Komplexní projektivní přímka

Kubit je podle postulátů kvantové mechaniky prvek $\mathbb{C}^2$ velikosti jedna, přičemž je možné ignorovat globální fázi. Kubit tedy můžeme chápat jako prvek jednodimenzionálního komplexního projektivního prostoru $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Podle definice jsou prvky $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ dvojice komplexních čísel (α, β) s ekvivalencí

$$(\alpha, \beta) \sim \lambda(\alpha, \beta), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Kubity jsme obvykle reprezentovali libovolným vektorem velikosti jedna se zachovanou nejednoznačností ohledně globální fáze, tedy ohledně vynásobení komplexní jednotkou.

Chceme-li prvek komplexní přímky reprezentovat jednoznačně, nabízí se několik možností:

1. Dvojice (α, β), kde k požadavku na jednotkovou normu $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ přidáme předpoklad, že α je nezáporné reálné. Tímto předpokladem vlastně volíme globální fázi, kromě situace, kdy $\alpha = 0$, pro kterou volíme dvojici $(0, 1)$. Všimněme si, že pro libovolný jednotkový vektor (α, β) lze nálezt $\psi \in [0, \pi/2]$ takové, že $|\alpha| = \cos\psi$ a $|\beta| = \sin\psi$. Naši volbu reprezentanta lze pak zapsat jako $(\cos\psi, e^{-i\varphi}\sin\psi)$, kde je $\varphi \in [0, 2\pi)$ dáno jednoznačně až na případ $(1, 0)$, kde postulujeme $\varphi = 0$ (podobně je výše uvedenou konvencí zvoleno $\varphi = 0$ pro $(0, 1)$).

> **Pozn.:** V literatuře je obvykle voleno φ tak, aby byl reprezentant $(\cos\psi, e^{i\varphi}\sin\psi)$. Tuto konvenci porušujeme, abychom se dostali do souladu s obvyklým pojetím stereografické projekce níže.

2. Kubit lze tedy také reprezentovat dvojicí (ψ, φ), kterou lze chápat jako úhlové souřadnice poloviny jednotkové sféry. Abychom takovou reprezentaci rozšířili na celou sféru, položme $\vartheta = 2\psi$. Pak platí

$$(\alpha, \beta) = \left(\cos\frac{\vartheta}{2},\, e^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

a kubity jednoznačně odpovídají množině dvojic (ϑ, φ), $\vartheta \in (0, \pi)$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ doplněné o $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, podle výše uvedených konvencí.

Ukázalo se, že komplexní projektivní přímku lze reprezentovat reálnou jednotkovou kulovou plochou $\mathbb{S}^2$ (v matematice se mluví o Riemannově sféře, v kvantové fyzice o Blochově sféře).

3. Kubit lze tedy také reprezentovat trojicí reálných čísel (x, y, z), splňujících $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, které představují standardní kartézské souřadnice Blochovy sféry. Vztah k úhlovým souřadnicím je za předpokladu, že úhel φ měříme v rovině os x a y počínaje osou x a úhel ϑ měříme od osy z, dán jako

$$(x, y, z) = (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)\,.$$

4. Dvojici (α, β) lze konečně nahradit číslem

$$\frac{\alpha}{\beta},$$

které zastupuje reprezentanta projektivní přímky

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1\right),$$

přičemž $(1, 0)$ je nevlastní bod projektivní přímky, přirozeně označovaný ∞. Kubity tak jsou reprezentovány *rozšířenou komplexní rovinou* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Celkem tedy máme pro prvky $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ reprezentace

$$\left(\cos\frac{\vartheta}{2},\, e^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \in \mathbb{C}^2,$$
$$(\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta) \in \mathbb{S}^2,$$
$$e^{i\varphi}\cot\frac{\vartheta}{2} \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}\,.$$

