Komutující a konjugovaná slova

Věta. Nechť $u, v \in \Sigma^+$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(a) $uv = vu$,
(b) $u^i = v^j$ pro nějaká $i, j \in \mathbb{N}$,
(c) $u = t^k$ a $v = t^\ell$ pro nějaké $t \in \Sigma^+$ a nějaká $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Důkaz. (a) $\Longrightarrow$ (c). Pokud $|u| = |v|$, je $t = u = v$ a $k = \ell = 1$. Postupujme nyní indukcí podle $|uv|$. Je-li $|uv| = 2$, je $|u| = |v| = 1$ a jsme hotovi. BÚNO předpokládejme, že $|u| < |v|$, a nechť $w = u^{-1}v$. Pak $uuw = uwu$, a tedy $uw = wu$. Podle indukčního předpokladu tedy $u = t^k$ a $w = t^{\ell'}$ pro nějaké t a nějaká $k, \ell' \in \mathbb{N}$. Pak $v = uw = t^{k+\ell}$.

(c) $\Longrightarrow$ (b). Stačí volit $i = \ell$ a $j = k$.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Pokud $|u| = |v|$, je také $u = v$ a $uv = vu$. Opět BÚNO předpokládejme, že $|u| < |v|$ a $v = uw$. Pak $v^j = (uw)^j = u^i = u^{-1}u^i u = (wu)^j$, a tedy $uw = wu$. Pak také $vu = uwu = uuw = uv$. □

Důsledek. Každé neprázdné slovo w je mocninou jediného primitivního slova t.

Slovo t z předchozího tvrzení se nazývá *primitivní kořen* slova w. Větu lze výrazně zesílit pomocí následujícího lemmatu.

Lemma. Nechť $uv \neq vu$. Označme $z = uv \wedge vu$. Pak $z = uw_1 \wedge vw_2$ pro libovolná slova $w_1, w_2 \in \langle u, v \rangle$ taková, že $|uw_1| \geq |z|$ a $|vw_2| \geq |z|$.

Důkaz. Nechť $za \leq uv$ a $zb \leq vu$, kde a, b jsou písmena. Stačí ukázat, že $za \leq u^i v$ a $zb \leq v^i u$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pro $i = 1$ to je zřejmé a dále postupujme indukcí. Slovo $u^{i+1}v$ má podle indukčního předpokladu prefix uz, což je také prefix uvu. Všechna tři slova mají tedy stejný prefix délky $|z| + 1$, tedy za, jak je vidět na slově uvu. Podobně ukážeme, že $zb \leq v^i u$. □

Příklad. Nechť $u = aaba$ a $v = aab$. Pak $z = uv \wedge vu = aabaa$. Vidíme tedy, že z může být delší obě slova u a v.

Důsledek. Pokud slova u a v splňují netriviální vztah, pak komutují.

Pro tři slova neexistuje žádné omezení pro délku společného prefixu různě utvořených slov. Uvažme např. slova $x = ab$, $y = aba$ a $z = baa$. Pak platí $xy^\omega = yz^\omega$. Všimněme si přitom, že slova x, y, z tvoří kód. Platí tedy, že slova, která nesplňují žádnou konečnou relaci, mohou splňovat relaci nekonečnou. Pro tři slova je ovšem taková relace nejvýše jedna.

Můžeme si rovněž všimnout, že konjugovaná slova x, y splňují relaci "oboustranně nekonečnou": $x^{\mathbb{Z}}$ a $y^{\mathbb{Z}}$ tvoří až na posunutí stejnou posloupnost.

Pro slova $x = aba$, $y = b$ nastává ještě jiná situace. Posloupnost $(xy)^{\mathbb{Z}}$ je totiž rovna sama sobě pomocí netriviálního posunutí o dvě písmena.

Definice. Řekneme, že neprázdná slova x a y jsou konjugovaná, pokud existují slova u a v taková, že $x = uv$ a $y = vu$.

Věta. Nechť jsou slova x a y konjugovaná.

(a) Slovo x je primitivní, právě když je y primitivní.
(b) Slova x a y mají konjugované primitivní kořeny.
(c) Existuje právě jedna dvojice slov $(t_1, t_2) \in \Sigma^+ \times \Sigma^*$ taková, že $t_1 t_2$ je primitivní kořen x a $t_2 t_1$ je primitivní kořen y.

Důkaz. Nechť $x = uv = t^i$, kde t je primitivní kořen uv a $y = vu$. Pak existuje neprázdný prefix t_1 slova t a exponent $0 \leq j < i$ takové, že $u = t^j t_1$ a $v = t_2 t^{i-j-1}$, kde $t_2 = t_1^{-1} u$. Pak $y = (t_2 t_1)^i$. Podobně dostaneme, že $x = (s_2 s_1)^{i'}$, kde $s = s_1 s_2$ je primitivní kořen y a $y = s^{i'}$. Z věty o komutujících slovech dostáváme $i = i'$ a $s = t_2 t_1$, čímž je dokázáno (a) a (b).

Nechť nyní $t = t_1' t_2'$ a $s = t_2' t_1'$. BÚNO předpokládejme, že $|t_1| \leq |t_1'|$. Pak $t_1' = t_1 r$ a $t_2 = r t_2'$ pro nějaké r. Dostáváme $rs = r t_2' t_1' = t_2 t_1' = t_2 t_1 r = sr$. Protože r je kratší než primitivní slovo s a komutuje s ním, musí být prázdné, což ukazuje (c). □

Následující věta dává ekvivalentní charakteristiku konjugovanosti.

Věta. Pro slova x, y, z platí $zx = yz$, právě když jsou x a y konjugovaná a $z \in t_2(t_1 t_2)^*$, kde $(t_1, t_2) \in \Sigma^+ \times \Sigma^*$ je taková dvojice, že $t_1 t_2$ je primitivní kořen slova x a $t_2 t_1$ je primitivní kořen slova y.

Důkaz. Přímou implikaci dokážeme indukcí podle délky z. Předpokládejme nejprve $0 \leq |z| < |y|$. Pak $y = zz'$, kde $z = t_2(t_1 t_2)^j$ a $z' = (t_1 t_2)^{j'} t_1$ pro nějaké $0 \leq j$ a nějaký neprázdný sufix t_1 primitivního kořene $t = t_2 t_1$ slova y. Pak $zx = zz'z = yz$ a $x = z'z = (t_1 t_2)^{j+j'+1}$. Podle předchozí věty je $t_1 t_2$ primitivní kořen x.

Je-li $|z| > |y|$, pak $z = yz' = z'x$ pro $z' = y^{-1} z$. Podle indukčního předpokladu platí $z' \in t_2(t_1 t_2)^*$, kde $x \in (t_1 t_2)^*$, a tedy také $z = z'x \in t_2(t_1 t_2)^*$.

Obrácenou implikaci snadno ověříme. □