Algebra MAI019
Druhá zápočtová písemka
6. 1. 2011

(1) Rozhodněte, zda regulární matice $n \times n$ spolu se sčítáním tvoří grupu. Odpověď zdůvodněte. [10b]

(2) Rozhodněte, zda následující tabulka definuje grupu.

$$\begin{array}{c|ccccc|}
(G,\cdot) & a & b & c & d & e \\
\hline
a & a & b & c & d & e \\
b & b & c & d & e & a \\
c & c & e & b & a & d \\
d & d & a & e & c & b \\
e & e & d & a & b & c \\
\hline
\end{array}$$

Pokud ano, najděte všechny minimální množiny generátorů. Pokud ne, proč? [15b]

(3) Je grupa $\mathbb{Z}_8^*$ cyklická? Pokud ano, najděte generátor. [10b]

(4) Jdou dány prvky grupy $\mathbb{S}_6$:

$$\alpha = (1\,2\,3), \qquad \beta = (3\,4\,5).$$

Určete řád prvku $\alpha \cdot \beta$. [15b]

(5) Rozhodněte, zda iracionální čísla v uzavřeném intervalu $[\sqrt{2}, \sqrt{7}]$ s běžným uspořádáním tvoří úplný svaz. [10b]

(6) Určete znaménko permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 11 & 5 & 7 & 1 & 13 & 12 & 2 & 6 & 9 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

[10b]

(7) Najděte v $\mathbb{Z}_{20}^*$ podgrupu řádu 5 (nepřehlédněte hvězdičku). [15b]

(8) Najděte v $\mathbb{S}_3$ nejmenší kongruenci, pro kterou je $(1,2) \sim (2,3)$. Odpověď zdůvodněte. [15b]

Svá tvrzení a výsledky zdůvodněte tak, aby bylo jasné, jak jste k nim dospěli.