

Úvod do komplexní analýzy — cvičení 8

1) Pomocí rozvoje v mocninnou řadu najděte funkci f holomorfní v 0, pro kterou platí na okolí bodu 0

a) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 2$

b) $(1 + z^2)f'(z) = 1$, $f(0) = 0$

c) $f''(z) + r^2 f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $r > 0$

d) $f''(z) - 2f'(z) + f(z) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

e*) $f''(z)f(z) = e^z$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

2) Určete násobnost kořene funkce v uvedeném bodě

a) $z^5 - 2z^4 + z^3$ v bodě 0

b) $z^5 - 2z^4 + z^3$ v bodě 1

c) $1 - \cos z$ v bodě 0

d) $e^{z^4} - 1$ v bodě 0

e) $e^z - e^{\sin z}$ v bodě 0

3) Spočtěte pro $0 < s < 1$ (integrujte funkci $z^{s-1}e^{iz}$ přes cestu, která konverguje k $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, využijte funkci $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$.)

a) $\int_0^\infty x^{s-1} \cos x dx$

b) $\int_0^\infty x^{s-1} \sin x dx$.