Shrnutí teorie

Kubit
$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$
odpovídá bodu na Blochově sféře
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2$$
a platí
$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}(aX + bY + cZ) = \frac{1}{2}E + i\frac{1}{2}\left(a(-iX) + b(-iY) + c(-iZ)\right),$$
kde
$$(a(-iX) + b(-iY) + c(-iZ)) \cong a\ell + bj + ck = v_\varphi \in \mathbb{K}.$$

Působení operátoru
$$U = e^{-i\frac{\omega}{2}\xi\cdot\sigma} = E\cos\frac{\omega}{2} - i(xX + yY + zZ)\sin\frac{\omega}{2}$$
$$\cong \cos\frac{\omega}{2} + (x\ell + yj + zk)\sin\frac{\omega}{2} = q_U \in \mathbb{K},$$

kde $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, má proto podobu
$$|\varphi\rangle\langle\varphi| \overset{U}{\mapsto} U|\varphi\rangle\langle\varphi|U^\dagger = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}(a'X + b'Y + c'Z),$$
kde
$$v_{\varphi'} := a'\ell + b'j + c'k = q_U \cdot v_\varphi \cdot q_U^{-1},$$
což podle věty o konjugaci imaginárního kvaternionu kvaternionem q_U znamená, že U působí jako rotace $\mathbb{S}^2$ kolem osy (x, y, z) o úhel ω.

Hadamardova matice

Aplikujme teorii na matici
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Nejprve je třeba zdůraznit, že rozklad tvaru
$$E\cos\frac{\omega}{2} - i(xX + yY + zZ)\sin\frac{\omega}{2}$$
nemusí existovat (a v tomto případě ani neexistuje) přímo pro matici H, ale pouze pro jednoho projektivního reprezentatntna třídy $[H]_\sim$, kde $H \sim e^{i\psi}H$ je ekvivalence definující PU(2).

Snadno nahlédneme, že platí
$$-iH = -i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Z\right) = E\cos\frac{\pi}{2} - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot X + 0\cdot Y + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot Z\right)\sin\frac{\pi}{2},$$
a tedy H odpovídá rotaci kolem bodu
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
o úhel π.

Pokud uvedený rozklad neuhodneme, musíme najít matici $e^{i\psi}H$, která je tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-ti & -s-ri \\ s-ri & p+ti \end{pmatrix} = pE - i(rX + sY + tZ)\,,$$

kde $p \geq 0$. Je to jedna ze dvou matic s determinantem jedna projektivně ekvivalentních s H. Protože H má determinant -1, dostáváme matice $\sqrt{-1}H = \pm iH$. V tomto případě splňují podmínku $p \geq 0$ obě. Abychom si ujasnili proč, zvolme (jinak než v uhodnutém případě) matici iH. Platí

$$iH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & (-i)^* \\ i & -i \end{pmatrix},$$

tedy

$$p = s = 0, \quad r = t = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hodnoty ω a (x, y, z) nyní plynou ze vztahů

$$p = \cos\frac{\omega}{2}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sin\frac{\omega}{2} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\omega = \pi, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dvojznačnost vyplývá z rovnosti rotace o úhel π kolem protilehlých os způsobené rovností $\pi = -\pi \mod 2\pi$.

YZ -rozklad

Matici H můžeme také zapsat takto

$$-iH = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi/2}{2} & -\sin\frac{\pi/2}{2} \\ \sin\frac{\pi/2}{2} & \cos\frac{\pi/2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = R_Y(\pi/2) \cdot R_Z(\pi).$$

Je možné si rozmyslet, že tyto dvě rotace se skutečně skládají na rotaci odvozenou výše.

V řeči rozšířené Eulerovy formule dostáváme

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{X+Z}{\sqrt{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}Y} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}Z}.$$

Zde se musíme ubránit pokušení sečíst exponenty, což je operace, kterou rozšířená Eulerova formule neumožňuje a notace je v tomto ohledu zavádějící. Dostali bychom

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}Y+Z\right)} = e^{-i\frac{\sqrt{5}}{4}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}Y+\frac{2}{\sqrt{5}}Z\right)},$$

což je rotace kolem jiné osy o jiný úhel. Sčítání exponentů nemůže fungovat už proto, že by z něj plynula komutativita příslušných operátorů, která ovšem neplatí. Uvažme jako další příklad složení $R_X(\pi/2)$ a $R_Y(\pi/2)$. Jak ověříme geometrickou představou, převádí toto složení osu x na osu $-z$, osu y na x a osu z na osu $-y$. Je to tedy rotace kolem bodu $(1, 1, -1)$ o úhel $120°$. V Eulerových formulích máme

$$e^{-i\frac{\pi}{4}Y}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i & -1-i\\ 1-i & 1-i\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(E+X+Y+Z)=$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}\,E-i\sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)=e^{-i\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}Y+\frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)}.$$