Úvod do komplexní analýzy — cvičení 4

1) Spočtěte následující integrály podél cest

a)

$$\int_\varphi \frac{1}{z^{1/2}}dz,$$

kde φ je kladně orientovaná jednotková kružnice počínající bodem -1.

b) $\int_\varphi l(z)dz$, kde φ je kladně orientovaná jednotková kružnice počínající bodem 1, a funkce l je spojitá (vyjma koncového bodu) funkce taková, že $l(1) = 0$ a $l(z) \in \log(z)$.

c) $\int_\varphi \bar{z}dz$, podél čtverce $0, 1, 1+i, i$.

d) $\int_\varphi z\bar{z}dz$ podél trojúhelníka $1, 2, 1+i$.

e) $\int ze^z dz$ podél paraboly $\varphi(t) = t + t^2 i; t \in [0, 2]$. (Využijte vhodnou větu.)

f)

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)}dz,$$

je-li φ kladně orientovaná kružnice o poloměru 1/2 a středu $\alpha)\, 1$ $\beta)\, 0$ $\gamma) -1$.

g)

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^4-1)}dz,$$

$\varphi(t) = 1 + \frac{e^{2\pi i t}}{2}$, $t \in [0, 1]$.

2) Délkou křivky $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ rozumíme

$$V(\varphi) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{N} |\varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1})| \,:\, N \in \mathbb{N};\, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b \right\}.$$

Ukažte, že pokud je φ cesta, je $L(\varphi) = V(\varphi)$. ($L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'|(t)dt$.)

3) Uvažujme funkci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, kde $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. Nechť $\varphi(t) = e^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$. Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

(Cauchův vzorec pro kruh)

4*)Uvažujme funkci $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, kde $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$. Nechť $\varphi(t) = e^{it}$; $t \in [0, 2\pi]$. Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad (= P^+ f(z))$$

a pro $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$ ukažte, že platí

$$-\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad (= P^- f(z)).$$

(Pokud znáte Abelovu větu, dokažte také Plemeljův vzorec pro $|z| = 1$

$$\lim_{r \to 1^-} P^+ f(z) - \lim_{r \to 1^+} P^- f(z) = f(z).)$$

5)Ukažte, že pokud je $\Omega \subset C$ oblast, f je spojitá na Ω a F_1 a F_2 jsou primitivní funkce k f na Ω, pak existuje $c \in \mathbb{C}$ tak, že $F_1 + c = F_2$.