Algebra I

První zápočtová písemka

11. 11. 2010

(1) Rozhodněte, zda množina matic

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q} \right\},$$

tvoří podalgebru algebry $(\mathrm{M}_2(\mathbb{Q}), \cdot)$ čtvercových matic 2×2 s běžným maticovým násobením. [10b.]

(2) Najděte nějakou algebru $(\mathrm{A}, \circ)$ s vlastností $(\forall x, y)((y \circ y) \circ x = x)$. [10b.]

(3) Najděte ještě jednu algebru jako v předchozím bodě, která není s tou předchozí izomorfní (a ukažte, že opravdu není). [10b.]

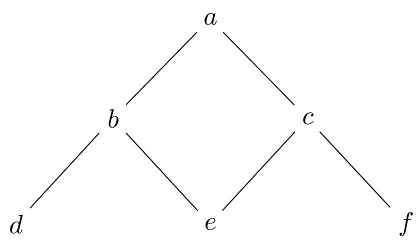
(4) Najděte podalgebru algebry $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ generovanou prvkem 9. [10b.]

(5) Najděte všechny minimální množiny generátorů algebry $(\mathrm{A}, \circ)$ zadané tabulkou:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

[15b.]

(6) Definuje následující Hasseův diagram svaz? Odpověď zdůvodněte. [10b.]



(7) Je zobrazení algeber $(\mathbb{C}, \cdot) \to (\mathbb{C}, \cdot)$, definované předpisem $\alpha \mapsto i \cdot \alpha$, homorfismus? [10b.]

(8) Existuje nějaké vnoření $(\mathbb{N}, +)$ do $(\mathbb{Q}, \cdot)$? Pokud ano, najděte ho. Pokud ne, proč? [10b.]

(9) Je dána algebra $(\mathrm{A}, \circ)$ tabulkou

$\circ$	a	b	c	d
a	a	d	a	d
b	d	b	c	a
c	a	c	b	a
d	d	d	a	d

Najděte nějakou netriviální kongruenci, nebo ukažte, že neexistuje. [15b.]

Všechna svá tvrzení zdůvodněte!