Momentová metoda, Intervalové odhady

30.10.2018

1. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
   (a) Odhadněte neznámý parametr λ momentovou metodou. Jaké je asymptotické rozdělení tohoto odhadu?
   (b) Na základě odhadu z části (a) najděte klasický asymptotický intervalový odhad λ.
   (c) Podobně odvoďte, jak vypadá spolehlivostní množina B_n.
   (d) Zkonstruujte také interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl.
   (e) Napište také oba jednostranné (klasické asymptotické) intervalové odhady pro λ.

2. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $[0, \theta]$, $\theta > 0$.
   (a) Nalezněte momentový odhad θ a pomocí něj zkonstruujte (asymptotický) intervalový odhad θ, a to analogickým způsobem jako v (b)–(d) v předchozím příkladě.
   (b) Uvažujte $U_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ odhad parametru θ. Sestrojte přesný (nikoliv asymptotický) intervalový odhad θ založený na U_n/θ.

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr s hustotou $f(x; b) = xb^{-2} \exp(-x^2/2b^2) \mathrm{I}[x \geq 0]$ pro $b > 0$.
   (a) Nalezněte odhad $\hat{b}_n$ parametru b momentovou metodou.
   (b) Nalezněte asymptotické rozdělení $\hat{b}_n$ a na jeho základě sestrojte klasický asymptotický intervalový odhad b.

4. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x; p) = px^{-p-1} \mathrm{I}[x > 1]$, pro $p > 0$. Najděte odhad p momentovou metodou a odvoďte klasický asymptotický intervalový odhad p.

5. Uvažujte $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[-a, a]$, kde $a > 0$. Odhadněte parametr a metodou momentů a sestrojte intervalový odhad.

Opakování z přednášky

Momentová metoda Nechť $X = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodný výběr z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$.

- Nechť $\theta_X = t(F_X) \in \mathbb{R}$ je nějaký parametr tohoto rozdělení a nechť $\mathsf{E}X_1 = g(\theta_X)$ pro nějakou ryze monotónní funkci $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Momentový odhad $\widehat{\theta}_n$ se získá jako řešení $\overline{X}_n = g(\widehat{\theta}_n)$, neboli
$$\widehat{\theta}_n = g^{-1}\left(\overline{X}_n\right).$$
- V případě, že $\mathsf{E}X_1$ nezávisí na θ_X, nebo pokud $\theta_X \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$, pak do odhadovacího procesu analogickým způsobem zapojíme momenty vyšších řádů, tj. $\mathsf{E}X^k$ a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$.

Konstrukce intervalových odhadů Chceme zkonstruovat intervalový odhad pro parametr θ_X, přičemž máme odhad $\widehat{\theta}_n$ tohoto parametru, pro který platí
$$\sqrt{n}\big(\widehat{\theta}_n - \theta_X\big) \xrightarrow{D} \mathsf{N}\big(0, \sigma^2(\theta_X)\big),$$
kde $\sigma^2(\cdot)$ je funkce spojitá ve skutečné hodnotě parametru θ_X.

- **Klasický asymptotický interval spolehlivosti** vychází z asymptotického rozdělení $\widehat{\theta}_n$ a z Cramérovy-Sluckého věty. Jelikož $\dfrac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} \xrightarrow{D} \mathsf{N}\big(0,1\big)$, platí
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(- u_{1-\alpha/2} \le \frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\widehat{\theta}_n)} \le u_{1-\alpha/2}\Big) = 1 - \alpha,$$
a tedy
$$\Big(\widehat{\theta}_n - \frac{u_{1-\alpha/2}\,\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}, \widehat{\theta}_n + \frac{u_{1-\alpha/2}\,\sigma(\widehat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}\Big) \tag{1}$$
je intervalový odhad parametru θ_X o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.
- Jiný možný postup využívá přímo, že pro množinu
$$B_n = \Big\{\theta : \Big|\frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)}\Big| \le u_{1-\alpha/2}\Big\} \tag{2}$$
platí, že $\mathsf{P}\big(B_n \ni \theta_X\big) \to 1-\alpha$. Zpravidla je B_n interval, ale obecně může být zadán jen implicitně.
- **Interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl**. Nechť g je taková, že $[g'(\theta)]^2\,\sigma^2(\theta) = 1$, pak z Δ-metody dostáváme, že $\sqrt{n}\,\big(g(\widehat{\theta}_n) - g(\theta_X)\big) \xrightarrow{D} \mathsf{N}\big(0,1\big)$ a tedy
$$\Big(g(\widehat{\theta}_n) - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, g(\widehat{\theta}_n) + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\Big)$$
je intervalový odhad pro $g(\theta)$. Z něj pak invertováním obou mezí získáme intervalový odhad parametru θ_X o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.