Úvod do komplexní analýzy — cvičení 3

1) Najděte derivaci funkcí v bodech, kde existuje.

a)

$$f(z) = \begin{cases} z^2 e^{1/z} & \text{pokud } z \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } z = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{pokud } z \neq 0 \\ 1 & \text{pokud } z = 0 \end{cases}$$

c)

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Log} z}{z-1} & \text{pokud } z \neq 1, z \notin (-\infty, 0] \\ 1 & \text{pokud } z = 1 \end{cases}$$

2)Najděte všechna řešení následujících rovnic v $\mathbb{C}$.

a) $\sin z - \cos z = i$

b) $\sinh z - \cosh z = 2i$

3)Ukažte, že funkce $e^{1/z}$ zobrazuje každé prstencové okolí bodu 0 na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4)Sečtěte

a) $\sinh z + \sinh 2z + \cdots + \sinh nz$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

b) $\cos z + \cos 3z + \cdots + \cos(2n+1)z$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

5)**Obecná komplexní mocnina** Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$ značíme

$$z^a = \exp(a \mathrm{Log} z)$$

a

$$m_a(z) = \{\exp(aw) : w \in \log z\}.$$

Ukažte, že pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $z^0 = 1$, $m_0(z) = \{1\}$, definice z^n pro $n \in \mathbb{N}$ odpovídá algebraické definici, $z^{-a} = 1/z^a$ a pro $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ má množina $m_a(z)$ n prvků.

6) Nechť má funkce ϕ definovaná na intervalu $[-\pi, \pi)$ Fourierovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\theta}$. Předpokládejme, že existují $K, \epsilon > 0$ tak, že $|c_n| < Ke^{-\epsilon|n|}$. Ukažte, že existuje funkce f holomorfní na $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ tak, že pro $z \in \mathbb{T}$ platí $f(z) = \phi(\mathrm{Arg}(z))$. (Uvažujte $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.)