Lineární operátory v euklidovských prostorech

V této části použijeme obecné výsledky o lineárních operátorech ve vektorových prostorech nad komplexními čísly z předchozích kapitol k podrobnějšímu zkoumání lineárních operátorů v reálných prostorech se skalárním součinem.

Na počátku budeme předpokládat, že A je lineární operátor na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ dimenze n. Věta 87 o existenci vlastního vektoru u libovolného lineárního operátoru na komplexním vektorovém prostoru má v reálném případě následující podobu. Také zde se musíme odvolat na základní větu algebry.

Věta 99. Pro každý lineární operátor na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ existuje invariantní podprostor dimenze 1 nebo dimenze 2.

Důkaz. Zvolíme nějakou bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ prostoru $\mathcal{V}$. Budeme opět zkoumat soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n &= \lambda c_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n &= \lambda c_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + a_{nn}c_n &= \lambda c_n. \end{aligned}$$

a hledat nějaké nenulové řešení $c_1^0, \dots, c_n^0$ této soustavy. Takové řešení existuje právě když je hodnota parametru λ zvolena tak, aby platilo

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Tato podmínka vede stejně jako v důkazu Věty 87 k algebraické rovnici n-tého stupně, tentokrát ale s **reálnými** koeficienty. Protože každé reálné číslo je současně komplexním číslem, plyne ze základní věty algebry, že charakteristická rovnice operátoru A má aspoň jeden **komplexní kořen** λ_0. Potom jsou možné dva případy.

a) Číslo λ_0 je reálné. Naše soustava lineárních rovnic má potom nenulové **reálné** řešení $c_1^0, \dots, c_n^0$. Tato reálná čísla jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Vektor $\mathbf{x}$ je potom vlastním vektorem operátoru A a λ_0 je příslušné vlastní číslo.

b) Kořen λ_0 charakteristické rovnice operátoru A je komplexní číslo $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Naše soustava lineárních rovnic má potom opět nenulové řešení $c_1^0, \dots, c_n^0$, tentokrát ale nemůžeme předpokládat, že jsou čísla $c_1^0, \dots, c_n^0$ reálná. Jsou to obecná komplexní čísla, tedy

$$c_k^0 = \xi_k + i\eta_k, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Dosadíme za λ_0 a c_k^0 do naší soustavy lineárních rovnic a oddělíme reálné a komplexní části. Dostaneme tak dvě soustavy lineárních rovností:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n &= \alpha\xi_1 - \beta\eta_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n &= \alpha\xi_2 - \beta\eta_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n &= \alpha\xi_n - \beta\eta_n. \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \cdots + a_{1n}\eta_n &= \alpha\eta_1 + \beta\xi_1, \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \cdots + a_{2n}\eta_n &= \alpha\eta_2 + \beta\xi_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \cdots + a_{nn}\eta_n &= \alpha\eta_n + \beta\xi_n. \end{aligned}$$

Reálná čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ budeme považovat za souřadnice nějakého vektoru $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ a podobně můžeme čísla $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ považovat za souřadnice vektoru $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vzhledem k téže bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Oba vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ nejsou současně nulové. Potom můžeme poslední dvě soustavy rovností zapsat ve tvaru

$$A(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}, \quad A(\mathbf{y}) = \beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}.$$

Kdyby byly vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ lineárně závislé, plynulo by z libovolné z předchozích dvou soustav rovností, že aspoň jeden z vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ je vlastním vektorem operátoru A a příslušné vlastní číslo by bylo reálné.

Vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou tedy lineárně nezávislé a generují dvoudimenzionální podprostor $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{V}$. Z rovností $A(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}$, $A(\mathbf{y}) = \beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ plyne, že $\mathcal{P}$ je invariantní podprostor operátoru A. $\square$

V posledním důkazu jsme ukázali o něco více, než jenom existenci dvoudimenzionálního invariantního podprostoru $\mathcal{P}$ operátoru A v případě, že operátor A má vlastní číslo $\lambda = \alpha + i\beta$, které **není** reálné. Ukázali jsme navíc, že v invariantní rovině $\mathcal{P}$ existuje báze $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, kterou operátor A zobrazuje následovně

$$A(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}, \quad A(\mathbf{y}) = \beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}.$$

Připomeňme ještě poznámku uvedenou za Definicí 44, že každý lineární operátor na reálném vektorovém prostoru liché dimenze má aspoň jeden vlastní vektor, neboli aspoň jeden invariantní podprostor dimenze 1.

