

POSTULÁTY KVANTOVÉ MECHANIKY

Postulát 1. Kvantový systém s m bázovými stavy, tj. m možnými výsledky měření, je popsán m -dimenzionálním Hilbertovým prostorem \mathbb{H}_m . Stav systému v daném okamžiku odpovídá nějakému jednodimenzionálnímu podprostoru \mathbb{H}_m .

Přesněji bychom tedy měli říct, že systém je popsán projektivním Hilbertovým prostorem $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{H})$, což můžeme také značit $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ (je-li zřejmé, že uvažujeme standardní skalární součin). Další možný zápis je \mathbb{H}_m/\sim , kde \sim je ekvivalence splňující $|v\rangle \sim \lambda|v\rangle$ pro nenulový vektor $|v\rangle$ a nenulové $\lambda \in \mathbb{C}$.

Fakt, že pracujeme s projektivním prostorem, je do jisté míry zaveden rozhodnutím, že budeme uvažovat pouze vektory s velikostí jedna, které reprezentují příslušné jednodimenzionální podprostory. Je ovšem důležité si všimnout, že takových jednotkových reprezentantů je stále ještě nekonečně mnoho, konkrétně

$$|v\rangle \sim e^{i\varphi}|v\rangle,$$

pro libovolné $\varphi \in \mathbb{R}$. Ve fyzice se o faktoru $e^{i\varphi}$ mluví jako o *globální fázi* a ekvivalence \sim bývá formulována tvrzením, že globální fáze je neměřitelná.

Přirozeným základem kvantové informatiky je kvantový systém se dvěma bázovými stavy, které jsou analogií 0 a 1 používaných v klasické teorii informace. Takový systém se proto nazývá *kubit* a jeho bázové stavy se značí $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Matematicky vzato je tedy kubit *komplexní projektivní přímka* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ale budeme ho častěji značit jako \mathbb{H}_2 (čímž ignorujeme fázovou ekvivalenci stavů).

Postulát 2. Časový vývoj kvantového systému $|u(t)\rangle$ je dán diferenciální rovností

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|u(t)\rangle = H|u(t)\rangle,$$

kde $\hbar \in \mathbb{R}$ je tzv. redukovaná Planckova konstanta a H je hermitovský operátor, označovaný jako *hamiltonián* systému.

Uvedená rovnost se nazývá *Schrödingerova rovnice*. Fyzikální význam Planckovy konstanty je poměr mezi energií a frekvencí fotonu. Protože se jedná o reálné číslo, je možné ho z rovnice vypustit (a uvažovat hamiltonián vydělený touto konstantou). Protože je hamiltonián hermitovský, má pro jeho vlastní vektory Schrödingerova rovnice jednoduchou podobu (vynecháváme Planckovu konstantu)

$$\frac{\partial}{\partial t}|u(t)\rangle = -ir|u(t)\rangle,$$

kde $r \in \mathbb{R}$ je vlastní číslo operátoru H . Pokud předpokládáme, že se hamiltonián v průběhu času nemění, je snadné najít pro vlastní vektor $|u(t)\rangle$ řešení

$$|u(t)\rangle = e^{-irt}|u(t_0)\rangle.$$

S použitím dohody o operátorových funkcích dostáváme pro obecný vektor $|v\rangle$ zápis

$$|v(t)\rangle = e^{-iHt}|v(t_0)\rangle.$$

Je vidět, že operátor e^{-iHt} má vlastní čísla velikosti jedna (konkrétně e^{-irt}), a je tedy unitární.

Protože v kvantových počítačích chceme na vstupu (na vstupních kubitěch) provádět přesně definované diskrétní operace, můžeme druhý postulát přeformulovat v diskrétní podobě takto:

Postulát 2'. Kvantový stav $|\varphi\rangle$ se za časovou jednotku Δt změní na stav $U|\varphi\rangle$, kde U je unitární operátor.