Z bodu (x, y, z) na Blochově sféře lze získat jemu příslušný prvek rozšířené komplexní roviny pomocí *stereografické projekce*, označme ji $\mathcal{S}$, kdy každému bodu na kulové ploše odpovídá jeho obraz promítnutý ze severního pólu do roviny určené osami x a y chápané jako komplexní rovina s imaginární osou y (severnímu pólu samotnému přiřadíme bod ∞). Z podobnosti jednoduše vidíme, že

$$\mathcal{S}(x, y, z) = \frac{x+iy}{1-z}\,.$$

Pro $(\alpha, \beta) = \left(\cos\frac{\vartheta}{2},\, e^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$ a $(x, y, z) = (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)$ tedy platí

$$\mathcal{S}(x, y, z) = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{e^{i\varphi}\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} = e^{i\varphi}\frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = e^{i\varphi}\cot\frac{\vartheta}{2} = \frac{\alpha}{\beta}\,.$$

Pro reprezentace kubitu pak platí, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
(\alpha,\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \left(\cos\frac{\vartheta}{2},\, e^{-i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \arrow[d] \\
\frac{\alpha}{\beta} & (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta) \arrow[l, "\mathcal{S}"']
\end{tikzcd}$$

Obrázek 1 ukazuje inverzní stereografickou projekci $P = \mathcal{S}^{-1}$. Ta je dána předpisem:

$$\mathcal{S}^{-1} : a+bi \mapsto \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right).$$

Pro jednotkové (α, β) lze konečně příslušný bod na Blochově sféře získat přímo jako

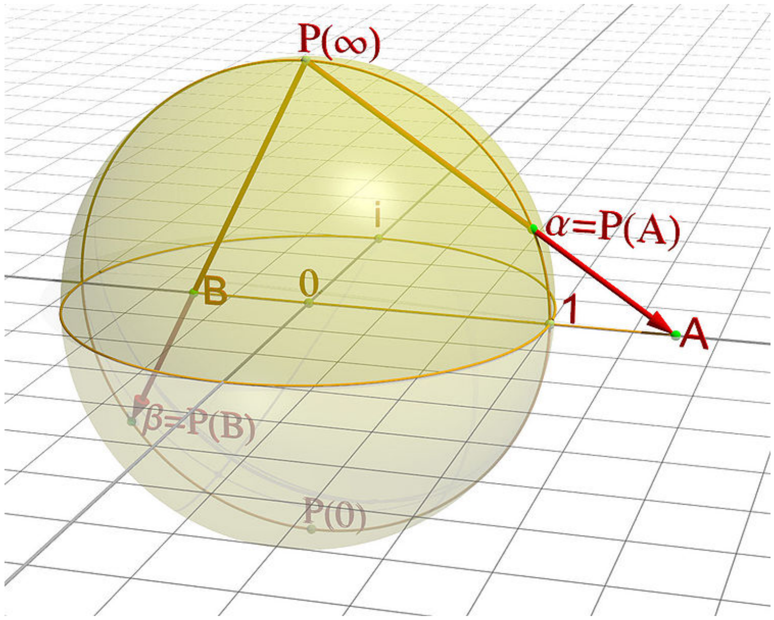
$$(\mathrm{Re}(2\alpha^*\beta), \mathrm{Im}(2\alpha^*\beta), |\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

5. Poslední důležitá reprezentace kubitu ψ je pomocí projekčního operátoru $|\psi\rangle\langle\psi|$. Ten je v kvantové mechanice nazývaný také *operátor hustoty* a hraje důležitou roli při práci s tzv. smíšenými systémy. Všimněme si nejprve, že operátor hustoty skutečně představuje jednoznačného reprezentanta, protože dva stavy lišící se o globální fázi mají stejný operátor. Současně má rozklad pomocí Pauliho matic, který je v souladu s výše uvedenými geometrickými reprezentacemi. Pro

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

totiž platí

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\vartheta & e^{-i\varphi}\sin\vartheta \\ e^{i\varphi}\sin\vartheta & 1-\cos\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(E + xX + yY + zZ),$$



OBRÁZEK 1. Inverzní sterografická projekce (převzato z Wikipedie)

kde

$$\begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\varphi, \\ y = \sin\vartheta\sin\varphi, \\ z = \cos\vartheta\,. \end{cases}$$

Položíme-li tedy $\sigma = (X, Y, Z)$, můžeme psát

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(E + r_\psi \cdot \sigma),$$

kde r_ψ je reprezentant $|\psi\rangle$ na Blochově sféře.