První zápočtová písemka z Lineární algebry II

(1) Je dáno zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$f((a,b,c),(x,y,z)) = ax + by + cz + a.$$

Rozhodněte, zda se jedná o bilineární formu. Odpověď dokažte, v případě záporné odpovědi nalezením protipříkladu k nějaké definiční vlastnosti bilineární formy. [10b]

(2) Rozhodněte, zda vektory $(1,-1)$, $(2,1)$ z $\mathbb{R}^2$ tvoří polární bázi matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[10b]

(3) Určete signaturu bilineární formy g prostoru $\mathbb{Q}^4$ dané maticí

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[15b]

(4) Najděte nějaké vektory u a v tak, aby $g(u,v) = 2$. [10b]

(5) Najděte nějakou ortonormální bázi podprostoru $\langle (1,2,1,-1),(1,1,0,1) \rangle$ prostoru $\mathbb{R}^4$, tak, aby vektor $(-1,0,1,-3)$ byl jedním z bázových vektorů. [15b]

(6) Najděte matici přechodu od báze $((1,2,1,-1),(1,1,0,1))$ k bázi nalezené v předchozím příkladu. [10b]

(7) Najděte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{C}$. [15b]

(8) Určete Jordanův tvar matice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[15b]