Tenzorový součin a kvantové registry

Tenzorový součin n-dimenzionálního Hilbertova prostoru U s m-dimenzionálním Hilbertovým prostorem V je bilineární zobrazení

$$\begin{aligned} U \times V &\to U \otimes V \\ (|u\rangle, |v\rangle) &\mapsto |u\rangle \otimes |v\rangle, \end{aligned}$$

kde $U \otimes V$ je Hilbertův prostor generovaný všemi obrazy tohoto zobrazení, tedy všemi prvky $|u\rangle \otimes |v\rangle$. (Pojmem „tenzorový součin“ se běžně zjednodušeně označuje také samotný prostor $U \otimes V$, a prvek $|u\rangle \otimes |v\rangle$ se nazývá tenzorový součin vektorů u a v). Skalární součin je na $U \otimes V$ definován „po složkách“, tedy rozšířením vztahu

$$\langle u_1 \otimes v_1 | u_2 \otimes v_2 \rangle := \langle u_1 | u_2 \rangle \langle v_1 | v_2 \rangle.$$

Bilinearita znamená, že platí:

$$\begin{aligned} |w\rangle \otimes (|u\rangle + |v\rangle) &= |w\rangle \otimes |u\rangle + |w\rangle \otimes |v\rangle; \\ (|u\rangle + |v\rangle) \otimes |w\rangle &= |u\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |w\rangle; \\ (\alpha|u\rangle) \otimes |v\rangle = |u\rangle \otimes (\alpha|v\rangle) &= \alpha(|u\rangle \otimes |v\rangle). \end{aligned}$$

Tenzorový součin vektorů $|u\rangle \otimes |v\rangle$ často zkracujeme na $|u\rangle|v\rangle$ nebo dokonce (zejména u bázových vektorů) na $|uv\rangle$.

Pokud $|\mathbf{b}_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, je báze U a $|\mathbf{c}_i\rangle$, $i = 1, \ldots, m$, báze V. Pak pro tenzorový součin vektorů $|u\rangle \in U$ a $|v\rangle \in V$ dostáváme

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \left(\sum_i \alpha_i |\mathbf{b}_i\rangle \right) \otimes \left(\sum_j \beta_j |\mathbf{c}_j\rangle \right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j |\mathbf{b}_i \mathbf{c}_j\rangle.$$

Je tedy vidět, že prostor $U \otimes V$ je generován vektory $|\mathbf{b}_i \mathbf{c}_j\rangle$. Definice tenzorového součinu je dokončena požadavkem, aby tyto vektory byly lineárně nezávislé, a tvořily tedy bázi $U \otimes V$. Z hlediska univerzální algebry je tedy tenzorový součin direktní součin Hilbertových prostorů doplněný o rovnosti bilinearity.

Z definice skalárního součinu na prostoru $U \otimes V$ plyne, že báze $|\mathbf{b}_i \mathbf{c}_j\rangle$ je ortonormální, a skalární součin na $U \otimes V$ tedy splňuje

$$\left\langle \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |\mathbf{b}_i \mathbf{c}_j\rangle \,\middle|\, \sum_{\ell,k} \beta_{\ell,k} |\mathbf{b}_\ell \mathbf{c}_k\rangle \right\rangle = \sum_{i,j} \alpha^*_{i,j} \beta_{i,j}.$$

Tenzorově můžeme násobit i více prostorů než dva. Pak budeme požadovat, aby byl tenzorový součin asociativní, tedy aby platilo

$$(|u\rangle \otimes |v\rangle) \otimes |w\rangle = |u\rangle \otimes (|v\rangle \otimes |w\rangle),$$

což umožní vynechávat závorky a definovat tenzorové mocniny. V kvantové informatice se používají především součiny kubitů, tzv. *kvantové registry*. Kvantový registr $\mathbb{H}_2^{\otimes n}$ s n kubity má bázi $|0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$, $|0\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle$, …, $|1\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle$, což podle dohody můžeme zkrátit na $|0 \cdots 0\rangle$, $|0 \cdots 1\rangle$, …, $|1 \cdots 1\rangle$. Chápeme-li nyní nuly a jedničky jako cifry binárního zápisu, dostáváme dvě různé báze velikosti 2^n: jedna je bazí prostoru $\mathbb{H}_2^{\otimes n}$, druhá prostoru $\mathbb{H}_{2^n}$. Dostáváme tak přirozený tenzorový rozklad báze $|0\rangle$, $|1\rangle$, …, $|2^n - 1\rangle$.