Ortogonální operátory. Nyní k našim úvahám přibereme skalární součin, který je v euklidovském prostoru $\mathcal{V}$ definovaný.

Definice 46. Lineární operátor A na n-dimenzionálním euklidovském vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá *ortogonální operátor,* jestliže zachovává skalární součin, tj. platí-li pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ rovnost

$$(A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Zvolíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, dostaneme rovnost

$$||A(\mathbf{x})||^2 = (A(\mathbf{x}), A(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2,$$

neboli každý ortogonální operátor zobrazuje libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ do vektoru stejné délky. Vzpomeneme-li si ještě na vyjádření úhlu φ mezi dvěma vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pomocí skalárního součinu,

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||},$$

uvidíme že ortogonální operátory zachovávají rovněž úhel mezi dvěma vektory. Speciálně zobrazují dva kolmé vektory na jiné dva kolmé vektory. Odtud název ortogonální operátory. Všimněte si ještě, že ortogonální operátor A musí zobrazovat libovolný nenulový vektor $\mathbf{x}$ opět na nenulový vektor $A(\mathbf{x})$. Plyne to z toho, že nulový vektor $\mathbf{0}$ je jediný vektor délky 0. Každý ortogonální operátor má tedy nulové jádro a je proto vzájemně jednoznačný.

Je-li $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ nějaká ortonormální báze v prostoru $\mathcal{V}$, pak vektory $A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), \dots,$ $A(\mathbf{e}_n)$ také tvoří ortonormální bázi. Buď (a_{ik}) matice operátoru A vzhledem k ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Potom k-tý sloupec matice (a_{ik}) tvoří souřadnice vektoru $A(\mathbf{e}_k)$ v ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Pro libovolná dvě různá čísla $k, l = 1, \dots, n$ proto platí

$$0 = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = (A(\mathbf{e}_k), A(\mathbf{e}_l)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{il},$$

a stejně tak

$$1 = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k) = (A(\mathbf{e}_k), A(\mathbf{e}_k)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{ik}.$$

Definice 47. Čtvercová matice $M = (a_{ik})$ řádu n složená z reálných čísel se nazývá *ortogonální matice,* platí-li

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}$$

pro libovolné $k, l = 1, \dots, n$.

Čtvercová matice M je tedy ortogonální právě když platí $M'M = I$, kde M' je matice transponovaná k matici M. Z věty o násobení determinantů (Věta 64) a z Věty 60 plyne, že

$$\det M' \det M = \det M \det M = \det I = 1,$$

neboli $\det M = \pm 1$ pro každou ortogonální matici M.

Determinant matice ortogonálního operátoru A vzhledem k libovolné ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ se tedy rovná ± 1. Ortogonální operátor A, jehož determinant se rovná $+1$, se nazývá *vlastní ortogonální operátor*. Je-li determinant matice operátoru A roven -1, nazývá se A *nevlastní ortogonální operátor*.

V případě ortogonálních operátorů má každý invariantní podprostor invariantní doplněk. Tato důležitá vlastnost ortogonálních operátorů má snadný důkaz.

Věta 100. Je-li $\mathcal{P}$ invariantní podprostor ortogonálního operátoru A na euklidovském prostoru $\mathcal{V}$, pak také ortogonální doplněk $\mathcal{P}^\perp$ podprostoru $\mathcal{P}$ je invariantní podprostor operátoru A.

