Hermitovské unitární operátory a rozklad AXBXC

V předchozí kapitole jsme bez vysvětlení zavedli rozšířenou Eulerovu formuli

$$e^{-i\frac{\omega}{2}\,\xi\cdot\sigma} = \cos\frac{\omega}{2}E + (x\ell + yj + zk)\sin\frac{\omega}{2}\,.$$

Ukažme nyní, že tato formule odpovídá definici operátorové funkce, jak je definována na normálních operátorech, tedy jako funkce aplikované na vlastní čísla.

Operátory, které tvoří definiční obor naší funkce jsou tvaru

$$\xi\cdot\sigma = xX + yY + zZ,$$

kde $\xi = (x, y, z)$ je jednotkový reálný vektor. Následující lemma ukazuje, že tyto matice tvoří spolu s identitou průnik dvou oblíbených tříd normálních matic, totiž unitárních a Hermitovských. To jsou matice, pro které platí současně $A = A^\dagger$ (Hermitovské) a $A^{-1} = A^\dagger$, neboli $A = A^{-1} = A^\dagger$. Taková je např. všudypřítomná Hadamardova matice. Speciálně také platí $A^2 = E$, což pro diagonalizovatelnou matici zjevně platí, právě když má diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si ovšem, že $A^2 = E$ platí i pro některé nediagonalizovatelné matice, např. pro matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Věta. Matice A je Hermitovská unitární, právě když je rovna $\pm E$, nebo je tvaru $xX + yY + zZ$, kde $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$.

Důkaz. Protože jsou všechny tři Pauliho matice Hermitovské, platí $(xX + yY + zZ)^\dagger = xX + yY + zZ$, tedy i matice $xX + yY + zZ$ je Hermitovská. Vztah $(xX + yY + zZ)^2 = E$ plyne přímým výpočtem z toho, že Pauliho matice jsou involutorní a antikomutativní, tedy že splňují

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = E, \qquad XY = -YX, \qquad YZ = -ZY, \qquad ZX = -XZ.$$

Je-li naopak A Hermitovská unitární, má diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix},$$

tedy $\pm E$ nebo $\pm Z$. Je-li diagonální tvar roven $\pm E$, je i $A = \pm E$ (identita má stejný tvar pro všechny báze). Je-li diagonální tvar $\pm Z$, pak je determinant roven -1. Z charakterizace unitárních matic (viz kapitola *Geometrie projektvních unitárních operátorů*) je nyní snadno vidět, že unitární matice s determinantem -1, která je navíc hermitovská, je tvaru

$$\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = xX + yY + zZ,$$

kde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. □

Pro operátor A s reálnými vlastními čísly r_1 a r_2 označuje výraz $e^{-i\frac{\omega}{2}A}$ operátor, který má diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{2}r_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2}r_1 - i\sin\frac{\omega}{2}r_1 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\omega}{2}r_2 - i\sin\frac{\omega}{2}r_2 \end{pmatrix}.$$

Jsou-li navíc r_1 i r_2 rovna ± 1, dostáváme (v bázi vlastních vektorů) díky sudosti cosinu a lichosti sinu skutečně

$$e^{-i\frac{\omega}{2}A} = \cos\frac{\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - i\sin\frac{\omega}{2}\begin{pmatrix}r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{pmatrix} = \cos\frac{\omega}{2}E - iA\sin\frac{\omega}{2}\,.$$

Formule je tedy na našem definičním oboru korektní

Pro rotace kolem jednotlivých os podle předchozího vztahu dostáváme

$$R_X(\omega) := R_{(1,0,0)}(\omega) = E\cos\frac{\omega}{2} - iX\sin\frac{\omega}{2} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\omega}{2} & -i\sin\frac{\omega}{2}\\ -i\sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2}\end{pmatrix},$$

$$R_Y(\omega) := R_{(0,1,0)}(\omega) = E\cos\frac{\omega}{2} - iY\sin\frac{\omega}{2} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\omega}{2} & -\sin\frac{\omega}{2}\\ \sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2}\end{pmatrix},$$

$$R_Z(\omega) := R_{(0,0,1)}(\omega) = E\cos\frac{\omega}{2} - iZ\sin\frac{\omega}{2} = \begin{pmatrix}\exp(-i\frac{\omega}{2}) & 0\\ 0 & \exp(i\frac{\omega}{2})\end{pmatrix}.$$

Explicitní tvar příslušného reprezentanta projektivní třídy unitárních matic, odpovídajícího rotaci o úhel ω kolem osy $\xi = (x, y, z)$ tedy je

$$R_\xi(\omega) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\omega}{2} - iz\sin\frac{\omega}{2} & -i(x - iy)\sin\frac{\omega}{2}\\ -i(x + iy)\sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} + iz\sin\frac{\omega}{2}\end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že $XYX = -Y$ a $XZX = -Z$, dostáváme užitečný vztah

$$XR_Y(\omega)X = XEX\cos\frac{\omega}{2} - iXYX\sin\frac{\omega}{2} = R_Y(-\omega)$$

a podobně

$$XR_Z(\omega)X = R_Z(-\omega).$$

Nyní již můžeme dokázat větu, kterou potřebujeme pro konstrukci kontrolovaného operátoru pro obecné U.

Věta. Každý unitární operátor U je projektivně ekvivalentní operátoru $AXBXC$, kde $ABC = E$.

Důkaz. Víme, že operátor U je projektivně ekvivalentní operátoru ve tvaru

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2} & -e^{i(\psi-\varphi)}\sin\frac{\vartheta}{2}\\ e^{i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2} & e^{i\psi}\cos\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2} & -\sin\frac{\vartheta}{2}\\ \sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i(\psi-\varphi)}\end{pmatrix},$$

což je projektivně ekvivalentní operátoru

$$R_Z(\varphi)R_Y(\vartheta)R_Z(\psi)R_Z(-\varphi)\,.$$

S využitím výše odvozených vlastností konjugace operátorem X dostáváme

$$\begin{aligned}
&R_Z(\varphi)R_Y(\vartheta)R_Z(\psi)R_Z(-\varphi) =\\
&\quad= R_Z(\varphi)R_Y\left(\frac{\vartheta}{2}\right)R_Y\left(\frac{\vartheta}{2}\right)R_Z\left(\frac{\psi}{2}\right)R_Z\left(\frac{\psi}{2}\right)R_Z(-\varphi) =\\
&\quad= R_Z(\varphi)R_Y\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\left(XR_Y\left(-\frac{\vartheta}{2}\right)X\right)\left(XR_Z\left(-\frac{\psi}{2}\right)X\right)R_Z\left(\frac{\psi}{2}\right)R_Z(-\varphi) =\\
&\quad= \left(R_Z(\varphi)R_Y\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)X\left(R_Y\left(-\frac{\vartheta}{2}\right)R_Z\left(-\frac{\psi}{2}\right)\right)X\left(R_Z\left(\frac{\psi}{2}\right)R_Z(-\varphi)\right)
\end{aligned}$$

a nyní stačí položit

$$A = R_Z(\varphi) R_Y\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \quad B = R_Y\left(-\frac{\vartheta}{2}\right) R_Z\left(-\frac{\psi}{2}\right), \quad C = R_Z\left(\frac{\psi}{2}\right) R_Z(-\varphi)\,.$$

$\square$