Je důležité si všimnout, že $U \otimes V$ obsahuje i vektory, které nelze napsat jako tenzorový součin vektorů z původních prostorů. Nerozložitelný je např. stav $|00\rangle +$

$|11\rangle$; máme totiž

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

a je snadno vidět, že pro žádná a, b, c, d neplatí současně $ac = bd = 1$ a $ad = bc = 0$. Pro kvantové jevy je klíčové, že takovéto *propletené* (*entangled*) stavy dvou a více systémů jsou fyzikálně možné, příslušné systémy mohou být dokonce prostorově značně vzdálené (např. rozesláním dvou propletených fotonů různými směry). Skutečnost, že prostorově nesouvislé částice mohou tvořit jeden systém, se označuje jako *nelokální* charakter kvantové mechaniky.

Tenzorově můžeme násobit také operátory. Jsou-li $A : U_1 \to U_2$ a $B : V_1 \to V_2$ dva operátory, je jejich tenzorový součin lineární zobrazení $A \otimes B : U_1 \otimes V_1 \to U_2 \otimes V_2$ definované svými hodnotami na generující množině rozložitelných vektorů takto:

$$(A \otimes B)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = (A|u\rangle) \otimes (B|v\rangle).$$

Z uvedených vlastností skalárního a tenzorového součinu není těžké ověřit, že tenzorový součin unitárních operátorů je opět unitární. Matice operátoru $A \otimes B$ typu $mp \times nq$ vznikne z matic A typu $m \times n$ a B typu $p \times q$ pomocí tzv. Kroneckerova součinu, který je dán takto:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$$

Např. pro

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dostáváme

$$H^{\otimes 2} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{-1} & 1 & \text{-1} \\ \hline 1 & 1 & \text{-1} & \text{-1} \\ 1 & \text{-1} & \text{-1} & 1 \\ \hline \end{array} \right).$$

Operátor H se nazývá *Hadamardův* a s jeho tenzorovými mocninami se ještě setkáme. Podívejme se, jak vypadá tenzorová mocnina $H^{\otimes n}$. Její matice je čtvercová velikosti $2^n \times 2^n$ a vytkneme-li faktor $(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$, dostaneme matici obsahující koeficienty 1 a -1. Očíslujme řádky a sloupce čísly $0, 1, \dots, 2^n - 1$ a podívejme se, jaké znaménko má prvek $(H^{\otimes n})_{i,j}$. Můžeme využít skutečnosti, že j-tý sloupec je vektor $H^{\otimes n}|j\rangle$. Zapíšeme-li j binárně, dostaneme tenzorový rozklad

$$\begin{aligned} H^{\otimes n}|j\rangle &= H^{\otimes n}|j_1 j_2 \cdots j_n\rangle = H^{\otimes n}|j_1\rangle|j_2\rangle \cdots |j_n\rangle = \\ &= \bigotimes_{k=1}^{n} H|j_k\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \bigotimes_{k=1}^{n} (|0\rangle + (-1)^{j_k}|1\rangle). \end{aligned}$$

Roznásobením posledního výrazu najdeme požadované znaménko jako koeficient u vektoru $|i\rangle = |i_1 i_2 \cdots i_n\rangle$. Mínusem do součinu přispějí přesně ty vektory $|i_k\rangle$, pro které je $i_k = j_k = 1$. Právě tehdy totiž z k-té roznásobované závorky bereme $|1\rangle$

(protože $i_k = 1$) a současně má tento $|1\rangle$ koeficient -1 (protože $j_k = 1$). Máme tedy

$$(H^{\otimes n})_{i,j} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (-1)^{i_1 j_1 + i_2 j_2 + \cdots + i_n j_n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (-1)^{i \cdot j},$$

kde $i \cdot j$ značí skalární součin vektorů cifer binárního rozvoje i a j, tedy právě sumu $i_1 j_1 + i_2 j_2 + \cdots + i_n j_n$.

Všimněme si, že chápeme-li skalární součin $\langle u|v\rangle$ jako působení lineární formy $\langle u|$ na $|v\rangle$, odpovídá definice skalárního součinu $\langle u_1 \otimes v_1|u_2 \otimes v_2\rangle$ tenzorovému součinu forem $\langle u_1|$ a $\langle u_2|$.

Všimněme si také, že pro endomorfismy A a B jsou vlastními vektory endomorfismu $A \otimes B$ vektory $|\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{c}_j\rangle$ s vlastními čísly $\lambda_i \cdot \kappa_j$, kde $|\mathbf{b}_i\rangle$ je vlastní vektor operátoru A s vlastním číslem λ_i a $|\mathbf{c}_j\rangle$ je vlastní vektor operátoru B s vlastním číslem κ_j. Podobně je $|\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{c}_j\rangle$ vlastním vektorem endomorfismu $A \otimes I + I \otimes B$ s vlastním číslem $\lambda_i + \kappa_j$ (kde I značí identické operátory příslušné velikosti). Tyto vztahy lze v komutativní algebře s úspěchem použít pro důkaz toho, že celistvé prvky okruhu tvoří okruh.