Důkaz. Je-li $\mathbf{y} \in \mathcal{P}^\perp$, pak platí $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Protože je operátor A vzájemně jednoznačný na celém prostoru $\mathcal{V}$, je také vzájemně jednoznačný na podprostoru $\mathcal{P}$. Proto existuje pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ vektor $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$ takový, že $A(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$. Potom platí pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$

$$(\mathbf{x}, A(\mathbf{y})) = (A(\mathbf{z}), A(\mathbf{y})) = (\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0,$$

neboli $A(\mathbf{y}) \in \mathcal{P}^\perp$ pro každý vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$. $\square$

Probereme teď ortogonální operátory v malých dimenzích. Nejsnazší to je v případě jednodimenzionálního prostoru. Zvolíme v něm nějaký vektor $\mathbf{e}$ délky 1. Potom $A(\mathbf{e}) = \lambda \mathbf{e}$ a z podmínky ortogonality A plyne

$$1 = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (A(\mathbf{e}), A(\mathbf{e})) = (\lambda \mathbf{e}, \lambda \mathbf{e}) = \lambda^2 (\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \lambda^2.$$

Platí tedy $\lambda = \pm 1$. Na jednodimenzionálním euklidovském prostoru tedy existují pouze dva ortogonální operátory. Je to buď identický operátor $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ (vlastní ortogonální operátor) a nebo operátor $A(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ (nevlastní).

Buď nyní A ortogonální operátor na dvoudimenzionálním euklidovském prostoru $\mathcal{V}$. Zvolme v něm ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a nechť

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je matice operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Budeme dále předpokládat, že operátor A je vlastní ortogonální operátor, tj. platí $ad - bc = 1$.

Matice operátoru A musí být navíc ortogonální, tj. musí platit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\perp 1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti $ad - bc = 1$ plyne jiné vyjádření inverzní matice k matici operátoru A:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\perp 1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Protože je inverzní matice k libovolné regulární matici určena jednoznačně, dostáváme rovnosti $a = d$, $c = -b$. Matice operátoru vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

kde $a^2 + b^2 = 1$. Položíme-li $a = \cos\varphi$ a $b = \sin\varphi$, dostaneme že každý vlastní ortogonální operátor A na dvoudimenzionálním euklidovském prostoru $\mathcal{V}$ má vzhledem k libovolné ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ matici

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

kde φ je vhodný úhel. Operátor A tedy není nic jiného než pootočení o úhel φ.

Nyní budeme uvažovat případ nevlastního ortogonálního operátoru A, tj. případ $ad - bc = -1$. Charakteristický polynom $\lambda^2 - (a+d)\lambda - 1$ operátoru A má potom reálné kořeny. Existuje tedy vlastní vektor $\mathbf{e}$ operátoru A, tj. platí $A(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$, kde $\lambda = \pm 1$. Vektor $\mathbf{e}$ doplníme do ortonormální báze vektorem $\mathbf{f}$. To je podle Věty 100 také vlastní vektor operátoru A, tedy $A(\mathbf{f}) = \pm\mathbf{f}$. V bázi $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ má tedy matice operátoru A matici

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Protože je ale A nevlastní ortogonální operátor, jsou pro výběr znamének pouze dvě možnosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nevlastní ortogonální operátor ve dvoudimenzionálním euklidovském prostoru $\mathcal{V}$ je tedy osová symetrie vzhledem k ose procházející počátkem.

V libovolné dimenzi platí následující věta.

Věta 101. Buď A ortogonální operátor v n-dimenzionálním euklidovském prostoru $\mathcal{V}$. Potom v prostoru $\mathcal{V}$ existuje ortonormální báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, ve které má operátor A matici

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & & \\
& & & -1 & & & & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & & & \\
& & & & & -1 & & & & & & \\
& & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & \\
& & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & \\
& & & & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\
& & & & & & & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k
\end{pmatrix}.$$

Všechny ostatní prvky matice jsou nulové.

Důkaz. Podle Věty 99 má operátor A na prostoru $\mathcal{V}$ invariantní podprostor $\mathcal{P}$, který má dimenzi 1 nebo 2. Má-li podprostor $\mathcal{P}$ dimenzi 1, zvolíme v něm vektor $\mathbf{e}_1$ délky 1. Jestliže žádný invariantní podprostor dimenze 1 neexistuje, má podprostor $\mathcal{P}$ dimenzi 2. Vybereme v něm ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

V prvním případě platí $A(\mathbf{e}_1) = \pm\mathbf{e}_1$. Ve druhém případě je operátor A na podprostoru $\mathcal{P}$ vlastní ortogonální operátor (jinak by v $\mathcal{P}$ existoval jednodimenzionální invariantní podprostor operátoru A). Vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ má matici

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ortogonální doplněk $\mathcal{P}^\perp$ podprostoru $\mathcal{P}$ je podle Věty 100 také invariantní podprostor operátoru A. Opětovným použitím Věty 99 v něm najdeme invariantní podprostor $\mathcal{Q}$ dimenze 1 nebo 2, v něm zvolíme ortonormální bázi, atd.

