Vytvořující funkce náhodné veličiny

18.2.2019

1. Najděte vytvořující funkci náhodné veličiny X, kde
   (a) X má alternativní rozdělení s parametrem $p \in (0,1)$,
   (b) X má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, tj. $\mathsf{P}(X = n) = \lambda^n/n! \exp(-\lambda)$, $n \in \mathbb{N}_0$,
   (c) X má geometrické rozdělení s parametrem $p \in (0,1)$, tj. $\mathsf{P}(X = n) = (1-p)^n p$, $n \in \mathbb{N}_0$.

   V každém bodě diskutujte poloměr konvergence dané řady a spočítejte střední hodnotu a rozptyl pomocí vytvořující funkce.

2. Pro náhodnou veličinu X s vytvořující funkcí P_X vyjádřete vytvořující funkci veličin $Y = X + 1$ a $Z = 2X + 2$.

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s $\mathsf{Po}(\lambda)$. Pomocí vytvořující funkce zjistěte rozdělení $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

4. Náhodná veličina X udává počet úspěchů v n nezávislých Bernoulliovských pokusech a pravděpodobností úspěchu $p \in (0,1)$.
   (a) Spočítejte vytvořující funkci X a určete rozdělení X.
   (b) Vyjádřete pravděpodobnost, že X je sudé číslo.

5. Náhodná veličina X vyjadřuje počet neúspěchů před r-tým úspěchem v posloupnosti nezávislých Bernoulliovských pokusů s pravděpodobností úspěchu $p \in (0,1)$.
   (a) Určete vytvořující funkci a rozdělení X.
   (b) Určete střední hodnotu a rozptyl X.

6. Najděte příklad čítací náhodné veličiny, jejíž vytvořující funkce má poloměr konvergence roven jedné.

7. Rozhodněte, zda je funkce $P(s) = 1 - \sqrt{1 - s^2}$ vytvořující funkcí nějaké čítací náhodné veličiny.

8. Řešte 4 (b) alternativním způsobem: Uvažujte posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \mathsf{P}(\text{v } n \text{ pokusech byl sudý počet úspěchů})$. Dokažte rekurzivní vztah

   $$a_n = (1-2p)a_{n-1} + p.$$

   Na základě tohoto vztahu nalezněte vytvořující funkci A posloupnosti $\{a_n\}$. Pomocí rozvoje do mocninné řady pak nalezněte hodnotu a_n.

Vytvořující funkce

- Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je reálná posloupnost a existuje $s_0 > 0$ takové, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konverguje pro všechna $|s| < s_0$. Pak funkci $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ nazveme *vytvořující funkcí posloupnosti* $\{a_n\}$.
- Nechť X je náh. veličina s diskrétním rozdělením s hodnotami v $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ (tzv. čítací náhodná veličina), kde $\mathsf{P}(X = n) = p_n$. *Vytvořující funkci náhodné veličiny* X definujeme jako
$$P_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n.$$

Opakování k mocninným řadám. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je reálná posloupnost a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je mocninná řada v proměnné $z \in \mathbb{C}$.

- Existuje $R \in [0, \infty]$ tak, že pro $|z| < R$ řada konverguje absolutně a diverguje pro $|z| > R$. Tento *poloměr konvergence* R lze spočítat jako $R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Nebo $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (pokud limita existuje).
- Na $\{z : |z| < R\}$ je funkce $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ spojitá a diferencovatelná a platí
$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \quad A^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z^{n-k}, \quad |z| < R,$$
kde formálně zderivované řady mají tentýž poloměr konvergence R. Pro $R > 0$ je $a_k = \dfrac{A^{(k)}(0)}{k!}$.
- Abelova věta pro $R = 1$ a $a_n \geq 0$: $A(1-) = \lim_{z\to 1-} A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in [0, \infty]$.

Pro vytvořující funkci náhodné veličiny platí:

(i) Poloměr konvergence R vytvořující funkce P_X je $R \geq 1$.

(ii) $P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ pokud $\mathsf{P}[X < \infty] = 1$, tj. když je X tzv. vlastní náhodná veličina.

(iii) $P_X^{(k)}(s)$ je spojitá pro $|s| < 1$ a $P_X^{(k)}(1-)$ vždy existuje.

(iv) P_X jednoznačně určuje rozdělení X. Platí $p_k = P_X^{(k)}(0)/k!$, speciálně $p_0 = P_X(0)$.

(v) Pro vlastní náhodnou veličinu platí $P_X(s) = \mathsf{E}s^X$ a
$$\mathsf{E}X = P_X'(1-), \qquad \mathsf{E}X(X-1)\dots(X-k+1) = P_X^{(k)}(1-)$$
$$\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}X(X-1) + \mathsf{E}X - (\mathsf{E}X)^2 = P_X''(1-) + P_X'(1-) - [P_X'(1-)]^2,$$
kde vztah pro rozptyl platí, pokud $\mathsf{E}X < \infty$.

Konvoluce

1. Jsou-li $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálné posloupnosti, pak jejich konvolucí rozumíme posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ danou jako $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Značíme $\{c_n\} = \{a_n\} \star \{b_n\}$.
2. Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = A(z)$ pro $|z| < R_A$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = B(z)$ pro $|z| < R_B$, pak $A(z)B(z) = C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pro $|z| < \min\{R_A, R_B\}$, kde a $\{c_n\}$ je konvoluce $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.
3. Operace konvoluce je asociativní a komutativní. Posloupnost $\{a_n\}^{2\star} = \{a_n\} \star \{a_n\}$ se nazývá druhá konvoluční mocnina posloupnosti $\{a_n\}$. Podobně (indukcí) definujeme k-tou konvoluční mocninu $\{a_n\}^{k\star}$ pro $k > 1$ a $\{a_n\}^{0\star} = \{1, 0, \dots\}$. Vytvořující funkce $\{a_n\}^{k\star}$ je $A(s)^k$.
4. Jestliže X a Y jsou nezávislé čítací náhodné veličiny, pak $\mathsf{P}(X + Y = n)$ jsou konvolucí $\mathsf{P}(X = n)$ a $\mathsf{P}(Y = n)$ a
$$P_{X+Y}(s) = P_X(s) P_Y(s).$$
Jsou-li $X_1, \dots X_n$ iid s P_X, pak $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ má vytvořující funkci $P_S(s) = [P_X(s)]^n$.