speciálním případě, kdy "borelovské" nahradíme typem $F_{\sigma\delta}$. To řešili J. Spurný a M. Zelený ve svém článku Additive families of low Borel class and Borel measurable selectors, to appear in Canadian Mathematical Bulletin. Tam lze nalézt informace o případech pro G_δ a F_σ , které dříve řešili Hansell, resp. Spurný. Pozitivní odpověď pro případ systémů $G_{\delta\sigma}$ -aditivních by tedy byl nový výsledek. Negativní odpověď pro případ analyticky-aditivních systémů za dodatečných množinových předpokladů ukázal Hansell.

Zapsal P. Holický, 22.10.2010