Postulát 3. Měření je dáno hermitovským operátorem M , nazývaným *pozorovatelná veličina*. Nechť

$$M = \sum_i m_i P_i$$

je spektrální rozklad M (tj. m_i jsou vlastní čísla M a P_i projekce na vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu m_i).

- Výsledkem měření je jedno z čísel m_i (které je reálné, protože operátor je hermitovský).
- Pravděpodobnost, že výsledek měření stavu $|\varphi\rangle$ bude m_i je rovna $\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle$.
- Je-li výsledek měření stavu $|\varphi\rangle$ roven m_i , je systém bezprostředně po měření ve stavu

$$\frac{P_i|\varphi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle}}$$

(říkáme, že systém do tohoto stavu *zkolabuje*).

Uvedený postulát popisuje tzv. *projektivní měření* a nevystihuje fenomén kvantového měření v plné obecnosti. Pro naše účely to však bude stačit, navíc platí, že každé měření lze jistými úpravami na projektivní měření převést. V tzv. *nedegenerovaném* případě je počet různých vlastních čísel roven dimenzi systému (neexistují násobná vlastní čísla) a všechny zmiňované podprostory jsou jednodimenzionální. Degenerované měření se tedy vyznačuje tím, že je počet možných výsledků menší než je dimenze systému, tedy menší než u měření jiných veličin (připomeňme, že jsme dimenzi systému popsali jako počet možných výsledků měření).

Všimněme si, že měření je dáno sadou projekčních operátorů P_i a to, který bude použit, je náhodný jev určující výsledek měření. Pravděpodobnost, že bude použit právě operátor P_i , je dána druhou mocninou velikostí výsledku projekce, tedy druhou mocninou normy vektoru $P_i|\varphi\rangle$. Ta je rovna $\langle\varphi|P_i^\dagger P_i|\varphi\rangle$, což je rovno $\langle\varphi|P_i|\varphi\rangle$ vzhledem k tomu, že projekce je hermitovská a idempotentní. Protože platí $|\varphi\rangle = \sum_i P_i|\varphi\rangle$, je pro jednotkový vektor součet všech pravděpodobností roven jedné.

Výsledek projekce je ve výše uvedeném předpisu znormován, a to odmocninou z pravděpodobnosti výsledku. Uvědomme si, že normační faktor, závislý na vektoru $|\varphi\rangle$, činí z měření nelineární zobrazení.

Každé měření vystihuje nějakou vlastnost systému. Hamiltonián, který se vyskytuje ve Schrödingerově rovnici, např. odpovídá tzv. totální energii systému (časový vývoj systému je tedy určen touto veličinou).

Protože je veličina hermitovská, má ortonormální bázi vlastních vektorů $|\mathbf{b}_i\rangle$. Projekce na podprostor P_i je potom rovna

$$P_i = \sum_j |\mathbf{b}_j\rangle\langle\mathbf{b}_j|,$$

kde sčítáme přes všechny báze vektory s vlastním číslem m_i .

Zápis veličiny jako jednoho operátoru (tedy nikoli např. jako souboru projekcí) umožňuje mimo jiné úsporný výpočet střední hodnoty veličiny M na konkrétním

stavu $|\varphi\rangle$ jako

$$\mathbf{E}(M) = \sum_i m_i p(m_i) = \sum_i m_i \langle \varphi | \mathbf{b}_i \rangle \langle \mathbf{b}_i | \varphi \rangle = \langle \varphi | \left(\sum_i m_i |\mathbf{b}_i\rangle \langle \mathbf{b}_i| \right) | \varphi \rangle = \langle \varphi | M | \varphi \rangle.$$

Postulát 4. Necht U a V jsou kvantové systémy. Pak systém složený z U a V je popsán tenzorovým součinem $U \otimes V$. Je-li systém U ve stavu $|u\rangle$ a systém V ve stavu $|v\rangle$, je stav složeného systému roven $|u\rangle \otimes |v\rangle$.