Dostaneme tak postupně n navzájem ortogonálních vektorů délky 1. Ty tvoří bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, vzhledem ke které má matice operátoru A blokově diagonální tvar. Vhodnou změnou pořadí vektorů v nalezené bázi získáme matici hledaného tvaru. Každé číslo ± 1 na hlavní diagonále odpovídá jednodimenzionálnímu invariantnímu podprostoru, každá buňka

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

určuje jeden invariantní podprostor dimenze 2. $\square$

Právě dokázaná věta má řadu důsledků. Pár si jich uvedeme. Nazvěme *jednoduchou rotací* vlastní ortogonální operátor A, který v nějakém dvoudimenzionálním invariantním podprostoru $\mathcal{P}$ působí jako otočení o úhel φ, a v ortogonálním doplňku $\mathcal{P}^\perp$ zobrazuje každý vektor do sebe. Ve vhodně zvolené bázi má potom A matici

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & 1 & & & & & \\
& & & \cos\varphi & -\sin\varphi & & & \\
& & & \sin\varphi & \cos\varphi & & & \\
& & & & & 1 & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

Jednoduchá reflexe je nevlastní ortogonální operátor A, který má jednodimenzionální invariantní podprostor $\mathcal{P}$, na kterém zobrazuje každý vektor $\mathbf{x}$ do opačného vektoru $-\mathbf{x}$, a který dále zobrazuje každý vektor ortogonálního doplňku $\mathcal{P}^\perp$ do sebe. Ve vhodně zvolené bázi má potom operátor A (diagonální) matici

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Z Věty 101 si pak snadno dokážete

Důsledek 102. Každý ortogonální operátor A na euklidovském prostoru $\mathcal{V}$ můžeme vyjádřit jako složení několika jednoduchých rotací a několika jednoduchých reflexí. □

Všimněme si ještě, že má-li operátor A na dvoudimenzionálním prostoru vzhledem k nějaké ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ matici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

jde vlastně o otočení o úhel π. Považujeme-li otočení o úhel π také za prostou rotaci, dostaneme další důsledek.

Důsledek 103. Každý vlastní ortogonální operátor na euklidovském lineárním prostoru lze složit z několika prostých rotací. Každý nevlastní ortogonální operátor lze složit z několika prostých rotací a jedné prosté reflexe. □

V euklidovském prostoru dimenze 3 pro každý vlastní ortogonální operátor A existuje ortonormální báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, ve které má A matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Pro všechny vektory $\mathbf{x}$ invariantního podprostoru $\mathcal{P}$ generovaného vektorem $\mathbf{e}_1$ tak platí $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, všechny prvky $\mathcal{P}$ tedy zůstávají na místě. Na ortogonálním doplňku vektoru $\mathbf{e}_1$ (tj. v rovině generované vektory $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) operátor A působí jako otočení o úhel φ. (Připouštíme i případ $\varphi = 0$, tj. že operátor A je identický operátor na celém prostoru $\mathcal{V}$.) Operátor A je tedy rotace kolem osy určené vektorem $\mathbf{e}_1$. Každý vlastní ortogonální operátor v třídimenzionálním euklidovském prostoru $\mathcal{V}$ je tedy rotace kolem nějaké osy.

Složení dvou vlastních ortogonálních operátorů je zase vlastní ortogonální operátor (podle věty o násobení determinantů). Je-li operátor A v euklidovském prostoru dimenze 3 otočení o úhel φ kolem osy určené vektorem $\mathbf{e}$ a operátor B otočení o úhel ψ kolem osy určené vektorem $\mathbf{f}$, pak složení BA těchto dvou operátorů je opět otočení o nějaký úhel χ kolem osy určené nějakým vektorem $\mathbf{g}$. Zajímavé cvičení spočívá v nalezení úhlu χ a vektoru $\mathbf{g}$, jsou-li dány úhly φ, ψ a vektory $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$.